УДК 517.91, 621.178.162

Ю.І. ШАЛАПКО, Ю.Б. МІХАЙЛОВСИЙ, М.Є. СКИБА, С.Г. КОСТОГРИЗ
Хмельницький національний університет

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО ОРІЄНТУВАННЯ ТА ДИНАМІЧНОГО ПЛАНУВАННЯ В N-МІРНОМУ ПРОСТОРІ ЧИННИКІВ ЕВОЛЮЦІЇ ФРЕТИНГ-ПРОЦЕСІВ

Вступ

Розвиток базових моделей тертя залежить від точки зору окремого дослідника і передовсім базується на власному науковому досвіді. Науковець, пріоритетом якого є механіка, швидше за все розділить властивості матеріалів на такі об'ємні властивості, як модулі пружності і напруження. Вчений, який має справу з матеріалами, може обрати структурно пов'язані параметри, такі як вектор Бюргерса і розповсюдження тріщин. Хімік або фізик, що досліджує поверхні, напевно, застосує у моделюванні тертя характеристики хімічних або атомних з'єднань. Те, що всі ці погляди так відрізняються один від одного, призвело до виникнення великої кількості моделей, в яких важко знайти об'єднуючий початок.

Будь-який експеримент є перетворенням предмету дослідження із явища у абстрактний образ, який дає наочне уявлення про фізичне явище чи процес. Будь-який експеримент повинен бути обґрунтованим на основі попередньо висунутої гіпотези, яка, в свою чергу, акумулює в собі всі теоретичні та практичні досягнення у дослідженні даного феномена [1].

Одним з основних компонентів в структурі природознавчої теорії є математичний апарат, який потрібен для розрахунку експериментальних ситуацій. Надалі ці дані є обґрунтуванням та підтвердженням отриманих теоретичних здобутків. Крім того, математизація правил перетворення абстрактних об'єктів теорії дає можливість отримати нове знання без експерименту і спостережень, не виходячи за межі теоретичної діяльності.

Для будь-якого підходу в моделюванні систем, в яких відбувається тертя, важливим є інтегратор з різним часовим кроком або тактом. Сучасна обчислювальна техніка дозволяє інтеграторові задавати дуже малий крок, майже на рівні нульової швидкості, де тертя швидко змінюється. Однак, у випадках, коли моделі тертя демонструють автоматичну компенсацію сили тертя, необхідно задавати фіксований крок інтегрування. В якості альтернативи моделюванню тертя можна розглядати систему як чорний ящик, тобто відмовитись від нашого прагнення передбачити його поведінку на основі простіших законів, дослідивши натомість його поведінку експериментально, і якомога ефективніше охарактеризувати результати. Для того, щоб результати експерименту були корисними, нам потрібно знати всі відповідні умови, в яких він був проведений. Цей набір даних надзвичайно складний для застосовування в проектуванні, і вихідна модель тертя буде дійсною лише для певної установки. Однак, задачою будь-якого експерименту є визначення вагомості тих чи інших показників процесу для того, щоб визначитись з відомими моделями, границями її використання, а в кращому випадку, узагальнити експериментальні дані в уточненому законі тертя.

Комп'ютерна симуляція динамічної системи дозволяє отримати цілісну і досить повну еволюцію процесу тертя при мікропереміщеннях за сталих вихідних значень [2, 3]. Динамічна модель малоамплітудного фретингу повинна включати характеристику тертя (сила та коефіцієнт тертя, відносна швидкість проковзування, параметри Штрибек— ефекту), масу деталі та масу деформованого поверхневого шару, частоту коливань, тангенціальну жорсткість, амплітуду вимушених коливань, демпфірування і т.д [4, 5]. Зрозуміло, що простий перебір цих параметрів разом з різними початковими умовами не дасть можливості провести комплексне дослідження впливу параметрів та їх взаємовплив на еволюцію системи. Це саме стосується і плану

проведення реального експерименту. Побудова некомпозиційних планів як для комп'ютерного, так і для лабораторного експерименту дає можливість «математичного акумулювання» багатофакторного експерименту в рівняннях регресії у вигляді полінома другого порядку. Розглянемо побудову математичної залежності швидкості відносного проковзування у номінально-нерухомому фрикційному з'єднанні залежно від фізико–механічних параметрів системи, а потім знайдемо глобальний оптимум в n– мірному просторі чинників фретинг– процесу.

