В силу леми Жордана й теореми Коші [3] одержуємо:

$$\mathrm{H}_{\mu;jk}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{\mu,j}(r,\beta)V_{\mu,k}(\rho,\beta)\Omega_{\mu}(\beta)d\beta\sigma_k a_k^2 \equiv$$

$$\equiv G_{\mu,k}(t,r,\rho)\sigma_k a_k^2,\ j,k=\overline{1,3}. \qquad (24)$$

У формулах (24) беруть участь функції:

$$V_{\mu,1}(r,\beta)=\frac{2}{\pi^2}c_{21,1}c_{21,2}b_3\frac{\operatorname{ch}\pi b_2}{\operatorname{sh}R_1}|\Gamma(1/2+\mu+ib_2)|^2\,\varphi_{11}^0(b_1R_0,b_1r),\ \sigma_3=1, \qquad (25)$$

$$V_{\mu,2}(r,\beta)=c_{21,2}b_3[-\delta_{11}(b_1R_0,b_1R_1)f^{\mu,1}_{\nu_2;22}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}r)+\delta_{21}(b_1R_0,b_1R_1)f^{\mu,1}_{\nu_2;12}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}r)],$$

$$V_{\mu,3}(r,\beta)=b_3\omega_{\mu,1}(\beta)\cos b_3(r-R_2)-\omega_{\mu,2}(\beta)\sin b_3(r-R_2),\ \sigma_2=\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{1}{a_2^2\operatorname{sh}R_2},$$

$$\Omega_{(\mu)}(\beta)=\beta[b_3(\beta)]^{-1}(b_3^2\omega_{\mu,1}^2+\omega_{\mu,2}^2)^{-1},\ \sigma_1=\frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}}\frac{\operatorname{sh}R_1}{\operatorname{sh}R_2}\frac{1}{a_1^2},$$

$$\varphi_{11}^0(b_1R_0,b_1r)\Big|_{R_0=0}=[v_{11}^{01}(b_1R_0)\sin b_1r-v_{11}^{02}(b_1R_0)\cos b_1r]\Big|_{R_0=0}=\tilde{\beta}_{11}^0\sin b_1r-\tilde{\alpha}_{11}^0\cos b_1r.$$

Аналогічно одержуємо, що

$$W_{\mu,1j}(t,r)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}q_{\mu}(\beta)V_{\mu,j}(r,\beta)e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta,\ j=\overline{1,3}, \qquad (26)$$

$$q_{\mu}(\beta)=\frac{2}{\pi^2}c_{11,1}c_{11,2}b_1b_3|\Gamma(1/2+\mu+ib_2)|^2\operatorname{ch}\pi b_2:\operatorname{sh}R_2,$$

$$\mathrm{R}^j_{\mu;1k}(t,r,\rho)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\left[\frac{a_k^2\overline{\sigma}_k}{c_{11,k}}\left(\tilde{\alpha}_{22}^k\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{22}^k\right)V_{\mu,k+1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k}\right]\times$$

$$\times V_{\mu,j}(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta,\ k=1,2,\ j=\overline{1,3}. \qquad (27)$$

$$\mathrm{R}^j_{\mu;2k}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\left[\frac{a_k^2\overline{\sigma}_k}{c_{11,k}}\left(\tilde{\alpha}_{12}^k\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{12}^k\right)V_{\mu,k+1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k}\right]\times$$

$$\times V_{\mu,j}(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta,\ \overline{\sigma}_k=\begin{cases}\sigma_k, & k=1,\\ \sigma_k\cdot\operatorname{sh}R_2, & k=2.\end{cases} \qquad (28)$$

Формули (23) набувають розрахункового вигляду:

$$u_j(t,r)=\int_0^t W_{\mu,1j}(t-\tau,r)\omega_0(\tau)d\tau+W_{\mu,1j}(t,r)\psi_{11}^0+\sum_{m,k=1}^{2}\int_0^t \mathrm{R}^j_{\mu;mk}(t-\tau,r)\omega_{mk}(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{m,k=1}^{2}\mathrm{R}^j_{\mu;mk}(t,r)\psi_{km}+\int_0^t\int_0^{R_1}G_{\mu,j1}(t-\tau,r,\rho)[f_1(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_1(\rho)]\sigma_1 d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{R_1}^{R_2}G_{\mu,j2}(t-\tau,r,\rho)[f_2(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_2(\rho)]\sigma_2\operatorname{sh}\rho d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{R_2}^{\infty}G_{\mu,j3}(t-\tau,r,\rho)[f_3(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_3(\rho)]\sigma_3 d\rho d\tau,\ j=\overline{1,3}. \qquad (29)$$

За відомими функціями $f=\{f_1; f_2; f_3\}$, $g=\{g_1; g_2; g_3\}$, $\omega_0(t)$ та $\omega_{jk}(t)$ вектор-функція $u(t,r)=\{u_1(t,r); u_2(t,r); u_3(t,r)\}$ описує однозначно процес поширення тепла в даному трискладовому середовищі з м'якими межами.

