

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТАТИЧНОЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ТИСК ЖОРСТКОГО КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА НА ПІВПРОСТІР З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ**

**Ярецька Наталія,**

к. ф.-м. н., доцент

Хмельницький національний університет,

[iaretskan@gmail.com](mailto:iaretskan@gmail.com)

Дослідження та математичне моделювання процесів контактної взаємодії пружних тіл із врахуванням початкових напружень є частиною великої за обсягом та актуальної області механіки суцільних середовищ, що безперервно розвивається.

Так, у механіці суцільних середовищ велика увага приділяється дослідженню контактної взаємодії твердих деформованих тіл, що пов'язано із проблемою визначення їх напружено-деформованих станів. Оскільки контактні задачі формують теоретичну основу для розрахунків на контактну міцність, жорсткість та зносостійкість рухомих і нерухомих з'єднань, а їх дослідження зводяться до одних із найважчих рівнянь математичної фізики, то їх розв'язання пов'язане із великими математичними труднощами, що вимагає залучення комп'ютерних технологій.

Одним з важливих факторів при контактній взаємодії є вплив початкових напружень, які практично завжди присутні в реальних конструкціях і деталях машин, тому розробка ефективних методів розрахунку напружено-деформованого стану з врахуванням початкових деформацій є актуальною і важливою науково-технічною проблемою.

На даний час з проблем, що мають відношення до контактних задач жорстких штампів, які взаємодіють із пружними тілами отримані результати з широкого кола питань. І вони достатньо відображені у численних публікаціях періодичних видань [1-3]. Роботи з контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями присвячені взаємодії попередньо напружених тіл із жорсткими та пружними штампами без початкових напружень представлені у працях [4]. Існує також ряд інших публікацій, що повністю або частково пов'язані із тематикою даної статті [5-8].

Метою роботи є побудова математичної моделі та представлення розв'язку статичної задачі про тиск жорсткого циліндричного кільцевого штампа на пружний півпростір з початковими напруженнями без врахування сил тертя в

межах лінеаризованої теорії пружності у випадку рівних та нерівних коренів визначального рівняння [2] в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Постановка задачі. Нехай скінченний жорсткий кільцевий штамп з плоскою основою, геометрична вісь симетрії якого співпадає з віссю  $u_3$  циліндричної системи координат, що напрямлена в середину півпростору, втискається у півпростір з силою  $P$ , після виникнення там початкового деформованого стану (рис. 1).  $R_1$ ,  $R_2$  – відповідно внутрішній та зовнішній радіуси штампa. Будемо вважати, що зовнішнє навантаження прикладене тільки до вільного торця пружного штампa, під дією якого всі точки торця штампa переміщуються у напрямку осі симетрії  $u_3$  на одну і ту ж саму величину  $\varepsilon$ . Вважатимемо, що поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а в зоні контакту переміщення та напруження – неперервні.

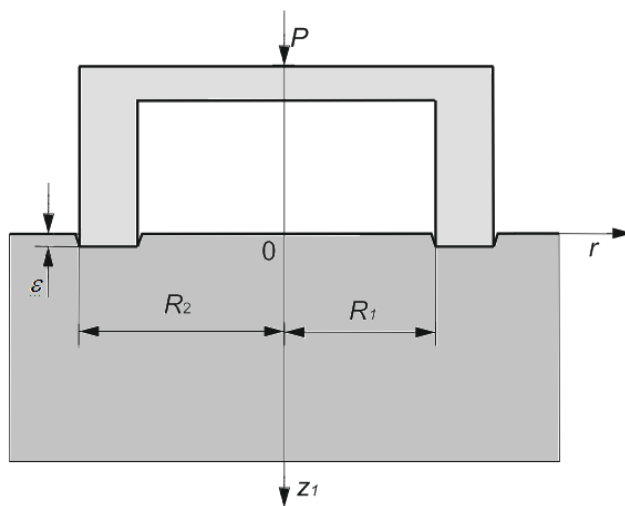


Рис. 1. Тиск жорсткого кільцевого штампa на пружний півпростір з початковими напруженнями

Розрізнятимемо три стани півпростору з початковими напруженнями: природний, коли у ньому відсутні напруження; початковий стан, та збурений стан, всі величини якого складаються з суми відповідних величин початкового стану та збурень. Вважаючи збурення набагато меншими відповідних величин початкового стану, дослідження проводимо в рамках лінеаризованої теорії пружності [1-3, 5].

Для дослідження введемо лагранжеві координати  $(x_1, x_2, x_3)$ , які в початковому стані співпадають з декартовими координатами  $(y_1, y_2, y_3)$ . Вважаємо, що початковий напружено-деформований стан у півпросторі є однорідним, а пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовані функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [2]. Матеріали тіл, що контактують будемо вважати ізотропними стисливими або нестисливими з довільною структурою пружного потенціалу. У випадку ортотропних

матеріалів приймається, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають з напрямками осей координат.