Математична модель динамічної системи поверхонь розділу двох тіл

Розглянемо фрикційну взаємодію поверхонь в умовах значного рівня сил тертя, та малих відносних вібраційних мікропроковзувань в межах 1...20 μm як динамічну модель в двох степенях вільності (рис. 1).

На рис. 1 прийняті позначення: x, y, z – переміщення відповідно основи, маси m, маси M в нерухомій системі координат;

c – жорсткість пружини;

μ – коефіцієнт тертя між деталями 1-2;

N – нормальна сила, що діє між деталями 1-2;

ω – кругова частота коливань деталі 1;

t – час;

M – маса деталі 3;

m – маса деталі 2;

a – амплітуда переміщення деталі 1;

F_j – сила тертя в момент часу j.

Основа 1 рухається за гармонічним закон: $z = a\sin(\omega t)$.

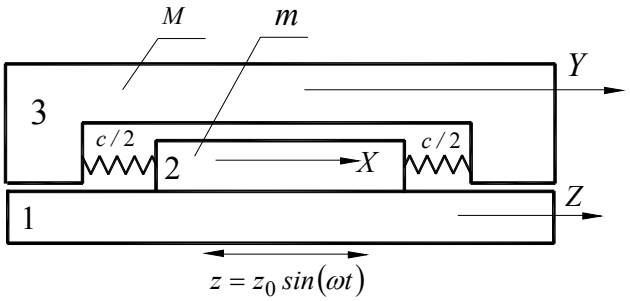


Рис. 2. Динамічна система інтерфейсу при тангенціальному циклічному збудженні основи

Необхідно знайти закон руху маси m та маси M. Поділимо весь інтервал часу від початку руху t_0 на однакові часові проміжки тривалістю

$$\Delta t = t_j - t_{j-1} \tag{1}$$

$$t_j = t_0 + j \cdot \Delta t \quad (j = 1,2,3,...).$$

Інтервали часу Δt настільки малі, що силу тертя на кожному з інтервалів вважаємо постійною. Позначимо силу тертя, яка діє на j-му проміжку часу $\left[t_{j-1}; t_j\right]$ через F_j. Тоді диференціал рівняння, що описують еволюцію представленої динамічної моделі; запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} mx'' = -c(x-y) + F_j; \\ My'' = c(x-y). \end{cases} \tag{3}$$

Розв'язок даної системи розглянутий в роботі [3] і дає дає можливість описати поведінку динамічної системи у вигляді часових залежностей для переміщень тіл, знаходити різницю переміщень та швидкостей в певний момент часу, відслідковувати поведінку сил тертя в часі залежно від чинників, які описують відносний рух поверхонь, а саме: амплітуди і частоти вимушених коливань основи 1, жорсткості в напрямку тангенціального зміщення тіла 2, сили тертя, характеристики тертя, маси тіл. Спростимо характеристику тертя до закону Кулона-Амотона (рис. 2) й розглянемо комп'ютерний експеримент за створеною моделлю при наступних вхідних змінних факторів: тангенціальна жорсткість c (Н/μm), частота коливань ω (рад/с) та сила тертя F (μm). Сталі параметри: швидкість тіла 3 дорівнює нулю, що досягається умовою $m << M$, та амплітуда коливань A (μm). На рис. 2 показана характеристика тертя, тобто залежність сили тертя від відносної швидкості проковзування.