Література

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. Ленюк М.П., Шинкарик Н.И. Гибридные интегральные преобразования Лежандра. – Львов, 1989. – 60 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т прикл. проблем механики и математики).
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
5. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
6. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. – Тернопіль: Економ. думка, 2004. – 368 с.

М.П.Ленюк, В.В.Мороз

МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В КУСКОВО-ОДНОРІДНІЙ КІЛЬЧАСТІЙ ЦИЛІНДРИЧНО-АНІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНІ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ-ФУР'Є

Розглянемо вільну від зовнішніх навантажень пластину

$$\Pi_1=\{r: r\in(R_0,R_1)\cup(R_1,R_2);\ R_0>0,\ R_2\equiv R<\infty\}$$

з м'якими (по відношенню до відбиття хвиль) межами, яка володіє циліндричною анізотропією у відношенні до її теплових і пружних властивостей.

В рамках феноменологічної теорії теплопровідності задача про структуру нестаціонарного температурного поля в пластині Π_1 приводить до побудови обмеженого в області $D_1=\{(t,r): t\geq 0,\ r\in\Pi_1\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь в частинних похідних параболічного типу [1, 2]

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_1^2-a_1^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2\alpha_1+1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]T_1(t,r)=f_1(t,r),\ r\in(R_0,R_1),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_2^2-a_2^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right]T_2(t,r)=f_2(t,r),\ r\in(R_1,R_2) \qquad (1)$$

за початковими умовами

$$T_j(t,r)|_{t=0}=g_j(r),\ r\in(R_{j-1},R_j),\ j=1,2, \qquad (2)$$

крайовими умовами

$$L_{11}^0[T_1]\Big|_{r=R_0}=\omega_0(t),\ L_{22}^2[T_2]\Big|_{r=R_2}=\omega_2(t) \qquad (3)$$

та умовами спряження

$$\left(L_{j1}^1[T_1]-L_{j2}^1[T_2]\right)\Big|_{r=R_1}=\omega_{j1}(t),\ j=1,2. \qquad (4)$$

У рівностях (3), (4) беруть участь диференціальні оператори

$$L_{jk}^m=\left(\alpha_{jk}^m+\delta_{jk}^m\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{jk}^m+\gamma_{jk}^m\frac{\partial}{\partial t},\ j,k=1,2;\ m=0,1,2.$$

Ми вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $\gamma_j^2\ge 0$, $a_j^2>0$, $2\alpha_1+1\ge 0$, $\alpha_{11}^0\le 0$, $\beta_{11}^0\ge 0$, $|\alpha_{11}^0|+\beta_{11}^0\ne 0$, $\alpha_{22}^2\ge 0$, $\beta_{22}^2\ge 0$, $\alpha_{22}^2+\beta_{22}^2\ne 0$, $c_{11,1}c_{21,1}>0$, $c_{j1,1}=\alpha_{2j}^1\beta_{1j}^1-\alpha_{1j}^1\beta_{2j}^1$, $\delta_{2j}^1\gamma_{1j}^1-\delta_{1j}^1\gamma_{2j}^1\equiv c_{j1,2}=0$, $\alpha_{1j}^k\gamma_{2j}^k-\alpha_{2j}^k\gamma_{1j}^k=\beta_{1j}^k\delta_{2j}^k-\beta_{2j}^k\delta_{1j}^k$.

Припустимо, що шукані й задані функції є оригіналами Лапласа стосовно t [3]. У зображенні за Лапласом задачі (1) – (4) відповідає крайова задача: побудувати обмежений на множині Π_1 розв'язок сепаратної системи модифікованих диференціальних рівнянь Бесселя та Фур'є

$$\left(B_{\alpha_1,\alpha_1}-q_1^2\right)T_1^*(p,r)\equiv\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2\alpha_1+1}{r}\frac{d}{dr}-q_1^2\right)T_1^*(p,r)=-F_1^*(p,r),\ r\in(R_0,R_1),$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-q_2^2\right)T_2^*(p,r)=-F_2^*(p,r),\ r\in(R_1,R_2) \qquad (5)$$

за крайовими умовами

$$\left(\overline{\alpha}_{11}^0\frac{d}{dr}+\overline{\beta}_{11}^0\right)T_1^*\Big|_{r=R_0}=\overline{\omega}_0^*(p),\ \left(\overline{\alpha}_{22}^2\frac{d}{dr}+\overline{\beta}_{22}^2\right)T_2^*\Big|_{r=R_2}=\overline{\omega}_2^*(p) \qquad (6)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\overline{\alpha}_{j1}^1\frac{d}{dr}+\overline{\beta}_{j1}^1\right)T_1^*(p,r)-\left(\overline{\alpha}_{j2}^1\frac{d}{dr}+\overline{\beta}_{j2}^1\right)T_2^*(p,r)\right]\Big|_{r=R_1}=\overline{\omega}_{j1}^*(p),\ j=1,2. \qquad (7)$$

