УДК 539.12.17

С.В. МАТНЯК
Хмельницький національний університет

ВЗАЄМОДІЯ НЕМОНОХРОМАТИЧНОЇ СВІТЛОВОЇ ХВИЛІ З ПРОТОНОМ

В роботі розглядається задача взаємодії світлової хвилі з протоном. Обчислюється переріз взаємодії світлової хвилі з протоном при пружній взаємодії (при енергії світлової хвилі меншій 1 MeB). Побудовано графік розподілу перерізу взаємодії від довжини світлової хвилі.

The problem of interaction of light wave with proton is consideren in this work. The cross section of interaction of the light wave with the proton at elastic interaction (when power of the light wave less than 1MeV) is calculated. The graph of distribution of cross section of inreraction depending on the length of the light wave is plotted.

Ключові слова: протон, немонохроматична світлова хвиля, інтегральне перетворення Ханкеля, радіус протона, переріз взаємодії.

Вступ. В роботі розглядається задача взаємодії немонохроматичної хвилі з протоном, який знаходиться у вільному, а не звязаному з другими частинками станні. В роботі [1] розглядається взаємодія немонохроматичної хвилі з звязаним електроном. В роботі [2] розглядається взаємодія фотона з протоном. В цій роботі Р. Фейнман розглядає комтоновське розсіювання в перед і нерелятивіське рівняння Шредінгера без врахування сил Земного тяжіння, які мають значний вплив на пружну взаємодію фотона з протоном.

В роботі [3] розглядається комптоновська взаємодія фотона з електроном, але без врахування сил Земного тяжіння. В роботі ставиться завдання знайти переріз взаємодії світлової хвилі з протоном із врахуванням сил Земного тяжіння.

Постановка задачі. На вільний протон діє немонохпроматична світлова хвиля. Розглядаємо схему сил- які діють на протон при взаємодії з світловою хвилею (рис. 1 і 2): .

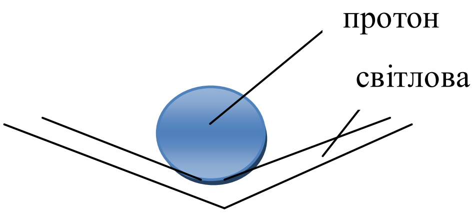

Рис. 1

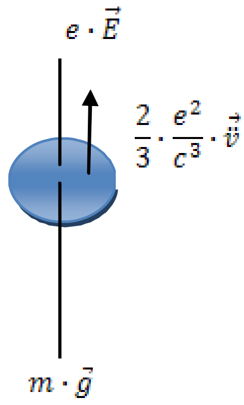

Рис. 2

Розв'язання. Для цього застосовуємо перетворення Ханкеля. Досліджуємо рух протона, під дією зовнішнього електромагнітного поля. Розглянемо розсіювання немонохроматичної світлової хвилі з напруженістю поля $\vec{E}(t)$з протоном. При цих умовах сила $\vec{F}$, яка діє на пртон і входить в рівняння

$$m \cdot \dot{\vec{v}} = \vec{F} + \frac{2 \cdot e^2}{3.e^3} \cdot \ddot{\vec{v}} \tag{1}$$

має вигляд

$$\vec{F} = -m \cdot \vec{g} + e \cdot \vec{E}(t) + \frac{e}{c} \cdot \left[\vec{v} \cdot \vec{H}\right] \tag{2}$$

де $\dot{\vec{x}} = \vec{v}$ [1]. Користуючись рівнянням (1) ми повині обмежитись розглядом нерелятивіського випадку, як, можна знехтувати магнітною силою в впорівнянні з електричною силою. Враховуючи це і підставляючи вираз (2) для сили в рівняння (1), одержимо рівняння

$$\ddot{\vec{x}} - \frac{2 \cdot s^2}{3 \cdot m \cdot c^3} \cdot \dddot{\vec{x}} + \vec{g} = \frac{e}{m} \cdot \vec{E}(t). \tag{3}$$

Щоб розв'язати це рівняння, покладемо

$$\vec{\xi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{x}(t) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot dt, \ \vec{\varepsilon}(t) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot dt.$$

Помножимо обидві частини (3) на $e^{i\cdot\omega\cdot t}$ і проінтегруєм по t, тоді одержимо

$$-\omega^2\cdot\vec{\xi}(\omega)+\frac{2\cdot e^2}{3\cdot m\cdot c^3}\cdot i\cdot\omega^3\cdot\vec{\xi}(\omega)+\vec{g}=\frac{e}{m}\cdot\vec{\varepsilon}(\omega),$$