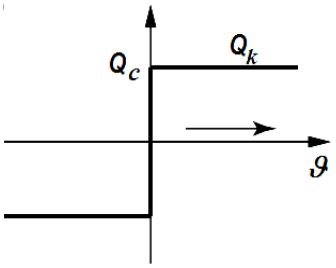


Рис. 2. Характеристика тертя

За цією характеристикою маємо наступну картину мікро переміщень тіла 2 по основі 1 (рис. 3).

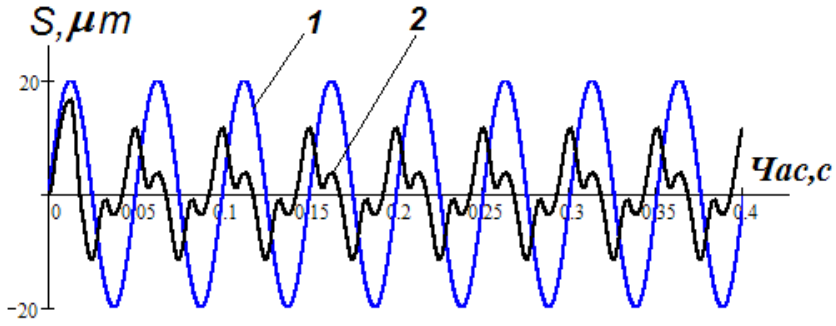


Рис. 3. Часовий перебіг мікропереміщень тіла 1 та тіла 2. Умови комп'ютерної симуляції: A=20 μm, ω=125,6 рад/с, $F_{тр}$=10^5μm, c=40 Н/μm, відношення мас M/m=10^5

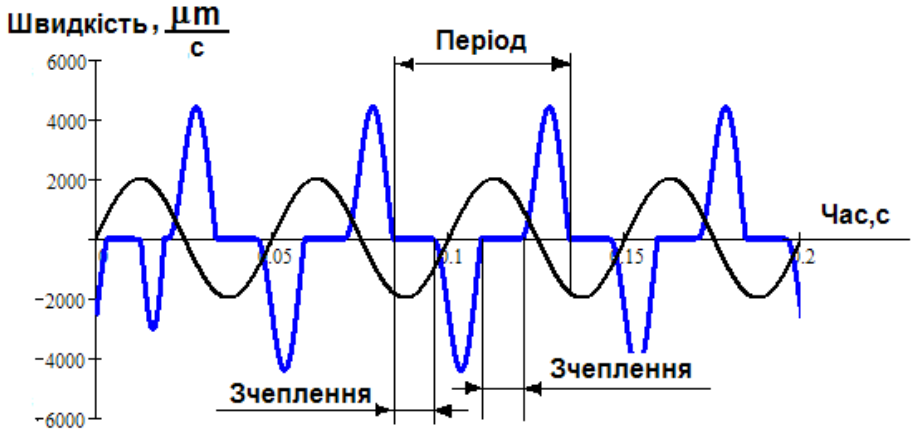


Рис. 4. Різниця швидкостей в лабораторній системі координат основи та тіла 2

Визначивши абсолютні швидкості всіх тіл системи знайдемо швидкість проковзування тіла 2 відносно основи (рис. 4). Горизонтальні дільниці на графіку проковзування відповідають часу перебування інтерфейсу в стані зчеплення, що і показано для одного періоду на рисунку 4. Для визначення найбільшої величини проковзування знайдемо різницю мікро переміщень основи та тіла 2 (рис. 5).