У рівностях (5) – (7) прийняті позначення:

$$T_j^*(p,r)=\int_0^\infty T_j(t,r)e^{-pt}dt,\ F_j^*(p,r)=a_j^{-2}(f_j^*(p,r)+g_j(r)),\ f_j^*(p,r)=\int_0^\infty f_j(t,r)e^{-pt}dt,$$

$$\overline{\alpha}_{jm}^k=\alpha_{jm}^k+\delta_{jm}^k p,\ \overline{\beta}_{jm}^k=\beta_{jm}^k+\gamma_{jm}^k p,\ \overline{\omega}_0^*(p)=\omega_0^*(p)+\delta_{11}^0 g_1'(R_0)+\gamma_{11}^0 g_1(R_0),$$

$$\overline{\omega}_2^*(p)=\omega_2^*(p)+\delta_{22}^2 g_2'(R_2)+\gamma_{22}^2 g_2(R_2),\ \overline{\omega}_{j1}^*(p)=\omega_{j1}^*(p)+\delta_{j1}^1 g_1'(R_1)+\gamma_{j1}^1 g_1(R_1)-$$

$$-(\delta_{j2}^1 g_2'(R_1)+\gamma_{j2}^1 g_2(R_1)),\ \omega_{j1}^*(p)=\int_0^\infty\omega_{j1}(t)e^{-pt}dt,\ \omega_m^*(p)=\int_0^\infty\omega_m(t)e^{-pt}dt,$$

$$q_j=a_j^{-1}(p+\gamma_j^2)^{1/2},\ a_j>0,\ \gamma_j^2\ge 0,\ j=1,2.$$

Фундаментальну систему розв'язків для модифікованого рівняння Бесселя $(B_{\alpha_1,\alpha_1}-q_1^2)v=0$ утворюють модифіковані функції Бесселя першого роду $I_{\alpha_1,\alpha_1}(q_1r)$ та другого роду $K_{\alpha_1,\alpha_1}(q_1r)$ [4]; фундаментальну систему розв'язків для модифікованого диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2-q_2^2)v=0$ утворюють функції $v_1=\mathrm{ch}\,q_2r$ та $v_2=\mathrm{sh}\,q_2r$ [5].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє будувати загальний розв'язок крайової задачі (5) – (7) методом функцій Коші [5]:

$$T_1^*(p,r)=A_1I_{\alpha_1,\alpha_1}(q_1r)+B_1K_{\alpha_1,\alpha_1}(q_1r)+\int_{R_0}^{R_1}E_1^*(p,r,\rho)F_1^*(p,\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho,$$

$$T_2^*(p,r)=A_2\mathrm{ch}q_2r+B_2\mathrm{sh}q_2r+\int_{R_1}^{R_1}E_2^*(p,r,\rho)F_2^*(p,\rho)d\rho. \qquad (8)$$

У рівностях (7) $E_j^*(p,r,\rho)$ – функції Коші [5, 6].

Визначимо функції:

$$U_{\alpha_1,\alpha_1;j1}^{m1}(q_1R_m)=\overline{\beta}_{j1}^m I_{\alpha_1,\alpha_1}(q_1R_m)+\overline{\alpha}_{j1}^m q_1^2R_mI_{\alpha_1+1,\alpha_1+1}(q_1R_m),$$

$$U_{\alpha_1,\alpha_1;j1}^{m2}(q_1R_m)=\overline{\beta}_{j1}^m K_{\alpha_1,\alpha_1}(q_1R_m)-\overline{\alpha}_{j1}^m q_1^2R_mK_{\alpha_1+1,\alpha_1+1}(q_1R_m),$$

$$\Psi_{\alpha_1,\alpha_1;j1}^{m*}(q_1R_m,q_1r)=U_{\alpha_1,\alpha_1;j1}^{m1}(q_1R_m)K_{\alpha_1,\alpha_1}(q_1r)-U_{\alpha_1,\alpha_1;j1}^{m2}(q_1R_m)I_{\alpha_1,\alpha_1}(q_1r),\ j=1,2,$$

$$\Delta_{\alpha_1;j1}(q_1R_0,q_1R_1)=U_{\alpha_1,\alpha_1;11}^{01}(q_1R_0)U_{\alpha_1,\alpha_1;j1}^{12}(q_1R_1)-U_{\alpha_1,\alpha_1;11}^{02}(q_1R_0)U_{\alpha_1,\alpha_1;j1}^{11}(q_1R_1).$$

Безпосередньо перевіряється, що функція Коші

$$E_1^*(p,r,\rho)=\frac{q_1^{2\alpha_1}}{\Delta_{\alpha_1;11}}\begin{cases}\Psi_{\alpha_1,\alpha_1;11}^{0*}(q_1R_0,q_1r)\Psi_{\alpha_1,\alpha_1;11}^{1*}(q_1R_1,q_1\rho), & R_0<r<\rho<R_1,\\ \Psi_{\alpha_1,\alpha_1;11}^{0*}(q_1R_0,q_1\rho)\Psi_{\alpha_1,\alpha_1;11}^{1*}(q_1R_1,q_1r), & R_0<\rho<r<R_1.\end{cases} \qquad (9)$$