звідки одержуємо

$$\vec{\xi}(\omega)=\frac{\frac{e}{m}\cdot\vec{\varepsilon}(\omega)-\vec{g}}{\frac{2\cdot e^2\cdot i\cdot\omega^3}{m\cdot c^3}-\omega^2}=\frac{(e\cdot\vec{\varepsilon}(\omega)-\vec{g}\cdot m)\cdot c^3}{2\cdot e^2\cdot i\cdot\omega^3-\omega^2\cdot m^2\cdot c^3} \tag{4}$$

Отже, має місце рівність

$$\left|\vec{\xi}(\omega)\right|^2=\frac{(e\cdot\vec{\varepsilon}_0(\omega)-\vec{g}\cdot m)^2\cdot c^6}{4\cdot e^4\cdot\omega^6+\omega^4\cdot m^2\cdot c^6}. \tag{5}$$

Енергія, яка випромінюється в одиницю часу протоном, який рухається прискорено з швидкісстю $\vec{v}$, рівна $2\cdot e^2/3\cdot c^3$; тому вся енергія, яка випромінюється протоном, рівна [3]

$$R=\frac{2\cdot e^2}{3\cdot c^3}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{v}^2\cdot dt. \tag{6}$$

Так як $\vec{v}=\partial^2 x/\partial t^2$, то $-\omega^2\cdot\xi(x)$-трансформанта Фур'є функції $\vec{v}$. Враховуючи цю обставину, а також формулу

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\cdot G(t)\cdot dt&=\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\cdot dt\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}g(\eta)\cdot e^{i\cdot\eta\cdot t}\cdot d\eta=\\&=\int_{-\infty}^{\infty}g(\eta)\cdot d\eta\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}\cdot dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(-\eta)\cdot g(\eta)\cdot d\eta,\end{aligned} \tag{7}$$

записану у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\cdot dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)\right|^2\cdot d\omega, \tag{8}$$

де $F(t)$ -трансформанта Фур'є функції $f(t)$, одержимо

$$R=\frac{2\cdot e^2}{3\cdot c^3}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\omega^4\cdot\left|\vec{\xi}(\omega)\right|^2\cdot d\omega.$$

Підставляючи в це рівняння замість $\left|\vec{\xi}(\omega)\right|^2$ вираз (5), знаходимо повну енергію, випромінену протоном, тобто

$$R=\frac{2\cdot e^2}{3\cdot c^3}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^4\cdot(e\cdot\vec{\varepsilon}(\omega)-\vec{g}\cdot m)^2c^6\cdot d\omega}{4\cdot e^4\cdot\omega^6+\omega^4\cdot m^2\cdot c^6}=\frac{2\cdot e^2}{3\cdot c^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(e\cdot\vec{\varepsilon}(\omega)-\vec{g}\cdot m)^2\cdot c^6\cdot d\omega}{4\cdot e^4\cdot\omega^2+m^2\cdot c^6} \tag{9}$$

Вираз (9) після підстановка значення радіусу протона $r_p=\dfrac{h}{2\cdot\pi\cdot m\cdot c}$ можна записати наступним чином:

$$R=\frac{4\cdot\pi\cdot m\cdot e^2}{3\cdot h\cdot c^2}\cdot r_p\int_0^{\infty}\frac{\omega^4\cdot(e\cdot\vec{\varepsilon}(\omega)-\vec{g}\cdot m)^2\cdot c^6\cdot d\omega}{4\cdot e^{4\cdot}\cdot\omega^6+\omega^4\cdot m^2\cdot c^6}=\frac{4\cdot\pi\cdot m\cdot e^2}{3\cdot h\cdot c^2}\cdot r_p\int_0^{\infty}\frac{(e\cdot\vec{\varepsilon}(\omega)-\vec{g}\cdot m)^2\cdot c^6\cdot d\omega}{4\cdot e^4\cdot\omega^2+m^2\cdot c^6}.$$

Коли ввести спектральну функцію розподілу $R(\omega)$, визначену співвідношенням

$$R=\int_0^{\infty}R(\omega)\cdot d\omega$$

то знайдемо

$$R(\omega)=\frac{4\cdot\pi\cdot m\cdot e^2}{3\cdot h\cdot c^2}\cdot r_p\cdot\frac{\omega^4\cdot(e\cdot\vec{\varepsilon}(\omega)-\vec{g}\cdot m)^2\cdot c^6}{4\cdot e^4\cdot\omega^6-\omega^4\cdot m^2\cdot c^6}=\frac{4\cdot\pi\cdot m\cdot e^2}{3\cdot h\cdot c^2}\cdot r_p\cdot\frac{(e\cdot\vec{\varepsilon}(\omega)-\vec{g}\cdot m)^2\cdot c^6}{4\cdot e^4\cdot\omega^2+m^2\cdot c^6}. \tag{10}$$

Таким чином, спектральна функція випромінювання зв'язана з квадратом модуля трансформанти Фур'є напруженості електричного поля $\vec{E}(t)$ простим співвідношенням.