Рис. 5. Відносні мікропереміщення тіла 2 по основі 1

Математична обробка результатів комп'ютерної симуляції

Метою математичної обробки експериментальних даних є отримання кореляційної моделі процесу, що вивчається. Як правило, через складність процесу або недостатній масив даних, невідому залежність вихідної величини ξ від незалежних чинників x_{il} представляють поліномом вигляду:

$$\xi = \beta_0 + \sum \beta_i x_i + \sum \beta_i \ell \cdot x_i x_\ell + \sum \beta_{ii} \cdot x_i + \ldots \qquad (4)$$
$$1 \le i \le k \qquad 1 \le i < \ell \le k$$

Для цього визначаються коефіцієнти рівняння і оцінюються їх вага. За наслідками дослідів можна визначити тільки вибіркові коефіцієнти регресії b_0, b_i, b_{il}, b_{ii}..., які є лише оцінками теоретичних коефіцієнтів β_0, β_i, β_{il}, β_{ii} .... полінома (4). Рівняння регресії, отримане за наслідками дослідів, має вигляд:

$$y = b_0 + \sum b_i x_i + \sum b_i \ell \cdot x_i x_\ell + \sum b_{ii} \cdot x_i^2 + \ldots, \qquad (5)$$
$$1 \le i \le k, \qquad 1 \le i < \ell \le k, \qquad 1 \le i \le k,$$

де y – вибіркова оцінка функції відгуку x_i.

В ситуаціях, коли апріорна інформація про порядок полінома відсутня, математичну модель досліджуваного процесу підбирають, починаючи з найпростіших лінійних рівнянь, послідовно збільшуючи ступінь полінома до отримання адекватної моделі. Процес отримання математичної моделі у вказаних ситуаціях здійснюється таким чином. Спочатку реалізується повний експеримент чинника 2^k або експеримент, представлений дробовою реплікою 2^{k-p}, де p – число ефектів взаємодії, замінених новими змінними. За наслідками дослідів, виконаних згідно з цим планом, знаходять коефіцієнти лінійного рівняння регресії. Якщо це рівняння виявиться неадекватним, то знаходять коефіцієнти регресії при ефектах взаємодії чинників. Якщо рівняння регресії з урахуванням взаємодій чинників виявляються також неадекватним, то виконані раніше досліди доповнюють дослідами в зоряних точках і дослідами в центрі плану, число яких рівно n_o. Число дослідів в зоряних точках рівно 2^k. За наслідками дослідів, виконаних згідно з планом 2^k або 2^{k-p} і додатковим дослідами в зоряних точках і в центрі плану, оцінюють коефіцієнти полінома другого порядку. Слід зазначити, що досліджуваний процес часто вдається описати поліномом другого порядку. У разі неадекватності полінома другого порядку переходять до планування третього порядку і описують досліджуваний процес поліномом третього ступеня.

За результатами дослідів визначаються коефіцієнти рівняння регресії:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 +$$
$$+ b_{11} \cdot x_1^2 + b_{22} \cdot x_2^2 + b_{33} \cdot x_3^2 \ldots = b_0 + b_k x_k \ldots + b_{k-1,k} x_{k-1} \cdot x_k + \ldots b_{kk} x_k^2 \qquad (6)$$

Ці коефіцієнти рівняння регресії знаходимо за допомогою методу найменших квадратів за формулами:

$$b_0 = \frac{1}{n_0} \sum_{u=1}^{n_0} y_{0i}, \quad b_i = A \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{ij} \cdot y_i, \quad b_{i\ell} = D \sum_{j=1}^{N} x_{ij} x_{\ell j} y_j,$$
$$b_{ii} = B \sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 y_j + C \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 y_j - \frac{1}{p \cdot n_0} \sum_{u=1}^{n_0} y_{0u} \qquad (7)$$

де n_0 – число дослідів в центрі плану, u – номер паралельного досвіду в центрі плану, y_{ou} – значення функції відгуку в u-ом досліді, N – число дослідів в матриці планування; j – номер досліду в матриці планування, i, l – номери факторів, $x_{i,j}$, x_{lj} – кодовані значення i-го і l-го факторів в j-м досліді; y_j – значення функції відгуку в j-м досвіді, $к$ – число факторів, A, B, 3, D, p – константи, залежні від числа факторів.