Введемо до розгляду функції:

$$V_{j2}^{m1}(q_2R_m)\equiv\left(\alpha_{j2}^m\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^m\right)\mathrm{ch}q_2r\Big|_{r=R_m}=\alpha_{j2}^m q_2\mathrm{sh}q_2R_m+\beta_{j2}^m\mathrm{ch}q_2R_m,$$

$$V_{j2}^{m2}(q_2R_m) \equiv \left(\alpha_{j2}^{m}\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^{m}\right)\mathrm{sh}q_2r\Big|_{r=R_m} = \alpha_{j2}^{m}q_2\mathrm{ch}q_2R_m+\beta_{j2}^{m}\mathrm{sh}q_2R_m,$$

$$\Delta_{j2}(q_2R_1,q_2R_2)=V_{j2}^{11}(q_2R_1)V_{22}^{22}(q_2R_2)-V_{j2}^{12}(q_2R_1)V_{22}^{21}(q_2R_2),\ j=1,2;$$

$$\Phi_{j2}^{m}(q_2R_m,q_2r)=V_{j2}^{m2}(q_2R_m)\mathrm{ch}q_2r-V_{j2}^{m1}(q_2R_m)\mathrm{sh}q_2r.$$

Безпосередньо перевіряється, що функція Коші

$$E_2^*(p,r,\rho)=-\frac{1}{q_2\Delta_{12}}\begin{cases}\Phi_{12}^{1}(q_2R_1,q_2r)\Phi_{22}^{2}(q_2R_2,q_2\rho), & R_1<r<\rho<R_2,\\ \Phi_{12}^{1}(q_2R_1,q_2\rho)\Phi_{22}^{2}(q_2R_2,q_2r), & R_1<\rho<r<R_2.\end{cases} \tag{10}$$

Повернемося до формул (8). Умови спряження (7) та крайові умови (6) для визначення величин A_j, B_j (j = 1, 2) дають алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$U_{\alpha_1,\alpha_1;11}^{01}(q_1R_0)A_1+U_{\alpha_1,\alpha_1;11}^{02}(q_1R_0)B_1=\overline{\omega}_0^*(p),$$

$$U_{\alpha_1,\alpha_1;11}^{11}(q_1R_1)A_1+U_{\alpha_1,\alpha_1;11}^{12}(q_1R_1)B_1-V_{12}^{11}(q_2R_1)A_2-V_{12}^{12}(q_2R_1)B_2=\overline{\omega}_{11}^*(p),$$

$$U_{\alpha_1,\alpha_1;21}^{11}(q_1R_1)A_1+U_{\alpha_1,\alpha_1;21}^{12}(q_1R_1)B_1-V_{22}^{11}(q_2R_1)A_2-V_{22}^{12}(q_2R_1)B_2=\overline{\omega}_{21}^*(p)+G_{12}^*,$$

$$V_{22}^{21}(q_2R_2)A_2+V_{22}^{22}(q_2R_2)B_2=\overline{\omega}_2^*(p). \tag{11}$$

У системі (14) бере участь функція:

$$G_{12}^*=\frac{c_{11}^*(p)}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int_{R_0}^{R_1}\frac{\Phi_{\alpha_1,\alpha_1;11}^{0*}(q_1R_0,q_1\rho)}{\Delta_{\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1R_1)}g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho+c_{21}^*(p)\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi_{22}^{2}(q_2R_2,q_2\rho)}{\Delta_{12}(q_2R_1,q_2R_2)}g_2(\rho)d\rho.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності даної температурної задачі: для $p=\sigma+is$ з $\mathrm{Re}p=\sigma>\sigma_0$, де σ_0 – абсциса збіжності інтеграла Лапласа, та $\mathrm{Im}p=s\in(-\infty,\infty)$ визначник алгебраїчної системи (11)

$$\Delta_{\alpha_1}^*(p)\equiv\Delta_{\alpha_1;21}(q_1R_0,q_1R_1)\Delta_{12}(q_2R_1,q_2R_2)-$$
$$-\Delta_{\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1R_1)\Delta_{22}(q_2R_1,q_2R_2)\neq 0. \tag{12}$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (5) – (7):

1) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W_{\alpha_1;11}^*(p,r)=\frac{1}{\Delta_{\alpha_1}^*(p)}[\Delta_{22}(q_2R_1,q_2R_2)\Psi_{\alpha_1,\alpha_1;11}^{1*}(q_1R_1,q_1r)-$$
$$-\Delta_{12}(q_2R_1,q_2R_2)\Psi_{\alpha_1,\alpha_1;21}^{1*}(q_1R_1,q_1r)],$$

$$W_{\alpha_1;21}^*(p,r)=\frac{c_{21}^*q_2}{\Delta_{\alpha_1}^*(p)}\Psi_{\alpha_1,\alpha_1;11}^{0*}(q_1R_0,q_1r); \tag{13}$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r=R_2$ функції Гріна

$$W_{\alpha_1;12}^*(p,r)=-\frac{c_{11}^*(p)}{q_1^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{\alpha_1}^*(p)}\Phi_{22}^{2}(q_2R_2,q_2r),$$