З другого боку, повна робота, яка виконана світловою хвилею, рівна

$$W = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\vec{x}} \cdot \left(e \cdot \vec{E} - m \cdot \vec{g}\right) \cdot dt .$$

Приймаючи до уваги рівність (7) у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cdot G(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \cdot g^*(\omega) \cdot d\omega ,$$

а також враховуючи, що трансформанта Фур'є функції $\dot{\vec{x}}$ є- $i \cdot \omega \cdot \vec{\xi}(\omega)$, одержимо

$$W = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i \cdot \omega \cdot \vec{\varepsilon}(\omega) \cdot \left(e \cdot \vec{\varepsilon}(\omega) \cdot c^3 - \vec{g} \cdot m \cdot c^3\right) \cdot d\omega}{\left(2 \cdot e^2 \cdot i \cdot \omega^3 - \omega^2 \cdot m \cdot c^3\right)} = \frac{4 \cdot \pi \cdot m \cdot e^2}{3 \cdot h \cdot c^2} \cdot r_p \cdot \int_0^{\infty} \frac{\omega^4 \cdot \left(e \cdot \vec{\varepsilon}(\omega) - \vec{g} \cdot m\right)^2 \cdot c^6 \cdot d\omega}{4 \cdot e^4 \cdot \omega^6 + \omega^4 \cdot m^2 \cdot c^6} =$$

$$= \frac{4 \cdot \pi \cdot m \cdot e^2}{3 \cdot h \cdot c^2} \cdot r_p \cdot \int_0^{\infty} \frac{\cdot \left(e \cdot \vec{\varepsilon}(\omega) - \vec{g} \cdot m\right)^2 \cdot c^6 \cdot d\omega}{4 \cdot e^4 \cdot \omega^2 + m^2 \cdot c^6} . \qquad (11)$$

Бачимо, що $R = W$. У випадку монохроматичного випромінення $\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i \cdot \nu \cdot t}$, так що на підставі рівностей

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha \cdot x} d\alpha = 2 \cdot \pi \cdot \delta(x) \qquad (12)$$

і

$$e \cdot \vec{\varepsilon}(\omega) - \vec{g} \cdot m = \left((2 \cdot \pi)^{1/2} \cdot e \cdot \vec{E}_0 \cdot \delta(\nu + \omega) - \vec{g} \cdot m \cdot \delta(\nu + \omega)\right) \cdot c^3 .$$

Тому із рівності (4) випливає

$$\vec{\xi}(\omega) = \frac{2 \cdot \pi^{1/2}\left(e \cdot \vec{E} \cdot \delta(\nu + \omega) - \vec{g} \cdot m \cdot \delta(\nu + \omega)\right) \cdot c^3}{\left(2 \cdot e^2 \cdot i \cdot \omega^3 - \omega^2 \cdot m \cdot c^3\right)} .$$

Використовуючи теорему обертання (Теорема 1)

Теорема 1. Коли $F(\alpha)$- трансформанта Фур'є функції $f(x)$, тобто коли

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{i\alpha \cdot x} dx ,$$

то $f(x)$ виражаються через $F(\alpha)$ співвідношенням

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \cdot e^{-i\alpha \cdot x} \cdot d\alpha .$$

і враховуючи вираз

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cdot \delta(\xi - \alpha) \cdot d\xi = f(\alpha), \qquad (13)$$

маємо

$$\vec{x}(t) = \frac{e \cdot c^3 \cdot \vec{E}_0 \cdot e^{i \nu \cdot t}}{\left(2 \cdot e^2 \cdot i \cdot \nu^3 - \nu^2 \cdot m \cdot c^3\right)} - \frac{\vec{g} \cdot m \cdot c^3 \cdot e^{i \cdot \nu \cdot t}}{\left(2 \cdot e^2 \cdot i \cdot \nu^3 - \nu^2 \cdot m \cdot c^3\right)},$$

звідки находимо

$$\left|\vec{v}(t)\right|^2 = \frac{\left(e \cdot c^3 \cdot \vec{E}_0 - \vec{g} \cdot m \cdot c^3\right)^2 \cdot \nu^4}{\left(4 \cdot e^4 \cdot \nu^6 + \nu^4 \cdot m^2 \cdot c^6\right)} .$$

Отже, енргія, яка випромінюється в одиницю часу, рівна

$$R = \frac{4 \cdot \pi \cdot m \cdot e^2}{3 \cdot h \cdot c^2} \cdot r_p \cdot \frac{\left(e \cdot c^3 \cdot \vec{E}_0 - \vec{g} \cdot m \cdot c^3\right) \cdot \nu^4}{\left(4 \cdot e^4 \cdot \nu^6 + \nu^4 \cdot m^2 \cdot c^4\right)} = \frac{4 \cdot \pi \cdot m \cdot e^2}{3 \cdot h \cdot c^2} \cdot r_p \cdot \frac{\left(e \cdot c^3 \cdot \vec{E}_0 - \vec{g} \cdot m \cdot c^3\right)}{\left(4 \cdot e^4 \cdot \nu^2 + m^2 \cdot c^4\right)} .$$