Для трьох, чотирьох, п'яти і семи факторів дисперсії S_{b0}^2, S_{bi}^2, S_{bil}^2, S_{bii}^2 коефіцієнтів регресії визначаємо за формулами:

$$S_{b_0}^2 = \frac{1}{n_0} S_y^2, \quad S_{b_i}^2 = A S_y^2, \quad S_{b_{i\ell}}^2 = D S_y^2, \quad S_{b_{ii}}^2 = B_1 S_y^2 \qquad (8)$$

Дисперсію Sy^2 відтворення експерименту визначають за наслідками n_0 дослідів в центрі плану.

$$S_y^2 = \frac{S_E}{n_0 - 1}, \qquad (9)$$

де $S_E = \sum_{u=1}^{n_0} (y_{0u} - \bar{y}_0)^2 \qquad \bar{y}_0 = \frac{1}{n_0} \sum_{u=1}^{n_0} y_{0k}$.

Адекватність моделі перевіряють за допомогою F – критерію Фішера.

Для випадку, що досліджується, необхідно виконати 15 експериментів за планом, який представлений матрицею планування (табл..1). Границі змінних факторів були наступні:

- сила тертя F_{min}=10^5 μН, F_{max}=$7 \cdot 10^5$ μН;
- частота коливань ω_{min}=31,4 рад/с (5 Гц), ω_{max}=125,6 рад/с (20 Гц);
- тангенціальна жорсткість c_{min}=40 Н/μm, c_{max}=140 Н/μm.

Таблиця 1

Матриця планування експерименту

X1	X2	X3	Y, μm
1.0	1.0	0.0	13.039
1.0	-1.0	0.0	11.5
-1.0	1.0	0.0	19.314
-1.0	-1.0	0.0	17.983
0.0	0.0	0.0	15.8
1.0	0.0	1.0	16.5
1.0	0.0	-1.0	0.0
-1.0	0.0	1.0	19.684
-1.0	0.0	-1.0	0.0
0.0	0.0	0.0	15.8
0.0	1.0	1.0	17.696
0.0	1.0	-1.0	0.0
0.0	-1.0	1.0	18.0
0.0	-1.0	-1.0	0.0
0.0	0.0	0.0	15.8

Після проведення експериментів будуємо матрицю значень (табл. 2). Де Y значення максимальної амплітуди проковзування двох тіл.

Таблиця 2

Матриця значень тангенціального проковзування двох тіл в результаті комп'ютерного експерименту

X1, μH	X2,рад/с	X3, H/μm	Y, μm
700000.0	125.6	90.0	13.039
700000.0	31.4	90.0	11.5
100000.0	125.6	90.0	19.314
100000.0	31.4	90.0	17.983
400000.0	78.5	90.0	15.8
700000.0	78.5	140.0	16.5
700000.0	78.5	40.0	0.0
100000.0	78.5	140.0	19.684
100000.0	78.5	40.0	0.0
400000.0	78.5	90.0	15.8
400000.0	125.6	140.0	17.696
400000.0	125.6	40.0	0.0
400000.0	31.4	140.0	18.0
400000.0	31.4	40.0	0.0
400000.0	78.5	90.0	15.8

За допомогою оригінальної програми отримуємо математичну модель поведінки динамічної системи у вигляді рівняння:

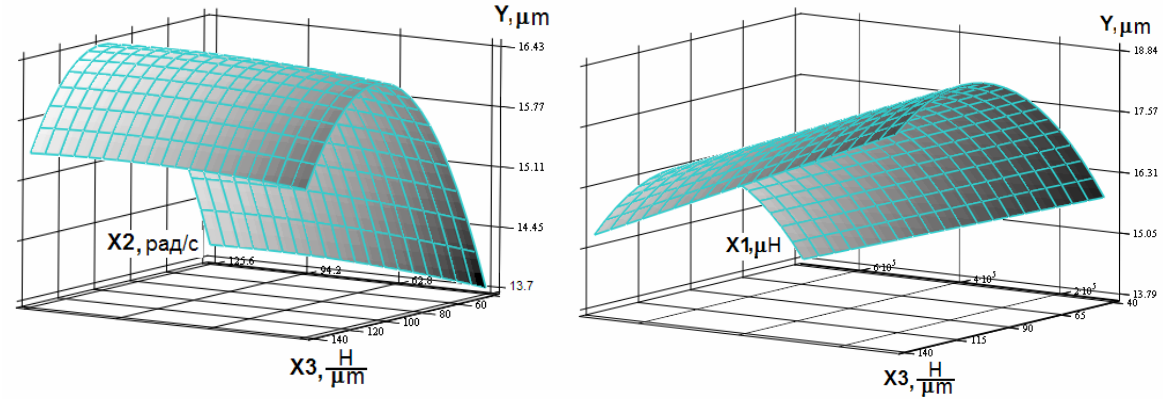
$$Y_A = 15.800000190734863 - 1.9927499294281006*X1 + 0.3207497*X2 + 8.984999895*X3 + 0.05200004577636719*X1*X2 - 0.7960000038146973*X1*X3 - 0.07600021362304688*X2*X3 - 0.10950016975402832*X1^2 - 0.23150038719177246*X2^2 - 6.644500017166138*X3^2 \quad (10)$$

Аналогічно розроблена модель для визначення двох поверхонь де один період, як відношення часу зчеплення на період одного коливання основи (рис. 3):

$$y = 0.3600000143475 + 0.186437502508*X1 - 0.02468750537*X2 - 0.3169990*X3 - 0.026250004768371582*X1*X2 - 0.1316249966621399*X1*X3 - 0.003124995157122612*X2*X3 - 0.059875001199543476*X1^2 + 0.05612498987466097*X2^2 + 0.13074999023228884*X3^2 \quad (11)$$

Результати моделювання

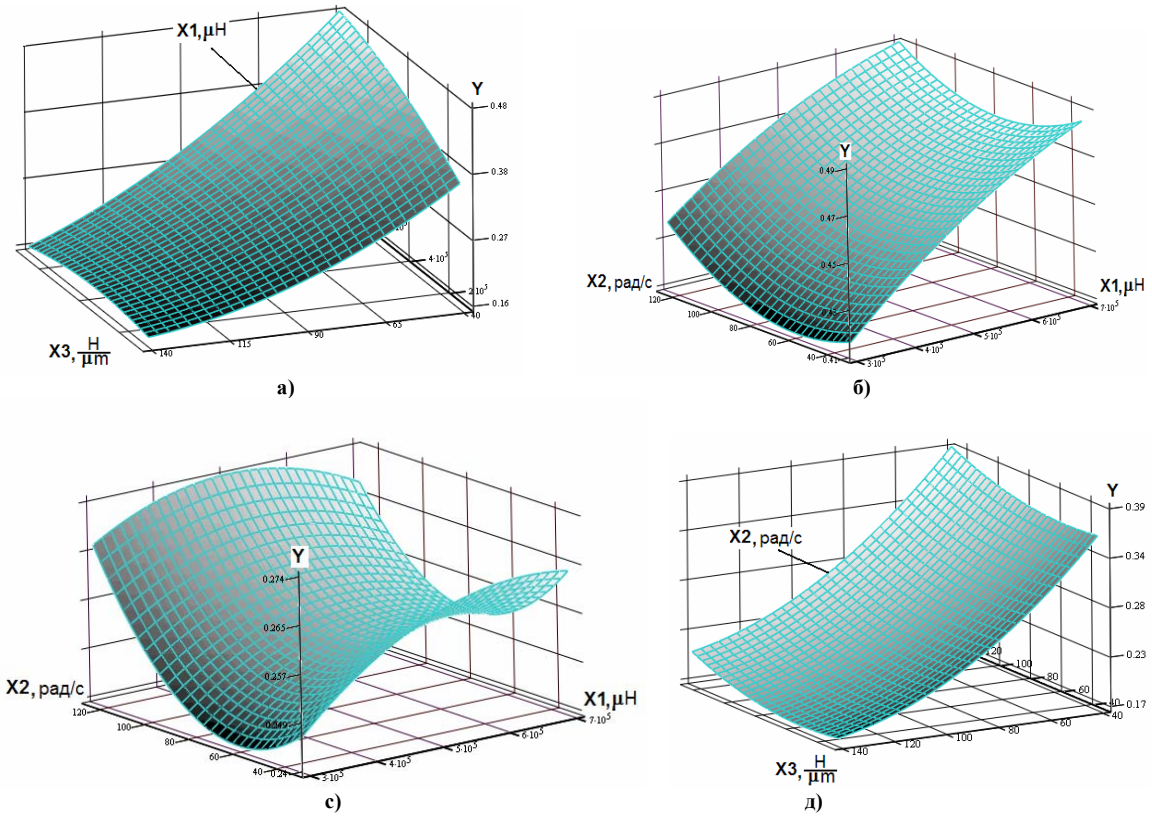
На рис. 6. показана залежність максимальної амплітуди проковзування від частоти та жорсткості при сталій силі тертя, а також від сили тертя та жорсткості при сталій частоті.



а) **б)**

Рис. 6. Залежність максимальної амплітуди проковзування (Y) від частоти (X2) тат тангенціальної жорсткості (X3) при силі тертя X1=7·10^5 µH (а) та від чинників X1, X3 при частоті коливань X2=31,4 рад/с (б)

На рис. 7. показані залежності відносного часу зчеплення від чинників динамічної системи



а) **б)**

с) **д)**

Рис. 7. Залежність відносного часу зчеплення (Y) від сили тертя (X1), частоти (X2), тангенціальної жорсткості (X3). Рис. (а) – стала частота X2=78,5 рад/с, (б) – стала жорсткість X3=40 Н/µm, (с) – стала жорсткість X3=100 Н/µm, (д) – стала сила тертя X1=10^{5}µm

Висновки

Запропонований математичний продукт дозволяє більш ефективно проводити трибологічні дослідження з врахуванням багатьох факторів (в нашому випадку семи). Математична модель, яка створена на базі як фізичного експерименту, так і комп'ютерної симуляції, дозволяє прогнозувати поведінку динамічної системи в її еволюції. Для даної задачі це цілком природна зміна параметрів фретингу із-за зношування та втрати тангенціальної жорсткості. Регресійний аналіз дозволив визначити, за яких амплітуд, частот і жорсткості системи слід очікувати максимальну амплітуду проковзування двох поверхонь та максимальний час перебування за один період коливання в стані зчеплення.

Література

1. Евдокимов Ю.А., Колесников В.И., Тетерин А.Н. Планирование и анализ экспериментов при решении задач трения и износа. – М.: Наука, 1988. – 228 с.

2. Шалапко Ю.І. Динамічні та фрикційні чинники зчеплення поверхонь в умовах вібраційного навантаження // Вісник Технологічного університету. – 2006. – № 1, с. 80 – 84

3. Шалапко Ю.І. Еволюційна модель фрикційної взаємодії поверхневих шарів при фретингу // Вісник двигунобудування. — 2006. — № 4 — с.44- 49

4. Шалапко Ю.І. Вплив Штрибек ефекту на нелінійний осцилятор з сухим тертям при кінематичному збудженні // Вісник Технологічного університету. — 2005. — № 1, с. 35 — 43

5. Шалапко Ю.І. Параметричне дослідження умов зчеплення — проковзування поверхонь при гармонічних коливаннях // Вісник Технологічного університету. — 2005. — № 5, с. 39 — 44

6. Шалапко Ю.І. Моделювання та особливості тертя при переході від зчеплення до проковзування // Вісник Технологічного університету. — 2007. — № 1- с.234-241

Надійшла 10.5.2007 р.