$$W_{\alpha_1;22}^*(p,r)=\frac{1}{\Delta_{\alpha_1}^*(p)}[\Delta_{\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1R_1)\Phi_{22}^{1}(q_2R_1,q_2r)-$$
$$-\Delta_{\alpha_1;21}(q_1R_0,q_1R_1)\Phi_{12}^{1}(q_2R_1,q_2r)]; \tag{14}$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathrm{R}_{\alpha_1;11}^{1*}(p,r)=-\frac{\Delta_{22}}{\Delta_{\alpha_1}^*(p)}\Psi_{\alpha_1,\alpha_1;11}^{0*}(q_1R_0,q_1r),\ \mathrm{R}_{\alpha_1;21}^{1*}(p,r)=\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{\alpha_1}^*(p)}\Psi_{\alpha_1,\alpha_1;11}^{0*}(q_1R_0,q_1r),$$

$$\mathrm{R}_{\alpha_1;11}^{2*}(p,r)=-\frac{\Delta_{\alpha_1;21}}{\Delta_{\alpha_1}^*(p)}\Phi_{22}^{2}(q_2R_2,q_2r),\ \mathrm{R}_{\alpha_1;21}^{2*}(p,r)=\frac{\Delta_{\alpha_1;11}}{\Delta_{\alpha_1}^*(p)}\Phi_{22}^{2}(q_2R_2,q_2r); \tag{15}$$

4) породжені неоднорідністю системи (5) функції впливу

$$\mathrm{H}_{\alpha_1;11}^*(p,r,\rho)=-q_1^{2\alpha_1}\begin{cases}\Psi_{\alpha_1,\alpha_1;11}^{0*}(q_1R_0,q_1r)W_{\alpha_1;11}^*(p,\rho), & R_0<r<\rho<R_1,\\ \Psi_{\alpha_1,\alpha_1;11}^{0*}(q_1R_0,q_1\rho)W_{\alpha_1;11}^*(p,r), & R_0<\rho<r<R_1,\end{cases}$$

$$\mathrm{H}_{\mu;12}^*(p,r,\rho)=\frac{c_{21}^*(p)}{\Delta_{\alpha_1}^*(p)}\Psi_{\alpha_1,\alpha_1;11}^{0*}(q_1R_0,q_1r)\Phi_{22}^{2}(q_2R_2,q_2\rho),$$

$$\mathrm{H}_{\mu;21}^*(p,r,\rho)=\frac{c_{11}^*(p)}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{\alpha_1}^*(p)}\Psi_{\alpha_1,\alpha_1;11}^{0*}(q_1R_0,q_1\rho)\Phi_{22}^{2}(q_2R_2,q_2r), \tag{16}$$

$$\mathrm{H}_{\mu;22}^*(p,r,\rho)=\frac{1}{q_2}\begin{cases}W_{\alpha_1;22}^*(p,r)\Phi_{22}^{2}(q_2R_2,q_2\rho), & R_1<r<\rho<R_2,\\ W_{\alpha_1;22}^*(p,\rho)\Phi_{22}^{2}(q_2R_2,q_2r), & R_1<\rho<r<R_2.\end{cases}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (11), підстановки одержаних значень A_j, B_j (j = 1, 2) у формули (8) та низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок крайової задачі (5) – (7):

$$T_j^*(p,r)=W_{\alpha_1;1j}^*(p,r)\overline{\omega}_0^*(p)+W_{\alpha_1;2j}^*(p,r)\overline{\omega}_2^*(p)+\mathrm{R}_{\alpha_1;11}^{j*}(p,r)\overline{\omega}_{11}^*(p)+$$
$$+\mathrm{R}_{\alpha_1;21}^{j*}(p,r)\overline{\omega}_{21}^*(p)+\int_{R_0}^{R_1}\mathrm{H}_{\alpha_1;j1}^*(p,r,\rho)F_1^*(p,\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho+$$
$$+\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{H}_{\alpha_1;j2}^*(p,r,\rho)F_2^*(p,\rho)d\rho,\ j=1,2. \tag{17}$$

Зауважимо, що можна вважати $\varphi_{11}^0\equiv\delta_{11}^0g_1'(R_0)+\gamma_{11}^0g_1(R_0)=0$, $\varphi_{22}^2\equiv\delta_{22}^2g_2'(R_2)+\gamma_{22}^2g_2(R_2)=0$, $\varphi_{j1}^1\equiv\delta_{j1}^1g_1'(R_1)+\gamma_{j1}^1g_1(R_1)-$ $-[\delta_{j2}^1g_2'(R_1)+\gamma_{j2}^1g_2(R_1)]=0$.

Якщо не так, то покладемо $g_j(r)=z_j(r)+a_jr+b_j$ й величини a_j, b_j (j = 1, 2) визначимо із алгебраїчної системи рівнянь:

$$(\delta_{11}^0+\gamma_{11}^0R_0)a_1+\gamma_{11}^0b_1=\varphi_{11}^0,$$

$$(\delta_{j1}^1+\gamma_{j1}^1R_1)a_1+\gamma_{j1}^1b_1-[(\delta_{j2}^1+R_1\gamma_{j2}^1)a_2+\gamma_{j2}^1b_2]=\varphi_{j1}^1,\ j=1,2, \tag{18}$$

$$(\delta_{22}^2+\gamma_{22}^2R_2)a_2+\gamma_{22}^2b_2=\varphi_{22}^2 .$$

Очевидно, що алгебраїчна система (18) сумісна.