В одиницю часу на одиницю площі у розглядуваному випадку приходиться кількість енергії $S = c \cdot E_0^2 / 4\pi$. Поперечний переріз розсіювання визначається як та площа σ , на яку приходиться в падаючому потоці S кількість випромінюваної енергії, рівної R , тобто

$$\sigma = \frac{R}{S} = \frac{16 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot e^2 \cdot c^3}{3 \cdot h \cdot E_0^2} \cdot r_p \cdot f(\nu),$$

де через $f(\nu)$ позначається функція

$$f(\nu) = \frac{\left(e \cdot \vec{E}_0 - \vec{g} \cdot m\right)^2}{\left(4 \cdot e^4 \cdot \nu^2 + m^2 \cdot c^4\right)}.$$

Числові результати. Зроблено обчислення перерізу взаємодії немонохроматичної світлової хвилі з протоном. При значеннях довжини світлової хвилі $0.4 \cdot 10^{-6} - 0.8 \cdot 10^{-6}$ метра. Обчислення показали, що при збільшені довжини хвилі переріз взаємодії збільшується (рис. 3). З формули 13 видно, що для одержання додатніх значень швидкості протону потрібно, щоб

$$e \cdot \vec{E}_0 - \vec{g} \cdot m > 0.$$

Звідси знаходимо, що при значенні енергії хвилі $E_0 = \dfrac{h \cdot c}{\lambda}$ довжина хвилі повинна бути $\lambda < 1.941 \cdot 10^{-18}$ метра.

Отже, для того, щоб електромагнітна хвиля могла утримати протон, щоб він не впав на землю або на стінки приладу потрібно, щоб довжина хвилі була менша від $1.941 \cdot 10^{-18}$ метра.

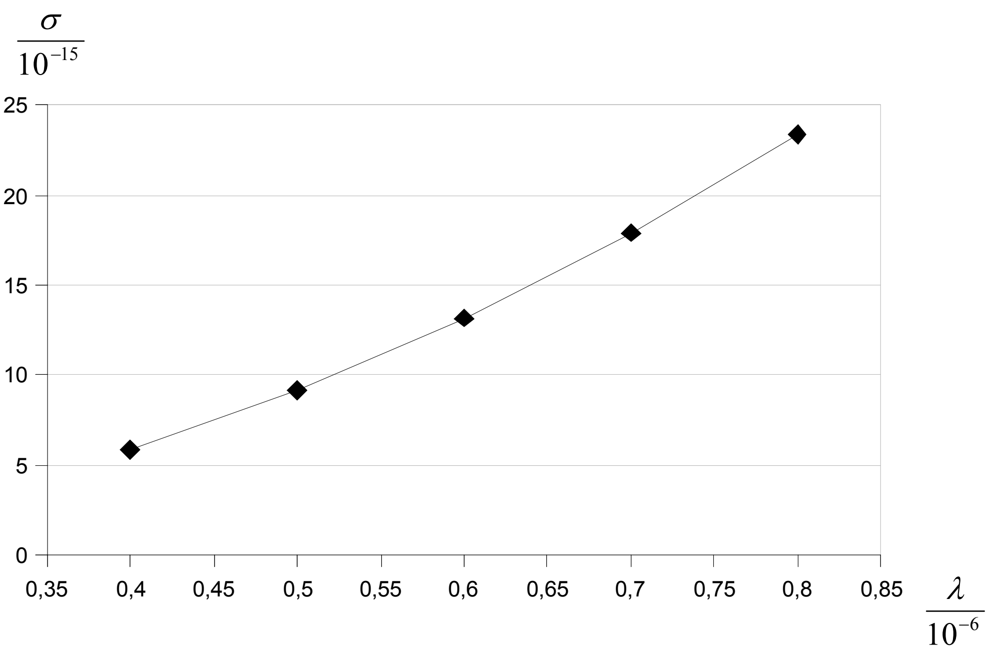

Рис. 3

Література

1. Снеддон И Преобразования Фурье / И. Снеддон. – М. : ИЛ, 1955. – 654с.
2. Фейнман Р. Взаимодействие фотонов с адронами / Р. Фейнман. – М.: МИР, 1975, -390с.
3. Шпольский Э.В. Атомная физика / Э. В. Шпольский. – Т.1. – М. : Наука, 1984. – 552с.

Надійшла 25.1.2011 р.