У системі кругових циліндричних координат  $(r, \theta, z_1)$ , де  $z_1 = v_1^{-1} y_3$ ,  $v_1 = n_1^{0.5}$ ,  $n_1 = n_2$  (корені визначального рівняння [2]) такій постановці відповідають граничні умови:

$$U_z = \varepsilon, \quad R_1 < r < R_2 \quad (1)$$

$$Q_{zz} = 0, \quad 0 < r < R_1, \quad R_2 < r < \infty \quad (2)$$

$$Q_{rz} = 0, \quad 0 < r < \infty \quad (3)$$

$$U_z = 0, \quad 0 < r < R_1, \quad R_2 < r < \infty \quad (4)$$

$$Q_{zz} = -\sigma_z^0, \quad R_1 < r < R_2 \quad (5)$$

де  $\sigma_z^0 = 8\varepsilon\omega_3(\pi\sqrt{1-r^2})^{-1}$ , при  $R_1 < r < R_2$  та  $\sigma_z^0 = 0$ , при  $0 < r < R_1$ ,  $R_2 < r < \infty$ ;  $\omega_3 = C_{44}(1+m_1)l_1(s-s_0)$ ,  $s_0 = (1+m_2)(1+m_1)^{-1}$ ,  $s = s_0 l_2 l_1^{-1}$ . Значення коефіцієнтів  $m_k$ ,  $C_{44}$ ,  $l_k$ , ( $k=1, 2$ ) залежать від характеру пружного потенціалу і подані в [2].

Умова рівноваги, що встановлює зв'язок між осіданням торця і рівнодійною навантаження  $P$  має вигляд:

$$P = -2\pi \int_{R_1}^{R_2} r Q_{zz}(0, r) dr \quad (6)$$

Методика розв'язання даної математичної моделі поділяється на два етапи: аналітичний, який висвітлений у працях [9, 10], та чисельний [10, 11].

У статтях [9, 10] з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності представлено розв'язки вісесиметричної задачі про контактну взаємодію жорсткого циліндричного кільцевого штампа на пружний півпростір з початковими напруженнями без врахування сил тертя у випадку нерівних та рівних коренів визначального рівняння [2] в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Також, розроблено алгоритм та комп'ютерну програму [11] для числового обчислення компонент напружено-деформованих станів контактуючих тіл.

В результаті проведеного дослідження, для потенціалів найпростішої структури (Трелоара, Бартенева-Хазановича та гармонічного потенціалу) можна зробити висновок, що вплив початкових напружень на закон розподілу контактних характеристик півпростору на який тисне жорсткий кільцевий штамп є суттєвим і повинен враховуватися при розрахунках на міцність у деталях конструкцій. А розроблений алгоритм числового обчислення компонентів напружено-деформованого стану дозволяє використовувати його при інженерних розрахунках, що значно полегшує складність досліджень. Тому він може безпосередньо використовуватись для дослідження різноманітних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композитних матеріалів при моделюванні технологічного обладнання, деталей машин, колон будівель та іншого. Також, числова реалізація дає змогу графічно відображати вплив початкових напружень на закон розподілу контактних характеристик тіл, для потенціалів найпростішої структури, що значно полегшує візуальну інтерпретацію розв'язку задачі.

#### References:

1. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями : монография. Германия : Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
2. Гузь А.Н., Рудницкий В.Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями : монография. Хмельницький : вид. ПП Мельник, 2006. 710 с.
3. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Рудницкий В.Б. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. / Развитие идей Л.А. Галина в механике : коллективная монография. М.–Ижевск. Институт компьютерных исследований, 2013. 480 с.
4. Babich S.Yu., Guz A.N., Rudnitsky V.B. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches. *Int. Appl. Mech.* 2004. Vol. 40, №7. P. 744-765.
5. Yaretska N. O. Mathematical model and solution of spatial contact problem for prestressed cylindrical punch and elastic layer. / Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences: Collective monograph. Riga, Latvia : "Baltija Publishing", 2022. P. 261-295. <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-200-5-10>
6. Yaretskaya N.A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *Int. Appl. Mech.* 2014. Vol. 50, No 4. P. 378 – 388. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0641-y>
7. Babych S.Y., Yarets'ka N.O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57, No 3. P. 297 – 305. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7>
8. Guz, O.M., Babych, S.Y., Glukhov, A.Y. Axisymmetric Waves in Prestressed Highly Elastic Composite Material. Long Wave Approximation. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57, No 2. P. 134–147. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01068-4>
9. Yaretskaya N.F. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *Int. Appl. Mech.* 2018. Vol. 54, No 5. P. 539 – 543. <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y>
10. Ярецька Н.О., Рамський А.О. Застосування Maple для розв'язання контактної задачі про тиск жорсткого кільцевого штампа на півпростір з початковими напруженнями. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. Херсон: ХНТУ. 2018р. Том. 1, №3(66). с. 199 – 204.
11. А. с. JKS\_PZPN\_RK. Комп'ютерна програма "Розрахунок компонентів напружено-деформованого стану для контактної задачі про тиск жорсткого кільцевого штампа на півпростір з початковими (залишковими) напруженнями" / Н. О. Ярецька. – № 74505 ; заявл. 03.11.2017 ; опубл. 26.01.2018, Бюл. №47, 2018р.