Повертаючись в рівностях (17) до оригіналу, одержуємо єдиний розв'язок температурної задачі (1) – (4):

$$T_j(t,r)=\int_0^t W_{\alpha_1:1j}(t-\tau,r)\overline{\omega}_0(\tau)d\tau+\int_0^t W_{\alpha_1:2j}(t-\tau,r)\overline{\omega}_2(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t \mathsf{R}^j_{\alpha_1:11}(t-\tau,r)\overline{\omega}_{11}(\tau)d\tau+\int_0^t \mathsf{R}^j_{\alpha_1:21}(t-\tau,r)\overline{\omega}_{21}(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{R_0}^{R_1}\mathrm{H}_{\alpha_1:j1}(t-\tau,r,\rho)F_1(\tau,\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho d\tau+\int_0^t\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{H}_{\alpha_1:j2}(t-\tau,r,\rho)F_2(\tau,\rho)d\rho d\tau . \quad (19)$$

Тут за означенням [3] беруть участь функції:

$$W_{\alpha_1:kj}(t,r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}W^*_{\alpha_1:kj}(p,r)e^{pt}dp\,,\ k,j=1,2; \quad (20)$$

$$\mathsf{R}^j_{\alpha_1:k1}(t,r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\mathsf{R}^{j*}_{\alpha_1:k1}(p,r)e^{pt}dp\,,\ k=1,2,\ j=1,2. \quad (21)$$

$$\mathrm{H}_{\alpha_1:jk}(t,r,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\mathrm{H}^*_{\alpha_1:jk}(p,r,\rho)e^{pt}dp\,,\ j,k=1,2. \quad (22)$$

Подамо зручний для використання вигляд формул (20) – (22).

Особливими точками функцій Гріна $W^*_{\alpha_1;kj}(p,\ r)$, $\mathsf{R}^{j*}_{\alpha_1:k1}(p,\ r)$ та функцій впливу $\mathrm{H}^*_{\alpha_1:jk}(p,\ r,\ \rho)$ є точки галуження $p=-\gamma_1^2$, $p=-\gamma_2^2$ та $p=\infty$ [3]. Покладемо $q_j=ib_j$, $b_j=a_j^{-1}(\beta^2+k_j^2)^{1/2}$, $\gamma^2=\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2\}$, $k_j^2=\gamma^2-\gamma_j^2$, $j=1,2$. Тоді $p=-(\beta^2+\gamma^2)$, $dp=-2\beta\,d\beta$.

Скористаємося формулами обходу для модифікованих функцій Бесселя та Фур'є [7]:

$$I_{\nu,\alpha}(ib_jR_m)=e^{\frac{\pi i}{2}(\nu-\alpha)}J_{\nu,\alpha}(b_jR_m),\ \widetilde{\beta}^m_{jk}=\beta^m_{jk}-(\beta^2+\gamma^2)\gamma^m_{jk},\ \widetilde{\alpha}^m_{jk}=\alpha^m_{jk}-(\beta^2+\gamma^2)\delta^m_{jk};$$

$$K_{\nu,\alpha}(ib_jR_m)=-\frac{\pi i}{2}e^{-\frac{\pi i}{2}(\nu+\alpha)}[J_{\nu,\alpha}(b_jR_m)-iN_{\nu,\alpha}(b_jR_m)],$$

$$U^{m2}_{\alpha_1,\alpha_1:jk}(ib_1R_m)=-\frac{\pi i}{2}e^{-\pi\alpha_1 i}[u^{m1}_{\alpha_1,\alpha_1:jk}(b_1R_m)-iu^{m2}_{\alpha_1,\alpha_1;jk}(b_1R_m)];$$

$$u^{m2}_{\alpha_1,\alpha_1;jk}(b_1R_m)=\widetilde{\beta}^m_{jk}N_{\alpha_1,\alpha_1}(b_1R_m)-\widetilde{\alpha}^m_{jk}b_1^2R_mN_{\alpha_1+1,\alpha_1+1}(b_1R_m);\ \Delta_{\alpha_1:j1}(ib_1R_0,ib_1R_1)=$$

$$=-\frac{\pi}{2}e^{-\pi\alpha_1 i}[u^{01}_{\alpha_1,\alpha_1:11}(b_1R_0)u^{12}_{\alpha_1,\alpha_1:j1}(b_1R_1)-u^{02}_{\alpha_1,\alpha_1;11}(b_1R_0)u^{11}_{\alpha_1,\alpha_1:j1}(b_1R_1)]\equiv$$

$$\equiv-\frac{\pi}{2}e^{-\pi\alpha_1 i}\delta_{\alpha_1,j1}(b_1R_0,b_1R_1);\ \Psi^{m*}_{\alpha_1,\alpha_1:j1}(ib_{1n}R_m,ib_{1n}r)=$$

$$=-\frac{\pi}{2}e^{-\pi\alpha_1 i}[u^{m1}_{\alpha_1,\alpha_1:j1}(b_{1n}R_m)N_{\alpha_1,\alpha_1}(b_{1n}r)-u^{m2}_{\alpha_1,\alpha_1:j1}(b_{1n}R_m)J_{\alpha_1,\alpha_1}(b_{1n}r)]\equiv$$

$$\equiv-\frac{\pi}{2}e^{-\pi\alpha_1 i}\Psi^m_{\alpha_1,\alpha_1;j1}(b_{1n}R_m,b_{1n}r);$$

$$V^{m1}_{jk}(ib_2R_m)=-\widetilde{\alpha}^m_{jk}b_2\sin b_2R_m+\widetilde{\beta}^m_{jk}\cos b_2R_m\equiv v^{m1}_{jk}(b_2R_m),$$

$$V^{m2}_{jk}(ib_2R_m)=i(\widetilde{\alpha}^m_{jk}b_2\cos b_2R_m+\widetilde{\beta}^m_{jk}\sin b_2R_m)\equiv iv^{m2}_{jk}(b_2R_m),$$

$$\Delta_{j2}(ib_2R_1,ib_2R_2)=i[v^{11}_{j2}(b_2R_1)v^{22}_{22}(b_2R_2)-v^{12}_{j2}(b_2R_1)v^{21}_{22}(b_2R_2)]\equiv i\delta_{j2}(b_2R_1,b_2R_2),$$

$$\Delta^*_{\alpha_1}(e^{\pi i}(\beta^2+\gamma^2))=-\frac{\pi}{2}ie^{-\pi\alpha_1 i}[\delta_{\alpha_1;21}\delta_{12}-\delta_{\alpha_1;11}\delta_{22}]\equiv-\frac{\pi i}{2}e^{-\pi\alpha_1 i}\delta_{\alpha_1}(\beta),$$

$$\Phi^m_{jk}(ib_2R_m,ib_2r)\equiv i\varphi^m_{jk}(b_2R_m,b_2r)=i[v^{m2}_{jk}(b_2R_m)\cos b_2r-v^{m1}_{jk}(b_2R_m)\sin b_2r].$$

Якщо б $\delta_{\alpha_1}(\beta)\neq 0$, то функції $W_{\alpha_1:kj}\equiv 0$, $\mathsf{R}^j_{\alpha_1:k1}\equiv 0$, $\mathrm{H}_{\alpha_1:jk}\equiv 0$. Згідно формули (19) $T_j(t,\ r)\equiv 0$, що неможливо.

Отже, ми приходимо до трансцендентного рівняння $\delta_{\alpha_1}(\beta)=0$, корені β_n якого утворюють дискретний спектр.

Введемо до розгляду функції:

$$V_{\alpha_1,1}(r,\beta_n)=u^{01}_{\alpha_1,\alpha_1;11}(b_{1n}R_0)N_{\alpha_1,\alpha_1}(b_{1n}r)-u^{02}_{\alpha_1,\alpha_1;11}(b_{1n}R_0)J_{\alpha_1,\alpha_1}(b_{1n}r)$$

$$V_{\alpha_1,2}(r,\beta_n)=\delta_{\alpha_1;11}(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1)\,[\delta_{12}(b_{2n}R_1,b_{2n}R_2)]^{-1}\varphi_{22}(b_{2n}R_2,b_{2n}r),b_{jn}=a_j^{-1}\left(\beta_n^2+k_j^2\right)^{1/2},$$

$$V_{\alpha_1}(r,\ \beta_n)=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)V_{\alpha_1,1}(r,\ \beta_n)+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)V_{\alpha_1,2}(r,\ \beta_n),$$

$$\sigma(r)=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sigma_1r^{2\alpha_1+1}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2,\ \sigma_1=\frac{c_{11,1}}{c_{21,1}}\frac{a_1^{-2}}{R_1^{2\alpha_1+1}},\ \sigma_2=\frac{1}{a_2^2}.$$

За узагальненою теоремою розвинення [3] знаходимо:

$$\mathrm{H}_{\alpha_1;jk}(t,r,\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}\frac{V_{\alpha_1,j}(r,\beta_n)V_{\alpha_1,k}(\rho,\beta_n)}{\|V_{\alpha_1}(r,\beta_n)\|_1^2}\sigma_ka_k^2\,,\ j,k=1,2. \quad (23)$$

У формулі (23) бере участь узагальнений квадрат норми власної функції:

$$\|V_{\alpha_1}(r,\beta_n)\|_1^2=\frac{2i}{\pi}\frac{\delta_{\alpha_1:11}(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1)}{\delta_{12}(b_{2n}R_1,b_{2n}R_2)c_{21,1}}e^{\pi\alpha_1 i}\left[\frac{d}{dp}\Delta^*_{\alpha_1}(p)\right]\Bigg|_{p=(\beta_n^2+\gamma^2)\exp(\pi i)} \quad (24)$$

Аналогічно одержуємо:

$$W_{\alpha_1:1j}(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}R_0^{2\alpha_1+1}(-\widetilde{\alpha}^0_{11})^{-1}\frac{V_{\alpha_1,1}(R_0,\beta_n)V_{\alpha_1,j}(\rho,\beta_n)}{\|V_{\alpha_1}(r,\beta_n)\|_1^2}\sigma_1a_1^2\,, \quad (25)$$

$$W_{\alpha_1;2j}(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}(\bar{\alpha}_{22}^2)^{-1}\frac{V_{\alpha_1,2}(R_2,\beta_n)V_{\alpha_1,j}(\rho,\beta_n)}{\left\|V_{\alpha_1}(r,\beta_n)\right\|_1^2}\sigma_2 a_2^2, \qquad (26)$$

$$\mathrm{R}^j_{\alpha_1;11}(t,r) = -\frac{1}{c_{21,1}}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}\frac{Z^1_{\alpha_1;22}(\beta_n)V_{\alpha_1,j}(r,\beta_n)}{\left\|V_{\alpha_1}(r,\beta_n)\right\|_1^2}, j=1,2, \qquad (27)$$

$$\mathrm{R}^j_{\alpha_1;21}(t,r) = \frac{1}{c_{21,1}}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}\frac{Z^1_{\alpha_1;12}(\beta_n)V_{\alpha_1,j}(r,\beta_n)}{\left\|V_{\alpha_1}(r,\beta_n)\right\|_1^2}, \qquad (28)$$

$$Z^1_{\alpha_1;m2}(\beta_n) = \left(\bar{\alpha}^1_{m2}\frac{d}{dr}+\bar{\beta}^1_{m2}\right)V_{\alpha_2,2}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_1}, \; m=1,2.$$

З цим формули (19) стають розрахунковими. При відомих функціях $f_j(t, r)$, $g_j(r)$, $\omega_0(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_{j1}(t)$ структура температурного поля в даному середовищі стає відомою.

Очевидно, що при $\delta^m_{jk} = 0$, $\gamma^m_{jk} = 0$ маємо розв'язок параболічної задачі на спряження для випадку, коли границя середовища жорстка по відношенню до відбиття хвиль.

Аналіз виразу для узагальненого квадрата норми подамо в іншій роботі.

Одержаний в роботі результат без залучення нових ідей розповсюджується на випадок будь-якого скінченного числа точок спряження.

Література

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
2. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. – К.: Наук. думка, 1976. – 310 с.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
4. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. – Киев, 1983. – 62 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
6. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: наука, 1971. – 1108 с.

М.П.Ленюк, Г.Я.Стонень

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ-ФУР'Є-ЕЙЛЕРА НА ПОЛЯРНІЙ ВІСІ $R \geq R_0 > 0$

Розглянемо задачу про конструкцію обмеженого на множині $I_2^+ = \{r: r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty), R_0 > 0\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Бесселя, Фур'є та Ейлера

$$\begin{aligned}&(B_{\nu,\alpha_1} - q_1^2)u_1(r) = -g_1(r),\; r \in (R_0, R_1),\\ &(d^2/dr^2 - q_2^2)u_2(r) = -g_2(r),\; r \in (R_1, R_2),\\ &(B^*_{\alpha_2} - q_3^2)u_3(r) = -g_3(r),\; r \in (R_2, \infty R_3)\end{aligned} \qquad (1)$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha^0_{11}\frac{d}{dr}+\beta^0_{11}\right)u_1(r)\Big|_{r=R_0} = g_0,\; \lim_{r\to\infty}\left(r^\gamma u_3(r)\right)=0 \qquad (2)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha^k_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^k_{j1}\right)u_k(r) - \left(\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr}+\beta^k_{j2}\right)u_{k+1}(r)\right]_{r=R_k} = \omega_{jk}, j, k=1,2. \qquad (3)$$

У системі (1) беруть участь диференціальні оператори Бесселя $B_{\nu,\alpha_1} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha_1+1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\nu^2-\alpha_1^2}{r^2}$ [1] Ейлера $B^*_{\alpha_2} = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_2+1)r\frac{d}{dr} + \alpha_2^2$ [2], $2\alpha_j + 1 > 0$, $\nu \geq \alpha_1 \geq 1/2$, та Фур'є d^2/dr^2.

Припустимо, що виконані умови на коефіцієнти: $q_j > 0$, $\alpha^0_{11} \leq 0$, $\beta^0_{11} \geq 0$, $|\alpha^0_{11}| + \beta^0_{11} \neq 0$, $\alpha^k_{jm} \geq 0$. $\beta^k_{jm} \geq 0$, $c_{1k}c_{2k} > 0$, $c_{jk} = \alpha^k_{2j}\beta^k_{1j} - \alpha^k_{1j}\beta^k_{2j}$, $j, k = 1, 2$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha_1} - q_1^2)v = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя першого роду $I_{\nu,\alpha_1}(q_1r)$ та другого роду $K_{\nu,\alpha_1}(q_1r)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2 - q_2^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = \mathrm{ch}q_2r$ та $v_2 = \mathrm{sh}q_2r$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_2} - q_3^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha_2-q_3}$ та $v_2 = r^{-\alpha_2+q_3}$ [2].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє будувати загальний розв'язок крайової задачі (1) – (3) методом функцій Коші [2, 3]: