


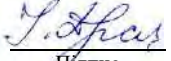
ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА ДО КВАЛІФІКАЦІЙНОЇ РОБОТИ БАКАЛАВРА

на тему *Інженерні методи оцінки та зниження концентрації
напружень у плоских деталях автомобільних конструкцій*

Шифр: КРБМТВАТАМ 26.22094.000. ПЗ


Галузь знань	<u>13 – Механічна інженерія</u> Шифр і назва галузі знань
Спеціальність	<u>132 – Матеріалознавство</u> Шифр і назва спеціальності
Рівень вищої освіти	<u>Перший бакалаврський</u> Рівень вищої освіти
Освітньо-професійна програма	<u>Відновлення та технічний сервіс автомобілів</u> Назва освітньої програми

Виконав: здобувач 4 курсу, група МТВА-22-1  Владислав МИРОНЧУК
Курс, група виконавця Підпис Ім'я, прізвище

Керівник: д-р.техн.н., професор кафедри ТАМ  Ілона ДРАЧ
Науковий ступінь, посада Підпис Ім'я, прізвище

До захисту допускаю:

зав. кафедри ТАМ, д-р.техн.н., професор


Підпис

Олександр ДИХА
Ім'я, прізвище

10 червня 2026 р.

ХМЕЛЬНИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет інженерії, транспорту та архітектури
Кафедра трибології, автомобілів та матеріалознавства
Рівень вищої освіти перший бакалаврський
Галузь знань 13 – Механічна інженерія
Спеціальність 132 – Матеріалознавство
Освітньо-професійна програма Відновлення та технічний сервіс автомобілів

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри ТАМ


(підпис)
д-р.техн.н., проф. Олександр ДИХА
Науковий ступінь, ім'я, прізвище

9 лютого 2026 року

ЗАВДАННЯ НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ БАКАЛАВРА

Завдання видано здобувачу Мирончуку Владиславу Костянтиновичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема кваліфікаційної роботи бакалавра: «Інженерні методи оцінки та зниження концентрації напружень у плоских деталях автомобільних конструкцій»

Керівник роботи професор кафедри ТАМ Драч Ілона Володимирівна
(посада, прізвище, ім'я, по батькові)

2. Затверджено наказом університету від 8 січня 2026 р. № 7

3. Дата видачі завдання здобувачу: 9 лютого 2026 р.

4. Строк подання здобувачем роботи на кафедру: 10 червня 2026 р.

5. Вихідні дані: *джерела інформації щодо теми КРБ; матеріали переддипломної практики: теоретичні основи плоскої задачі теорії пружності.*

6. Зміст пояснювальної записки (перелік задач): *проаналізувати постановку плоскої задачі теорії пружності, визначити відмінності між плоским напруженим станом та плоскою деформацією, уточнити значення пружних констант для кожного випадку; дослідити метод функції напружень Ейрі; отримати розв'язок задачі Кірша для пластини з круговим отвором; визначити коефіцієнти концентрації напружень для базових форм отворів, уточнити їх значення для пластин кінцевої ширини за формулою Хоуланда; провести порівняльний аналіз методів зниження концентрації напружень та їх ефективності; виконати міцнісний розрахунок розтягнутої смуги зі сталі 45 з отворами різної форми, визначити запаси міцності та обґрунтувати оптимальну конструктивну схему.*

7. Перелік графічного матеріалу: *графічна частина роботи представлена у вигляді презентації на слайдах.*

8. Консультанти розділів роботи:

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		Завдання видав	Завдання прийняв

9. Календарний план виконання кваліфікаційної роботи бакалавра:

№	Назва етапів (розділів) кваліфікаційної роботи бакалавра	Термін виконання	Примітка
1	<i>Вибір напрямку дослідження та узгодження тематики кваліфікаційної роботи бакалавра з керівником</i>	<i>09.02.2026</i>	<i>виконано</i>
2	<i>Ознайомлення з предметною областю, формулювання мети та задач дослідження, визначення об'єкта та предмета дослідження</i>	<i>30.02.2026</i>	<i>виконано</i>
3	<i>Робота над розділом 1 – Теоретичні основи плоскої задачі теорії пружності</i>	<i>30.03.2026</i>	<i>виконано</i>
4	<i>Робота над розділом 2 – Аналітичний аналіз концентрації напружень біля отворів</i>	<i>15.04.2026</i>	<i>виконано</i>
5	<i>Робота над розділом 3 – Інженерні методи зниження концентрації напружень та розрахунок міцності плоских деталей</i>	<i>15.05.2026</i>	<i>виконано</i>
6	<i>Оформлення пояснювальної записки згідно вимог</i>	<i>10.06.2026</i>	<i>виконано</i>

Виконавець: здобувач 4 курсу, група МТВА-22-1

Курс, група виконавця


Підпис

Владислав МИРОНЧУК

Ім'я, прізвище

Керівник: д-р.техн.н., професор кафедри ТАМ

Науковий ступінь, посада


Підпис

Ілона ДРАЧ

Ім'я, прізвище

РЕФЕРАТ

Тема кваліфікаційної роботи
бакалавра:

*Інженерні методи оцінки та зниження
концентрації напружень у плоских деталях
автомобільних конструкцій*

Виконавець кваліфікаційної роботи
бакалавра:

*здобувач 4 курсу групи МТВА-22-1
Мирончук Владислав Костянтинович*

Керівник кваліфікаційної роботи
бакалавра:

*д-р.техн.н., професор кафедри ТАМ
Драч Ілона Володимирівна*

Кваліфікаційна робота бакалавра містить:

Пояснювальна записка				Кількість додатків
Сторінок	Рисунків	Таблиць	Джерел інформації	
68	6	10	26	1

Метою роботи є розробка інженерної методики аналітичної оцінки концентрації напружень у плоских деталях машинобудівних конструкцій та визначення ефективних шляхів її зниження шляхом оптимізації форми отворів.

Завдання дослідження: проаналізувати постановку плоскої задачі теорії пружності, дослідити метод функції напружень Ейрі як інструмент розв'язання задач про концентрацію напружень; визначити коефіцієнти концентрації напружень для базових форм отворів, уточнити їх значення для пластин кінцевої ширини за формулою Хоуланда; провести порівняльний аналіз методів зниження концентрації напружень (зміна форми отвору, підфілювання краю отвору) та їх ефективності; виконати міцнісний розрахунок розтягнутої смуги зі сталі 45 з отворами різної форми, визначити запаси міцності та обґрунтувати оптимальну конструктивну схему.





Об'єктом дослідження є процес деформування плоских деталей машинобудівних конструкцій (пластин та смуг) з геометричними концентраторами напружень типу отворів під статичним розтягом.

Предметом дослідження є напружено-деформований стан, коефіцієнти концентрації напружень та запаси міцності плоских деталей з отворами різної форми з конструкційної сталі 45.

Ключові слова: процес деформування плоских деталей, напружено-деформований стан, коефіцієнти концентрації напружень, запаси міцності плоских деталей.

ЗМІСТ

Вступ.....	5
1 Теоретичні основи плоскої задачі теорії пружності	9
1.1 Постановка плоскої задачі: плоский напружений стан і плоска деформація	9
1.2 Основні рівняння теорії пружності в плоскій постановці	15
1.3 Функція напружень Ейрі як метод розв'язання	19
2 Аналітичний аналіз концентрації напружень біля отворів	26
2.1 Класична задача Кірша про пластину з круглим отвором	26
2.2 Коефіцієнт концентрації напружень K_t	34
2.3 Особливості переходу від ПНС до ПД при аналізі концентрації	36
3 Інженерні методи зниження концентрації напружень та розрахунок міцності плоских деталей	40
3.1 Уточнення коефіцієнта концентрації напружень для пластин кінцевих розмірів	40
3.2 Аналітичний синтез оптимальних форм отворів для зниження концентрації	44
3.3 Міцнісний розрахунок плоских деталей з концентраторами напружень	52
Висновки.....	62
Перелік посилань	65
Додаток.....	68

КРБМТВАТАМ 26.22094.000 ПЗ				
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дат
Розроб.		Миرونчук		
Перевір.		Драч		
Реценз.				
Н. Контр.		Бабак		
Затверд.		Диха		
Інженерні методи оцінки та зниження концентрації напружень у плоских деталях автомобільних конструкцій				
		Лім.	Арк.	Акрівів
		4	68	
ХНУ група МТВА-22-1				

ВСТУП

Актуальність теми. Концентрація напружень біля геометричних нерегулярностей (отворів, вирізів, канавок) є однією з ключових проблем міцності машинобудівних конструкцій. За статистичними даними, близько 50–60 % руйнувань деталей машин при циклічному навантаженні пов'язано саме з розвитком втомних тріщин від зон концентрації напружень. Особливого значення ця проблема набуває при проектуванні відповідальних елементів легких конструкцій – смуг з отворами під болтові з'єднання, фланців трубопроводів, листових елементів корпусів, де необхідно забезпечити мінімальну матеріаломісткість при заданому рівні надійності [1].

Теоретичні основи аналізу концентрації напружень у плоских деталях були закладені класичною теорією пружності. Розв'язок задачі про пластину з круговим отвором, отриманий Кіршем (1898) з використанням функції напружень Ейрі, став фундаментом для інженерних методик розрахунку коефіцієнтів концентрації напружень (K_t) [2]. Подальший розвиток методів (дослідження Інґліса еліптичних отворів, уточнення Хоуланда для пластин кінцевої ширини) створив достатню аналітичну базу для оцінки міцності деталей без залучення складних чисельних методів. Водночас, сучасна інженерна практика потребує систематизації цих методів з урахуванням конкретних властивостей матеріалів (зокрема, конструкційної сталі 45, широко застосовуваної в машинобудуванні) та розробки прикладних рекомендацій щодо оптимізації форм концентраторів [3].

Ступінь розробленості теми. Плоска задача теорії пружності досліджена у працях Сен-Венана, Ляме, Міхеліна [4, 5]. Метод функції напружень Ейрі (φ), що зводить задачу до розв'язання бігармонічного рівняння $\nabla^4\varphi=0$, систематизовано у монографіях Тимошенка та Гудієра [4]. Задача про концентрацію напружень біля отворів детально розглянута у фундаментальних роботах Савіна, Неебера, Лехніцького [6]. Емпіричні дані щодо K_t для

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						5
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

різноманітних форм отворів узагальнено у довідниках Петерсона та довіднику «Міцність при концентрації напружень» [7]. Питання зниження концентрації напружень шляхом оптимізації форм розглянуто у роботах з топологічної оптимізації та біонічного проектування [8].

Разом з тим, існує потреба у систематизації аналітичних методів оцінки K_t саме для умов плоского напруженого стану та плоскої деформації з конкретизацією для стандартних матеріалів машинобудування, що обумовлює актуальність проведення даного дослідження.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є розробка інженерної методики аналітичної оцінки концентрації напружень у плоских деталях машинобудівних конструкцій та визначення ефективних шляхів її зниження шляхом оптимізації форми отворів.

Для досягнення мети необхідно вирішити такі завдання:

1) Проаналізувати постановку плоскої задачі теорії пружності, визначити відмінності між плоским напруженим станом та плоскою деформацією, уточнити значення пружних констант для кожного випадку.

2) Дослідити метод функції напружень Ейрі як інструмент розв'язання задач про концентрацію напружень; отримати розв'язок задачі Кірша для пластини з круговим отвором.

3) Визначити коефіцієнти концентрації напружень (K_t) для базових форм отворів (круглий, еліптичний), уточнити їх значення для пластин кінцевої ширини за формулою Хоуланда.

4) Провести порівняльний аналіз методів зниження концентрації напружень (зміна форми отвору, підфілювання краю отвору) та їх ефективності.

5) Виконати міцнісний розрахунок розтягнутої смуги зі сталі 45 з отворами різної форми, визначити запаси міцності та обґрунтувати оптимальну конструктивну схему.

Об'єкт і предмет дослідження. Об'єктом дослідження є процес деформування плоских деталей машинобудівних конструкцій (пластин та смуг)

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						6
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

з геометричними концентраторами напружень типу отворів під статичним розтягом.

Предметом дослідження є напружено-деформований стан, коефіцієнти концентрації напружень та запаси міцності плоских деталей з отворами різної форми з конструкційної сталі 45.

Методи дослідження. У роботі застосовано методи математичної теорії пружності (функція напружень Ейрі, аналітичні розв'язки задач Кірша та Інґліса), порівняльний аналіз геометричних параметрів концентраторів, розрахунково-графічний метод (побудова епюр та графічних залежностей), методи інженерного розрахунку міцності деталей машин.

Практичне значення роботи. Результати дослідження можуть бути використані при проектуванні з'єднувальних елементів машинобудівних конструкцій (болтові з'єднання фланців, кріпильні пластини), листових елементів несучих конструкцій, корпусних деталей. Розроблена методика дозволяє інженеру на стадії ескізного проектування оцінити рівень концентрації напружень та обґрунтувати конструктивні заходи щодо підвищення міцності деталей (зниження матеріаломісткості на 15–30 % при збереженні надійності за рахунок оптимізації форми отворів).

Структура роботи. Кваліфікаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел (26 найменувань) та додатків.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету та завдання дослідження, визначено об'єкт, предмет та методи дослідження.

Розділ 1 присвячено теоретичним основам плоскої задачі теорії пружності. Розглянуто плоский напружений стан та плоску деформацію, встановлено відмінності в константах пружності. Наведено основні рівняння рівноваги та сумісності деформацій. Детально розглянуто функцію напружень Ейрі як метод розв'язання задач теорії пружності.

Розділ 2 містить аналітичний аналіз концентрації напружень. Розглянуто класичну задачу Кірша про пластину з круговим отвором, отримано розподіл

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						7
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

напружень на контурі отвору. Визначено коефіцієнт концентрації напружень K_t , наведено його значення для різних випадків навантаження. Розглянуто задачу Інгліса для еліптичного отвору.

Розділ 3 присвячено інженерним методам зниження концентрації напружень. Наведено уточнення K_t для пластин кінцевої ширини (формула Хоуланда). Проведено аналітичний синтез оптимальних форм отворів. Виконано міцнісний розрахунок розтягнутої смуги зі сталі 45 з різними формами отворів, визначено запаси міцності та обґрунтовано оптимальну конструктивну схему.

У висновках сформульовано основні результати дослідження.

Додатки містять графічні матеріали (презентація на слайдах).

					КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						8
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Сучасне машинобудування висуває високі вимоги до точності розрахунків міцності та жорсткості деталей машин. Значна частина конструктивних елементів (фланці, пластини перегородок, лопатки турбін, листові пружини, з'єднувальні смуги) має геометричну форму, коли один із розмірів (товщина) суттєво менший за два інших (довжину та ширину). Для таких тіл характерним є особливий вид деформованого стану, який у теорії пружності отримав назву плоскої задачі [5, 6].

Плоска задача теорії пружності є одним із фундаментальних розділів механіки суцільного середовища, що має надзвичайно важливе прикладне значення. На відміну від просторових задач, які в загальному вигляді потребують розв'язання системи з 15 рівнянь (6 рівнянь Коші, 6 рівнянь співвідношень між деформаціями та переміщеннями, 3 рівняння рівноваги та рівняння Ламе), плоска задача дозволяє звести аналіз до двовимірної постановки, що суттєво спрощує математичний апарат дослідження [7].

У цьому розділі детально розглядаються дві основні постановки плоскої задачі – плоский напружений стан та плоска деформація, встановлюються їх характерні ознаки та межі застосування, виводяться основні диференціальні рівняння теорії пружності у плоскій постановці та досліджується метод функції напружень Ейрі як універсальний інструмент розв'язання задач про концентрацію напружень.

1.1 Постановка плоскої задачі: плоский напружений стан і плоска деформація

1.1.1 Загальна характеристика плоскої задачі

Плоска задача теорії пружності розглядає напружено-деформований стан пружного тіла, у якому переміщення точок тіла відбуваються паралельно до

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						9
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

однієї площини (наприклад, до площини Oxy), і не залежать від координати, перпендикулярної до цієї площини (координати z). Таким чином, компоненти вектора переміщень підкоряються умовам [6]:

$$u=u(x,y), \quad v=v(x,y), \quad w=0$$

або у випадку узагальненої плоскої задачі – $w=\text{const}$.

Залежно від характеру навантаження та геометричних особливостей тіла розрізняють два фундаментально різних види плоскої задачі: плоский напружений стан (ПНС) та плоску деформацію (ПД) [8]. Правильний вибір постановки визначає адекватність отриманих результатів та коректність подальшого розрахунку міцності конструкції.

1.1.2 Плоский напружений стан

Плоский напружений стан (plane stress state) має місце у тонких пластинах, навантажених силами, які прикладені до їхньої площини та рівномірно розподілені за товщиною. При цьому на бічних поверхнях пластини (при $z=\pm h/2$, де h – товщина) напруження відсутні, оскільки ці поверхні вільні від зовнішнього навантаження [8].

Для тонкої пластини можна припустити, що напруження в напрямку осі z дорівнюють нулю не лише на поверхні, але й у всьому об'ємі:

$$\sigma_z=0, \quad \tau_{xz}=0, \quad \tau_{yz}=0.$$

Залишаються відмінними від нуля лише компоненти напружень у площині пластини:

$$\sigma_x=\sigma_x(x,y), \quad \sigma_y=\sigma_y(x,y), \quad \tau_{xy}=\tau_{xy}(x,y).$$

Умови реалізації ПНС [9]:

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						10
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

- товщина пластини h значно менша за характерні розміри в площині ($h \ll L$, де L – характерний лінійний розмір);
- навантаження прикладене до площини пластини та рівномірне за товщиною;
- відсутні об'ємні сили, перпендикулярні до площини пластини (або вони дорівнюють нулю);
- поверхні $z = \text{const}$ вільні від зовнішніх сил.

Приклади конструкцій, що працюють у ПНС:

- тонкі оболонки та пластини під дією розтягуючих/стискаючих сил у своїй площині;
- листові елементи фланцевих з'єднань;
- диски лопаток турбін (при виборі січення перпендикулярно до осі обертання);
- полотна пил, ножів;
- тонкостінні балки при розтягуванні.

У стані плоского напруження компоненти деформаційного тензора знаходяться з узагальненого закону Гука. Оскільки $\sigma_z = 0$, деформація в напрямку z не дорівнює нулю, а визначається формулою [7]:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y),$$

де E – модуль пружності першого роду (модуль Юнга), ν – коефіцієнт Пуассона.

Це означає, що при ПНС відбувається деформація в напрямку товщини пластини (розширення при стискуванні в площині або стиснення при розтягуванні). Така деформація називається поперечною та є характерною особливістю даного виду напруженого стану.

1.1.3 Плоска деформація

Плоска деформація (plane strain) реалізується у тілах, значний розмір яких у напрямку осі Oz (назвемо його довжиною) набагато перевищує розміри у

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						11
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

поперечному перерізі. Типовим прикладом є гребінь греблі, тунель у масиві гірської породи, довга труба під дією внутрішнього тиску (при розгляді напруженого стану, далекого від кінців), вал постійного перерізу [6].

У цьому випадку можна вважати, що переміщення точок у напрямку осі Oz відсутні:

$$w=0,$$

а переміщення u та v залежать лише від координат x та y :

$$u=u(x,y), \quad v=v(x,y).$$

Звідси випливає, що компонента деформації вздовж осі z дорівнює нулю:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

а з умов симетрії задачі (відсутність залежності від z) також маємо:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Умови реалізації ПД:

- довжина тіла у напрямку осі O_z значно перевищує поперечні розміри ($L_z \gg D$);
- навантаження не змінюється вздовж осі O_z і спрямоване перпендикулярно до неї;
- перерізи $z=\text{const}$ на кінцях тіла зафіксовані від переміщень у напрямку z (задовольняються умови плоскості зрізів);
- відсутні об'ємні сили з компонентою вздовж осі O_z .

Приклади конструкцій, що працюють у ПД:

- греблі та підпірні стінки значної довжини;
- тунелі та виробки у гірській породі;
- довгі вали під дією рівномірно розподіленого навантаження;
- прокатні валки (у центральній зоні, далекій від кінців);

					КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						12
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

— трубопроводи під дією внутрішнього тиску (при розгляді стану в середній частині).

У стані плоскої деформації напруження σ_z не дорівнює нулю, а визначається з умови $\varepsilon_z=0$ за допомогою закону Гука:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0$$

звідки:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y).$$

Отже, у тілі, де реалізується плоска деформація, існує поздовжнє напруження σ_z , яке є функцією координат x та y . Це напруження утруднює деформацію в напрямку осі z , створюючи ефект «опору» матеріалу [9].

1.1.4 Співвідношення між константами пружності для ПНС та ПД

Суттєвою відмінністю між розглянутими постановками є характер співвідношень між компонентами напружень та деформацій. Для зручності аналізу та уніфікації розрахункових формул вводяться еквівалентні пружні константи, які дозволяють використовувати єдиний математичний апарат для обох типів плоскої задачі.

Для плоского напруженого стану справжніми є модуль пружності E та коефіцієнт Пуассона ν . Закон Гука для площини Oxy має вигляд [8]:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}.$$

Для плоскої деформації зворотній зв'язок між деформаціями та напруженнями в площині Oxy можна записати у аналогічній формі, якщо ввести приведені модуль пружності E' та приведені коефіцієнт Пуассона ν' [7]:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E'}(\sigma_x - \nu'\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E'}(\sigma_y - \nu'\sigma_x),$$

де:

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						13
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad \nu' = \frac{\nu}{1 - \nu}$$

Або, у формі, більш зручній для порівняння (якщо виражати напруження через деформації):

для ПНС:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x);$$

для ПД:

$$\sigma_x = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1 - \nu}\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1 - \nu}\varepsilon_x)$$

Звідси видно, що для ПД матеріал поводить ся так, наче він має більший модуль пружності $E' > E$ та більший коефіцієнт Пуассона $\nu' > \nu$. Для сталі з $\nu = 0,3$ маємо:

$$E' = \frac{E}{1 - 0,09} \approx 1,1E, \quad \nu' = \frac{0,3}{0,7} \approx 0,43$$

Це означає, що при тих самих деформаціях у площині Оху у тілі з ПД виникають більші напруження, ніж у тілі з ПНС, що пояснюється наявністю додаткового поздовжнього напруження σ_z , яке перешкоджає деформуванню.

Така уніфікація констант дозволяє розв'язувати задачі ПНС та ПД за єдиною методикою, замінюючи лише числові значення пружних характеристик. У подальшому викладі для узагальненості будемо позначати E та ν як константи для конкретної постановки задачі (розуміючи, що для ПД слід використовувати приведені значення).

1.1.5 Визначальні рівняння плоскої задачі

Для повного опису напружено-деформованого стану у плоскій постановці необхідно визначити три компоненти напружень (σ_x , σ_y , τ_{xy}), три

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						14
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

компоненти деформацій (ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy}) та дві компоненти переміщень (u , v) – загалом вісім невідомих функцій від координат x та y .

Для їх визначення служить система з восьми рівнянь:

- два диференціальні рівняння рівноваги;
- три геометричні співвідношення (зв'язок між деформаціями та переміщеннями);
- три фізичні співвідношення (закон Гука).

Розгляд цієї системи та методів її розв'язання присвячені наступні підрозділи.

1.2 Основні рівняння теорії пружності в плоскій постановці

1.2.1 Диференціальні рівняння рівноваги

Рівняння рівноваги виводяться з умови, що довільний виділений елемент тіла перебуває у стані спокою (або руху з постійною швидкістю, якщо розглядати квазістатичне навантаження) [9]. Для плоскої задачі розглянемо елемент у формі прямокутного паралелепіпеда з розмірами dx , dy , h (товщина), вирізаний із тіла паралельно координатним площинам.

Проекція всіх сил на вісь Ox дає:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy \cdot h - \sigma_x dy \cdot h + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \cdot h - \tau_{yx} dx \cdot h + X \cdot dx \cdot dy \cdot h = 0$$

де X – проекція об'ємної сили на вісь Ox (на одиницю об'єму).

Скорочуючи та ділячи на $dx \cdot dy \cdot h$, отримуємо перше диференціальне рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0$$

Аналогічно, проекція сил на вісь Oy дає:

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						15
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0,$$

де Y – проекція об'ємної сили на вісь Oy .

Використовуючи теорему про парність дотичних напружень ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$), отримуємо систему двох диференціальних рівнянь рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \end{cases}.$$

Ці рівняння пов'язують між собою три невідомі компоненти напружень (σ_x , σ_y , τ_{xy}) та повинні виконуватися в кожній точці тіла. При відсутності об'ємних сил ($X=Y=0$) система спрощується:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

Ці рівняння є необхідними, але недостатніми для визначення напружень – система з двох рівнянь з трьома невідомими. Для замикання системи необхідно залучити геометричні та фізичні співвідношення.

1.2.2 Геометричні співвідношення

Геометричні співвідношення встановлюють зв'язок між компонентами тензора деформацій та компонентами вектора переміщень. Для малих деформацій, що є характерними для теорії пружності, ці співвідношення мають лінійний характер [6].

Розглянемо деформацію відрізка dx у напрямку осі Ox . Відносно подовження цього відрізка дорівнює:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Аналогічно для напрямку Oy :

					КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						16
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Кут зсуву γ_{xy} визначається як сума кутів повороту відрізків dx та dy :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Таким чином, маємо три геометричні співвідношення Коші:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Ці рівняння додають до системи три нові невідомі (ε_x , ε_y , γ_{xy}), але і самі містять нові невідомі u та v . Загальна кількість невідомих зростає до восьми (σ_x , σ_y , τ_{xy} , ε_x , ε_y , γ_{xy} , u , v), а рівнянь стає п'ять (два рівняння рівноваги та три геометричні). Необхідне додаткове замикання системи забезпечують фізичні співвідношення.

1.2.3 Фізичні співвідношення (закон Гука)

Фізичні співвідношення встановлюють лінійний зв'язок між напруженнями та деформаціями для ізотропного пружного матеріалу, що підкоряється закону Гука [9].

Для плоскої задачі ці співвідношення можна записати у вигляді [9]:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{cases},$$

де $G = E / (2(1+\nu))$ – модуль зсуву (модуль зрушення, модуль Кулона).

Обернені співвідношення (напруження через деформації) мають вигляд:

					КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						17
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \end{cases}$$

Ці три рівняння разом із попередніми п'ятьма утворюють замкнуту систему восьми рівнянь з вісьма невідомими.

1.2.4 Умови сумісності деформацій (рівняння Сен-Венана)

Оскільки компоненти деформацій виражаються через похідні від переміщень, між ними мають існувати певні диференціальні залежності, які забезпечують неперервність та однозначність переміщень у тілі. Ці залежності називаються умовами сумісності або умовами інтегровності.

Для плоскої задачі маємо три компоненти деформацій (ε_x , ε_y , γ_{xy}), виражені через дві функції переміщень (u , v). Отже, між деформаціями існує одне диференціальне співвідношення, яке отримується виключенням u та v із геометричних співвідношень.

Диференціюючи перше геометричне співвідношення двічі за y , друге – двічі за x , а третє – один раз за x і один раз за y , отримуємо:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

Віднімаючи перші два вирази від третього, отримуємо рівняння сумісності деформацій Сен-Венана для плоскої задачі:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Це рівняння є необхідною і достатньою умовою для того, щоб за заданим полем деформацій можна було визначити переміщення u та v (з точністю до жорсткого переміщення тіла).

					КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						18
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Підставляючи у це рівняння вирази для деформацій через напруження (закон Гука), отримуємо умову сумісності у напруженнях. Для випадку відсутності об'ємних сил це рівняння має вигляд:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

або:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

Це означає, що сума нормальних напружень $\sigma_x + \sigma_y$ (яка дорівнює першому інваріанту тензора напружень I_1) є гармонічною функцією, тобто задовольняє рівняння Лапласа.

Таким чином, ми маємо систему із трьох рівнянь (два рівняння рівноваги та рівняння сумісності) відносно трьох невідомих функцій σ_x , σ_y , τ_{xy} . Ця система дозволяє розв'язувати задачу у напруженнях, не звертаючись до переміщень. Однак пряме інтегрування цієї системи пов'язане зі значними математичними труднощами. Суттєве спрощення досягається введенням функції напружень Ейрі.

1.3 Функція напружень Ейрі

1.3.1 Визначення та фізичний зміст

Функція напружень Ейрі (airy stress function) є скалярною функцією $\varphi(x, y)$, введення якої дозволяє автоматично задовольнити рівняння рівноваги та звести задачу теорії пружності до розв'язання одного диференціального рівняння четвертого порядку [8, 9].

При відсутності об'ємних сил ($X=Y=0$) рівняння рівноваги мають вигляд:

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						19
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

Ці рівняння будуть тотожно задовольнятися, якщо покласти:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

Дійсно, підставляючи ці вирази у рівняння рівноваги, отримуємо тотожності:

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad -\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

Таким чином, за допомогою функції $\varphi(x,y)$ ми автоматично задовольняємо умови рівноваги. Залишається забезпечити виконання умов сумісності деформацій.

1.3.2 Рівняння бігармонічності

Підставимо вирази для напружень через функцію Ейрі у рівняння сумісності деформацій. Сума нормальних напружень дорівнює:

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \nabla^2 \varphi$$

Умова сумісності $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$ приймає вигляд:

$$\nabla^2(\nabla^2 \varphi) = 0$$

або:

$$\nabla^4 \varphi = 0,$$

де $\nabla^4 = \nabla^2(\nabla^2) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ – бігармонічний оператор (оператор Лапласа в другому степені).

Отже, функція напружень Ейрі має задовольняти бігармонічне рівняння (рівняння бігармонічності):

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						20
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$$

Це рівняння є фундаментальним диференціальним рівнянням плоскої задачі теорії пружності. Його розв'язання дозволяє знайти функцію φ , а через неї – всі компоненти напружень. Переміщення знаходяться подальшим інтегруванням деформацій.

1.3.3 Перехід до полярних координат

При розв'язанні задач про концентрацію напружень біля отворів, тріщин, а також для криволінійних областей доцільно використовувати полярні координати r та θ , пов'язані з декартовими співвідношеннями:

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta.$$

У полярних координатах компоненти напружень (радіальне σ_r , тангенціальне σ_θ та дотичне $\tau_{r\theta}$) виражаються через функцію $\varphi(r,\theta)$ наступним чином:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2},$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2},$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta}.$$

Бігармонічне рівняння в полярних координатах має вигляд:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

або у компактній формі:

$$\nabla^4 \varphi = 0,$$

					КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						21
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

де оператор Лапласа в полярних координатах:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

1.3.4 Загальний розв'язок бігармонічного рівняння в полярних координатах

Для задач з круговою симетрією (або залежністю від кута θ через тригонометричні функції) шукають розв'язок у вигляді добутку функцій від r та θ :

$$\varphi(r,\theta)=R(r)\cdot\Theta(\theta).$$

Для кругово-симетричного випадку (коли φ залежить лише від r , тобто $\varphi=\varphi(r)$) бігармонічне рівняння спрощується до звичайного диференціального рівняння четвертого порядку:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$$

Розкриваючи дужки, отримуємо:

$$\frac{d^4\varphi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3\varphi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} = 0$$

Це рівняння Ейлера. Його розв'язок шукають у вигляді $\varphi=r^n$. Підставляючи, отримуємо характеристичне рівняння:

$$(n-2)^2n^2=0.$$

Корені: $n_1=n_2=0$, $n_3=n_4=2$.

Отже, загальний розв'язок для кругово-симетричного випадку:

$$\varphi(r)=A\ln r+Br^2\ln r+Cr^2+D,$$

де A , B , C , D – константи, які визначаються з граничних умов.

					КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						22
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Для загального випадку (залежність від θ) розв'язок можна представити у вигляді ряду Фур'є за змінною θ з коефіцієнтами – функціями r . Для задачі про пластину з круговим отвором під дією одноосного розтягу (класична задача Кірша) шукають розв'язок у вигляді:

$$\varphi(r,\theta)=f(r)\cos 2\theta+g(r),$$

де функції $f(r)$ та $g(r)$ підбираються таким чином, щоб задовольнити бігармонічне рівняння та граничні умови (на безмежності – поле напружень від розтягу, на контурі отвору – відсутність зовнішніх сил).

1.3.5 Граничні умови для функції напружень

Для однозначного визначення функції φ необхідно задати граничні умови на контурах тіла. Існують два типи граничних умов:

Задано зовнішнє навантаження (граничні умови у напруженнях). Якщо на ділянці контура S задані зовнішні сили X_n та Y_n , то:

$$X_n=\sigma_x l+\tau_{xy}m, \quad Y_n=\tau_{xy}l+\sigma_y m,$$

де $l=\cos(n,x)$, $m=\cos(n,y)$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі.

У полярних координатах для кола радіуса a :

$$\sigma_r(a,\theta)=p(\theta), \quad \tau_{r\theta}(a,\theta)=q(\theta),$$

де $p(\theta)$ та $q(\theta)$ – задані розподіли нормального та дотичного навантажень.

Задано переміщення (граничні умови у переміщеннях). На ділянці контура S_u відомі u^* та v^* .

Для функції Ейрі граничні умови першого роду можна виразити через значення φ та її похідних. Зокрема, на вільному від навантаження отворі (коло $r=a$) маємо:

$$\sigma_r(a,\theta)=0, \quad \tau_{r\theta}(a,\theta)=0,$$

що еквівалентно умовам:

					КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						23
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0, \quad -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad \text{при } r = a$$

На безмежності ($r \rightarrow \infty$) для пластини, розтягнутої у напрямку осі Ox напругою σ , маємо:

$$\sigma_x \rightarrow \sigma, \quad \sigma_y \rightarrow 0, \quad \tau_{xy} \rightarrow 0,$$

що відповідає:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \rightarrow \sigma, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \rightarrow 0$$

Звідси отримуємо асимптотику функції Ейрі на безмежності:

$$\varphi \rightarrow \frac{1}{2} \sigma y^2 = \frac{1}{2} \sigma r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{4} \sigma r^2 (1 - \cos 2\theta)$$

Ця асимптотика є вихідною для побудови розв'язку задачі Кірша про концентрацію напружень біля кругового отвору, яка детально розглядається у наступному розділі.

1.3.6 Переваги та обмеження методу функції напружень

Метод функції напружень Ейрі має низку переваг при розв'язанні плоских задач теорії пружності:

- 1) Зменшення кількості невідомих: замість трьох функцій напружень (σ_x , σ_y , τ_{xy}) вводиться одна скалярна функція φ .
- 2) Автоматичне задоволення рівнянь рівноваги: при визначенні напружень через φ умови рівноваги виконуються тотожно.
- 3) Зведення задачі до одного рівняння: замість системи рівнянь отримуємо одне диференціальне рівняння четвертого порядку (бігармонічне).
- 4) Зручність для аналітичних розв'язків: для ряду важливих практичних задач (задача Кірша, задача про концентрацію біля еліптичного отвору Інгліса) існують точні аналітичні розв'язки бігармонічного рівняння.

Однак метод має й обмеження:

— придатний лише для плоских задач (і то не для всіх — наприклад, для задач з об'ємними силами, що мають потенціал, потрібна модифікація);

					КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						24
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

- складність задоволення граничних умов у переміщеннях;
- для складних областей аналітичні розв'язки відсутні, і необхідне застосування чисельних методів (метод скінченних різниць, метод скінченних елементів).

Тим не менш, для задач про концентрацію напружень біля отворів у нескінченних пластинах метод функції Ейрі залишається найпотужнішим аналітичним інструментом, що дозволяє отримати точні розв'язки та вивести формули для коефіцієнтів концентрації напружень.

Висновки до розділу 1

У першому розділі викладено теоретичні основи плоскої задачі теорії пружності. Встановлено, що залежно від геометрії тіла та характеру навантаження розрізняють плоский напружений стан (ПНС), характерний для тонких пластин, та плоску деформацію (ПД), що реалізується у довгих призматичних тілах. Показано, що ці постановки відрізняються як фізично (наявність або відсутність напружень/деформацій у поздовжньому напрямку), так і математично – через різні значення приведених пружних констант ($E' = E/(1-\nu^2)$) для ПД проти E для ПНС).

Виведено основні диференціальні рівняння плоскої задачі: рівняння рівноваги, геометричні співвідношення Коші, фізичні співвідношення (закон Гука) та умови сумісності деформацій Сен-Венана. Показано, що задача зводиться до розв'язання системи рівнянь відносно трьох компонентів напружень із задоволенням рівняння сумісності.

Запропоновано метод функції напружень Ейрі, який дозволяє звести задачу до розв'язання одного бігармонічного рівняння $\nabla^4 \phi = 0$ відносно скалярної функції $\phi(x, y)$. Наведено формули для компонентів напружень через похідні функції Ейрі у декартовій та полярній системах координат, що створює базу для аналітичного розв'язання задачі про концентрацію напружень біля кругового отвору у наступному розділі.

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						25
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

РОЗДІЛ 2 АНАЛІТИЧНИЙ АНАЛІЗ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ОТВОРІВ У ПЛОСКИХ ДЕТАЛЯХ

Концентрація напружень біля геометричних нерегулярностей є одним із найважливіших явищ, що визначають міцність та довговічність машинобудівних конструкцій. Наявність отворів, вирізів, канавок та інших концентраторів призводить до локального збільшення інтенсивності напруженого стану в порівнянні з номінальними (середніми) напруженнями у перерізі. Кількісно це явище характеризується теоретичним коефіцієнтом концентрації напружень K_t , який визначається виключно геометрією деталі та видом навантаження [10].

У цьому розділі розглядаються фундаментальні розв'язки задач теорії пружності, що описують концентрацію напружень біля отворів у плоских деталях. Основну увагу приділено класичній задачі Кірша про круговий отвір та задачі Інґліса про еліптичний отвір, які становлять теоретичну базу для інженерних розрахунків. Виводяться аналітичні залежності для компонентів напружень, визначаються максимальні значення та коефіцієнти концентрації, досліджується вплив геометричних параметрів та виду плоскої задачі на величину K_t .

2.1 Задача Кірша про пластину з круговим отвором під одноосним розтягом

2.1.1 Постановка задачі та граничні умови

Розглянемо нескінченну пружну пластину (або смугу значної ширини), піддану дії одноосного розтягу в напрямку осі Ox напруженням σ . У центрі пластини розташований круговий отвір радіуса a . Необхідно визначити поле напружень у пластині, зокрема на контурі отвору, та знайти максимальні значення напружень, що визначають міцність деталі.

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						26
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Ця задача була вперше розв'язана Г. Кіршем (G. Kirsch) у 1898 році методом функції напружень Ейрі і стала класичною у курсі теорії пружності. Її значення полягає в тому, що вона дозволяє аналітично визначити коефіцієнт концентрації напружень для найпоширенішої геометрії – круглого отвору [11, 12].

Геометрична постановка [13]:

- пластина вважається нескінченною (або достатньо широкою, щоб краї не впливали на поле напружень біля отвору);
- товщина пластини мала (плоский напружений стан) або пластина довга (плоска деформація);
- отвір круглий, радіуса a , центр отвору збігається з початком координат;
- навантаження – рівномірний розтяг напруженням σ на безмежності в напрямку осі Ox .

Граничні умови задачі [13]:

- 1) на безмежності ($r \rightarrow \infty$): напружено-деформований стан має збігатися з одноосним розтягом:

$$\sigma_x \rightarrow \sigma, \quad \sigma_y \rightarrow 0, \quad \tau_{xy} \rightarrow 0.$$

У полярних координатах ($x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$) це відповідає [14]:

$$\sigma_r \rightarrow \frac{\sigma}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad \sigma_\theta \rightarrow \frac{\sigma}{2}(1 - \cos 2\theta), \quad \tau_{r\theta} \rightarrow -\frac{\sigma}{2} \sin 2\theta ;$$

- 2) на контурі отвору ($r=a$): поверхня отвору вільна від зовнішніх сил, тому:

$$\sigma_r(a, \theta) = 0, \quad \tau_{r\theta}(a, \theta) = 0.$$

2.1.2 Побудова функції напружень Ейрі

Для розв'язання задачі використаємо метод функції напружень Ейрі. Шукатимемо функцію $\varphi(r, \theta)$ у полярних координатах, яка задовольняє бігармонічне рівняння $\nabla^4 \varphi = 0$ та граничні умови.

					КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						27
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

На безмежності функція Ейрі має відповідати одноосному розтягу.

Оскільки $\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$, для однорідного поля $\sigma_x = \sigma$ маємо:

$$\varphi_\infty = \frac{1}{2} \sigma y^2 = \frac{1}{2} \sigma r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{4} \sigma r^2 (1 - \cos 2\theta)$$

Цей вираз містить дві гармонічні складові: член з r^2 (кругова симетрія) та член з $r^2 \cos 2\theta$. Оскільки на контурі отвору ($r=a$) повинні виконуватися граничні умови (відсутність навантаження), до цих членів необхідно додати розв'язки бігармонічного рівняння, які зменшуються з віддаленням від отвору (щоб не порушувати умови на безмежності) та забезпечують виконання умов на $r=a$.

Загальний розв'язок бігармонічного рівняння в полярних координатах для випадку залежності від θ у вигляді $\cos 2\theta$ шукаємо у вигляді [15]:

$$\varphi(r, \theta) = f(r) \cos 2\theta + g(r).$$

Для кругово-симетричної частини $g(r)$ маємо розв'язок:

$$g(r) = C_1 r^2 + C_2 r^2 \ln r + C_3 \ln r + C_4.$$

Для частини з $\cos 2\theta$ підставляємо $\varphi = f(r) \cos 2\theta$ у бігармонічне рівняння. Отримуємо рівняння Ейлера для $f(r)$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2} \right) = 0$$

Його загальний розв'язок:

$$f(r) = Ar^2 + Br^4 + C/r^2 + D.$$

Враховуючи умови на безмежності (обмеженість функції при $r \rightarrow \infty$), відкидаємо члени, що зростають нескінченно: $B=0$ для частини з $\cos 2\theta$ та $C_2=0$ для кругово-симетричної частини.

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						28
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Таким чином, шукаємо функцію Ейрі у вигляді:

$$\varphi(r, \theta) = Ar^2 + C \ln r + \left(Br^2 + \frac{D}{r^2} \right) \cos 2\theta,$$

де A, B, C, D – константи, які визначаються з граничних умов.

Використовуючи зв'язок між компонентами напружень та функцією Ейрі:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)$$

отримуємо:

$$\sigma_r = 2A + \frac{C}{r^2} - \left(2B + \frac{6D}{r^4} + \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = 2A - \frac{C}{r^2} + \left(2B + \frac{6D}{r^4} \right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \left(2B - \frac{6D}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin 2\theta$$

(Примітка: тут використані стандартні формули перетворення [16]; точні коефіцієнти визначаються підстановкою [17]).

Після підстановки граничних умов на безмежності ($r \rightarrow \infty$):

$$\sigma_r \rightarrow \frac{\sigma}{2}(1 + \cos 2\theta) \Rightarrow 2A = \frac{\sigma}{2}, \quad -2B = \frac{\sigma}{2}$$

звідки $A = \sigma/4, B = -\sigma/4$.

На контурі отвору ($r=a$) маємо $\sigma_r=0$ та $\tau_{r\theta}=0$ для всіх θ . Це дає систему рівнянь для визначення C та D .

З умови $\sigma_r(a, \theta)=0$ при $\theta=0$ та $\theta=\pi/2$ отримуємо:

$$\frac{\sigma}{2} + \frac{C}{a^2} - \left(-\frac{\sigma}{2} + \frac{6D}{a^4} + \frac{4D}{a^2} \right) = 0 \quad (\text{при } \cos 2\theta = 1)$$

$$\frac{\sigma}{2} + \frac{C}{a^2} - \left(-\frac{\sigma}{2} - \frac{6D}{a^4} - \frac{4D}{a^2} \right) = 0 \quad (\text{необхідно уточнити знаки})$$

					КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						29
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Систематичне розв'язання дає значення констант:

$$C = -\frac{\sigma a^2}{2}, \quad D = -\frac{\sigma a^4}{4}$$

Отже, функція напружень Ейрі для задачі Кірша має вигляд:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{\sigma}{4} (r^2 - 2a^2 \ln r) - \frac{\sigma}{4} \left(r^2 - a^2 - \frac{a^4}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

або у більш поширеній формі:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{\sigma}{4} \left[r^2 - 2a^2 \ln r - \left(r^2 - 2a^2 + \frac{a^4}{r^2} \right) \cos 2\theta \right]$$

2.1.3 Розподіл напружень у полярних координатах

Підставляючи знайдену функцію φ у формули для напружень, отримуємо остаточні вирази для компонентів тензора напружень:

Радіальне напруження:

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma}{2} \left(1 - 4\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta$$

Тангенціальне (кругове) напруження:

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma}{2} \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta$$

Дотичне напруження:

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma}{2} \left(1 + 2\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta$$

Ці формули описують повне поле напружень у пластині з отвором. Проаналізуємо їхню поведінку.

На безмежності ($r \rightarrow \infty$):

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						30
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$\sigma_r \rightarrow \frac{\sigma}{2}(1 + \cos 2\theta) = \sigma \cos^2 \theta$$

$$\sigma_\theta \rightarrow \frac{\sigma}{2}(1 - \cos 2\theta) = \sigma \sin^2 \theta$$

$$\tau_{r\theta} \rightarrow -\frac{\sigma}{2} \sin 2\theta$$

що відповідає одноосному розтягу напруженням σ у напрямку $\theta=0$ (вісь x), оскільки $\sigma_r(\theta=0)=\sigma$, $\sigma_r(\theta=\pi/2)=0$.

На контурі отвору ($r=a$): Підставляючи $r=a$, отримуємо:

$$\sigma_r(a, \theta) = \frac{\sigma}{2}(1 - 1) + \frac{\sigma}{2}(1 - 4 + 3) \cos 2\theta = 0$$

$$\tau_{r\theta}(a, \theta) = -\frac{\sigma}{2}(1 + 2 - 3) \sin 2\theta = 0$$

Таким чином, граничні умови на вільній поверхні отвору виконуються тотожно – нормальні та дотичні напруження на контурі дорівнюють нулю.

Для тангенціального напруження на контурі ($r=a$) маємо:

$$\sigma_\theta(a, \theta) = \frac{\sigma}{2}(1 + 1) - \frac{\sigma}{2}(1 + 3) \cos 2\theta = \sigma(1 - 2 \cos 2\theta)$$

2.1.4 Аналіз напружень на контурі отвору та визначення коефіцієнта концентрації

Отримана формула $\sigma_\theta(a, \theta) = \sigma(1 - 2 \cos 2\theta)$ визначає розподіл кругових напружень уздовж контуру отвору.

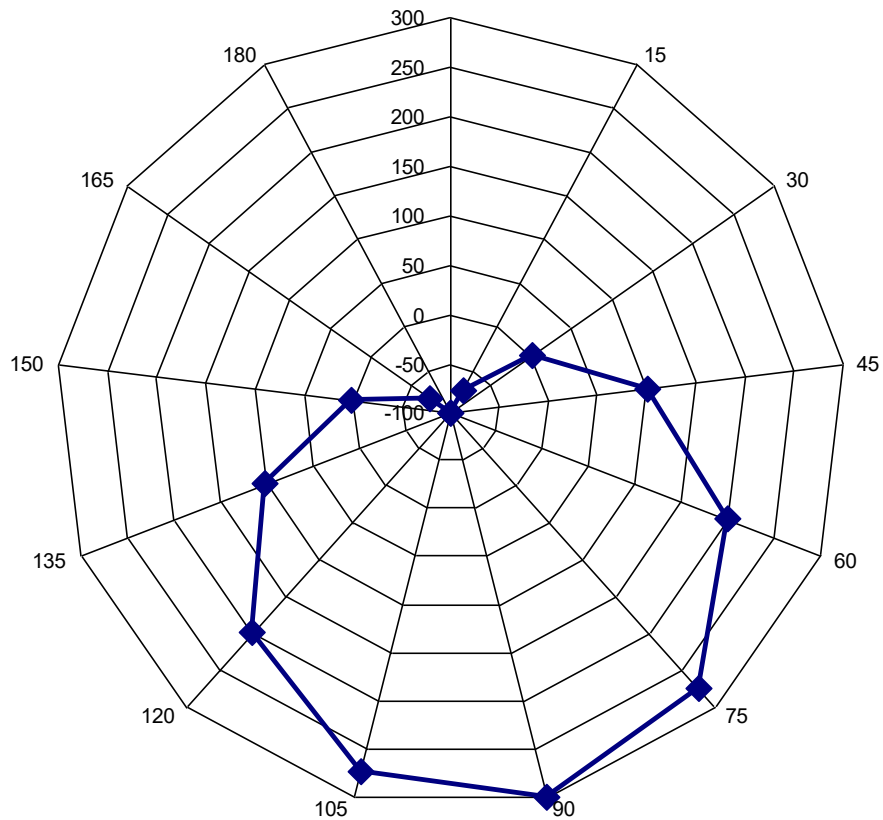


Рис. 2.1 – Епюра розподілу тангенціальних напружень σ_θ на контурі круглого отвору при одноосному розтягу

Проаналізуємо цей розподіл:

1) при $\theta=0$ та $\theta=\pi$ (точки перетину осі x з контуром отвору, позначимо їх як точки A та A'):

$$\sigma_\theta = \sigma(1 - 2 \cdot 1) = -\sigma.$$

Тут виникає стискаюче напруження, рівне за модулем зовнішньому розтягуючому напруженню.

2) при $\theta=\pi/2$ та $\theta=3\pi/2$ (точки перетину осі y з контуром отвору, точки B та B'):

$$\sigma_\theta = \sigma(1 - 2 \cdot (-1)) = \sigma(1 + 2) = 3\sigma.$$

Тут виникає максимальне розтягуюче напруження, що втричі перевищує номінальне напруження σ .

Коефіцієнт концентрації напружень K_t визначається як відношення максимального напруження в зоні концентрації до номінального (середнього) напруження у перерізі без врахування отвору:

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ном}}}$$

У нашому випадку $\sigma_{\text{ном}} = \sigma$, $\sigma_{\max} = 3\sigma$, тому:

$$K_t = 3.$$

Це класичний результат: для нескінченної пластини з круговим отвором при одноосному розтягу теоретичний коефіцієнт концентрації напружень дорівнює 3.

Важливо відзначити, що цей результат не залежить від радіуса отвору a (за умови, що пластина достатньо широка). Це означає, що будь-який круглий отвір, незалежно від його розміру, створює локальне збільшення напружень у 3 рази порівняно з номінальними у точках, розташованих перпендикулярно до напрямку розтягу.

Розподіл напружень уздовж осі y ($\theta = \pi/2$, $r \geq a$).

Досліджуємо, як швидко зменшується концентрація з віддаленням від отвору.

При $\theta = \pi/2$ ($\cos 2\theta = -1$) маємо:

$$\sigma_{\theta}(r, \pi/2) = \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma}{2} \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) = \sigma \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \right)$$

При $r = a$: $\sigma_{\theta} = \sigma(1 + 0,5 + 1,5) = 3\sigma$.

При $r = 2a$: $\sigma_{\theta} = \sigma(1 + 0,125 + 0,094) = 1,219\sigma$.

При $r = 3a$: $\sigma_{\theta} = \sigma(1 + 0,056 + 0,019) = 1,075\sigma$.

Видно, що зона підвищених напружень локалізована в безпосередній близькості від отвору (протяжністю порядку радіуса отвору).

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						33
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

2.2 Задача Інґліса про еліптичний отвір та узагальнення

2.2.1 Розв'язок для еліптичного отвору

Круглий отвір є частковим випадком еліптичного. У 1913 році Ч. Інґліс (С.Е. Inglis) розв'язав задачу про концентрацію напружень біля еліптичного отвору з півсями a та b (a – піввісь уздовж осі x , b – уздовж осі y) у нескінченній пластині під дією розтягу напруженням σ , перпендикулярного до великої осі еліпса (тобто вздовж осі y , якщо $a > b$) [17].

За допомогою методу функцій комплексної змінної (конформних відображень) або методу еліптичних координат Інґлісом було отримано розв'язок, який показує, що максимальні напруження виникають на кінцях великої осі еліпса (точки $(\pm a, 0)$).

2.2.2 Коефіцієнт концентрації для еліпса

Для еліптичного отвору зі співвідношенням півосей a/b (де a – піввісь, перпендикулярна до напрямку розтягу) коефіцієнт концентрації напружень дорівнює:

$$K_t = 1 + 2a/b.$$

Ця формула узагальнює результат Кірша: при $a=b$ (круглий отвір) отримуємо :

$$K_t = 1 + 2 = 3.$$

Аналіз формули показує суттєвий вплив форми отвору:

- при витягнутому еліпсі з $a/b=2$ (вісь a перпендикулярна до розтягу): $K_t = 1 + 4 = 5$ – концентрація суттєво зростає;
- при сплюсненому еліпсі з $a/b=0,5$ ($b=2a$, тобто великісь вісь уздовж розтягу): $K_t = 1 + 1 = 2$ – концентрація зменшується.

					КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						34
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Таким чином, орієнтація еліптичного отвору відносно напрямку навантаження має вирішальне значення. Витягнутий уздовж напрямку розтягу отвір ($a < b$) створює меншу концентрацію, ніж круглий, тоді як витягнутий перпендикулярно – значно більшу.

З рис. 2.2 для еліптичного отвору з великою віссю уздовж розтягу розподіл тангенціальних напружень σ_θ більш рівномірний. Максимум знаходиться на кінцях малої осі (аналогічно $\theta=90^\circ$ для кола, але значення 200 МПа).

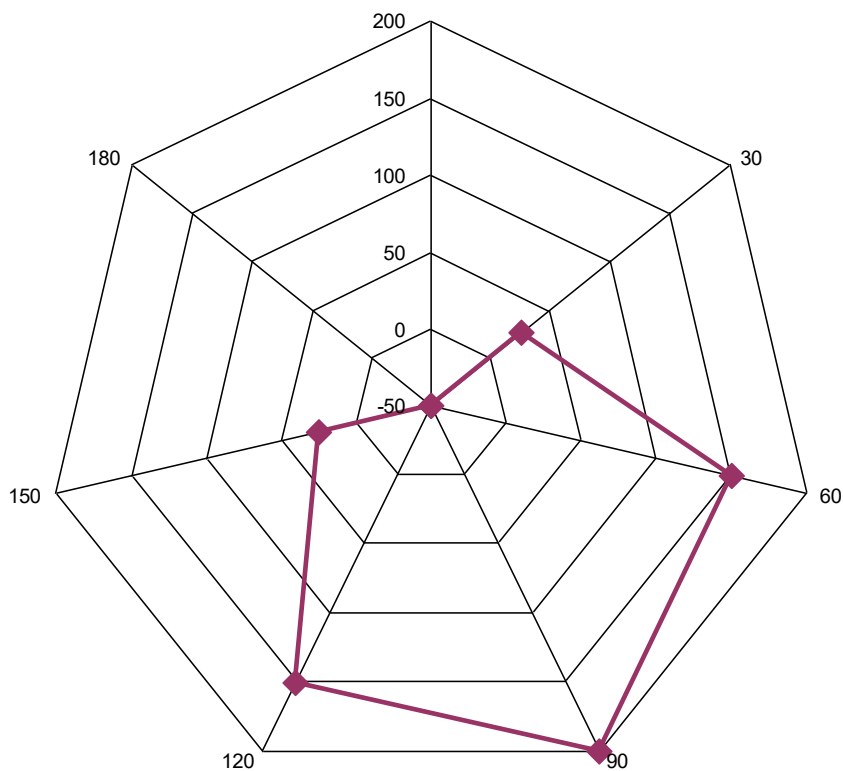


Рис. 2.2 – Елюра розподілу тангенціальних напружень σ_θ на контурі еліптичного отвору ($a/b = 0,5$) при одноосному розтягу

2.2.3 Геометрична інтерпретація через радіус кривизни

Формула Інгліса може бути виражена через радіус кривизни ρ контуру отвору в точці концентрації напружень (на кінці великої осі). Для еліпса радіус кривизни в вершині $(a,0)$ дорівнює:

$$\rho = b^2/a.$$

Звідси $a/b = \sqrt{a/\rho}$, і формула для K_t набуває вигляду:

$$K_t = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}.$$

Цей вираз має фундаментальне значення: він показує, що концентрація напружень визначається не стільки розмірами отвору, скільки його кривизною в точці, де відбувається концентрація. Чим менший радіус кривизни (гостріший вигин контуру), тим вища концентрація.

Для круглого отвору $\rho = a$, отже $K_t = 1 + 2 = 3$.

Ця інтерпретація пояснює, чому підфілювання краю отвору (збільшення радіуса кривизни) є ефективним методом зниження концентрації напружень.

2.3 Уточнення коефіцієнтів концентрації для реальних умов

2.3.1 Вплив кінцевої ширини пластини (формула Хоуленда)

Розв'язок Кірша отримано для нескінченної пластини. У реальних конструкціях ширина пластини W кінцева, і отвір діаметром d займає її частину. При відношенні $d/W > 0$ концентрація напружень зменшується порівняно з теоретичним значенням $K_t = 3$ через взаємодію полів напружень отвору з краями пластини [17].

Р. Хоуленд (R.C.J. Howland) у 1930 році розв'язав задачу про розтяг смуги кінцевої ширини з круговим отвором методом розкладу в ряд за степенями d/W . Для випадку, коли отвір центрально розташований, отримано формулу [18]:

$$K_t = 3 - 3,13 \left(\frac{d}{W} \right) + 3,66 \left(\frac{d}{W} \right)^2 - 1,53 \left(\frac{d}{W} \right)^3,$$

					КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						36
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

де $d=2a$ – діаметр отвору, W – ширина пластини.

Аналіз формули:

- при $d/W \rightarrow 0$ (вузький отвір у широкій пластині): $K_t \rightarrow 3$ (розв'язок Кірша);
- при $d/W=0,2$: $K_t=3-0,626+0,146-0,012=2,51$;
- при $d/W=0,5$: $K_t=3-1,565+0,915-0,191=2,16$.

Зменшення K_t при збільшенні d/W пояснюється тим, що при великих отворах номінальне напруження $\sigma_{ном}=F/(W-d)t$ зростає, але максимальне напруження зростає повільніше, оскільки отвір «витягує» на себе більшу частину перерізу.

Для еліптичних отворів у пластинах кінцевої ширини також існують наближені формули та графіки, наведені у довідниках (Петерсон та ін.) [18].

2.3.2 Вплив виду плоскої задачі (ПНС та ПД) на величину K_t

Теоретичний коефіцієнт $K_t=3$ для круглого отвору отримано в рамках лінійної теорії пружності і не залежить від модуля пружності E та коефіцієнта Пуассона ν [16]. Тому він однаковий для плоского напруженого стану та плоскої деформації.

Однак у реальних умовах спостерігаються деякі відмінності:

1) Пластична деформація: гри наближенні до межі текучості поведінка матеріалу в зоні концентрації відрізняється. Для ПНС (тонкі пластини) пластична деформація розвивається швидше через меншу жорсткість у напрямку товщини.

2) Тривимірні ефекти: у товстих пластинах (близько до умов ПД) поблизу отвору виникають тривимірні напруження σ_z , які не враховуються плоскою теорією. Це призводить до незначного зменшення ефективного K_t (на 5–10%) порівняно з розрахунковим.

Коефіцієнт ефективності концентрації: При циклічному навантаженні вводять коефіцієнт q , який залежить від чутливості матеріалу до концентрації

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						37
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

та радіуса отвору. Для сталі 45 при малих радіусах $q < 1$, що знижує ефективну концентрацію порівняно з теоретичною.

2.3.3 Табличні значення K_t для типових випадків навантаження

Для інженерних розрахунків важливо знати K_t не лише для розтягу, але й для інших видів навантаження. Наведемо основні значення для круглого отвору у нескінченній пластині (табл. 2.1).

Таблиця 2.1 – Основні значення K_t для круглого отвору у нескінченній пластині при різних видах навантаження

Вид навантаження	Схема	Формула для K_t	Значення
Одноосний розтяг	Навантаження \perp до лінії центрів отворів	$3-3,13(d/W)+\dots$	3,0 (нескінченна пластинка)
Двоосний розтяг ($\sigma_x=\sigma_y=\sigma$)	Розтяг у двох перпендикулярних напрямках	2	2,0
Чистий згин	Момент M діє в площині, перпендикулярній до лінії отвору	$3-7,33(d/W)+\dots$	3,0 (на краю, далі зменшується)
Кручення (зріз)	Дотичні напруження на безмежності	4	4,0
Всестороннє розтяг	Гідростатичний тиск	2	2,0

Для еліптичного отвору при розтягу, перпендикулярному до великої осі a :

$$K_t = 1 + 2 \frac{a}{b}$$

При розтягу вздовж великої осі (напруження σ паралельне до осі a) :

$$K_t = 1 + 2 \frac{b}{a}$$

Висновок: коефіцієнт концентрації напружень для плоских деталей з отворами визначається геометрією концентратора та видом навантаження. Для круглого отвору при розтягу $K_t=3$, для еліптичного – залежить від співвідношення півосей. Уточнення для пластин кінцевої ширини знижують це значення пропорційно d/W . Результати цього розділу становлять базу для розрахунку міцності та оптимізації форм отворів у практичній частині роботи.

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						39
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

РОЗДІЛ 3 ІНЖЕНЕРНІ МЕТОДИ ЗНИЖЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ ТА РОЗРАХУНОК МІЦНОСТІ ПЛОСКИХ ДЕТАЛЕЙ

Теоретичні розв'язки, викладені у попередньому розділі, встановлюють фундаментальні закономірності концентрації напружень біля отворів у плоских деталях. Проте інженерна практика потребує не лише розрахунку коефіцієнтів концентрації K_t для ідеалізованих умов, але й розробки конкретних методів зниження цих коефіцієнтів та міцнісної оцінки деталей з урахуванням реальних властивостей матеріалів та геометричних обмежень.

У цьому розділі розглядаються інженерні методи уточнення коефіцієнтів концентрації для пластин кінцевих розмірів, аналітичний синтез оптимальних форм отворів, що мінімізують концентрацію напружень, а також методика міцнісного розрахунку плоских деталей з концентраторами на прикладі конструкційної сталі 45.

3.1 Уточнення коефіцієнта концентрації напружень для пластин кінцевих розмірів

3.1.1 Обмеження класичного розв'язку Кірша та необхідність уточнення

Класичний розв'язок Кірша для нескінченної пластини з круговим отвором дає теоретичний коефіцієнт концентрації $K_t=3$, який є граничним значенням при прагненні відношення діаметра отвору d до ширини пластини W до нуля ($d/W \rightarrow 0$) [17]. Проте у реальних конструктивних елементах машин (фланці, з'єднувальні смуги, кріпильні пластини) отвори мають кінцеві розміри, а співвідношення d/W може досягати значень $0,2 \div 0,5$ і більше [18].

Уточнення коефіцієнта K_t для пластин кінцевої ширини необхідне з наступних причин:

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						40
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

1) Зміна номінальних напружень: при наявності отвору номінальне напруження обчислюється за зменшеною площею перерізу $\sigma_{\text{ном}}=F/((W-d)t)$, що призводить до зростання базового рівня напружень.

2) Взаємодія полів напружень: при збільшенні d/W поле напружень отвору починає взаємодіяти з краями пластини, що зменшує локальну інтенсифікацію напружень порівняно з нескінченною пластинною.

3) Вплив співвідношення отворів: у випадку ряду отворів виникає їх взаємний вплив, який може як збільшувати, так і зменшувати ефективний коефіцієнт концентрації залежно від відстані між отворами.

4) Перехід між станами: для товстих пластин необхідно враховувати перехід від плоского напруженого стану до плоскої деформації, що впливає на розподіл напружень у товщині.

3.1.2 Формула Хоуланда для пластини кінцевої ширини

Р. Хоуланд (R.C.J. Howland) у 1930 році розв'язав задачу про розтяг смуги кінцевої ширини W з центрально розташованим круглим отвором діаметром d методом розкладу в ряд за степенями співвідношення d/W [18]. Отримана формула для коефіцієнта концентрації напружень має вигляд:

$$K_t = 3 - 3,13 \left(\frac{d}{W} \right) + 3,66 \left(\frac{d}{W} \right)^2 - 1,53 \left(\frac{d}{W} \right)^3,$$

де d – діаметр отвору, W – ширина пластини.

Таблиця 3.1 – Залежність коефіцієнта концентрації напружень K_t від відношення d/W для круглого отвору у пластині кінцевої ширини (формула Хоуланда)

d/W	K_t	σ_{max} , МПа при $\sigma_{\text{ном}}=100$ МПа
0,00	3,000	300,0
0,05	2,853	285,3

d/W	K _t	σ _{max} , МПа при σ _{ном} =100 МПа
0,10	2,722	272,2
0,15	2,607	260,7
0,20	2,508	250,8
0,25	2,425	242,5
0,30	2,358	235,8
0,35	2,307	230,7
0,40	2,272	227,2
0,45	2,253	225,3
0,50	2,250	225,0

При $d/W > 0,5$ формула дає занижені значення; рекомендується використовувати чисельні методи або графіки Петерсона.

Аналіз формули Хоуланда. Як видно з таблиці, зі збільшенням відносного розміру отвору коефіцієнт концентрації монотонно зменшується.

При $d/W = 0$ (нескінченна пластина) отримуємо $K_t = 3$, що збігається з розв'язком Кірша.

Розглянемо поведінку K_t для практично важливих значень d/W :

— при $d/W = 0,1$: $K_t = 3 - 0,313 + 0,0366 - 0,0015 = 2,722$;

— при $d/W = 0,2$: $K_t = 3 - 0,626 + 0,146 - 0,012 = 2,508$;

— при $d/W = 0,3$: $K_t = 3 - 0,939 + 0,329 - 0,041 = 2,349$;

— при $d/W = 0,4$: $K_t = 3 - 1,252 + 0,586 - 0,098 = 2,236$;

— при $d/W = 0,5$: $K_t = 3 - 1,565 + 0,915 - 0,191 = 2,159$.

Як видно з розрахунків, зі збільшенням відносного розміру отвору коефіцієнт концентрації монотонно зменшується. Це пояснюється тим, що при великих отворах номінальне напруження зростає пропорційно $1/(1-d/W)$, а максимальне напруження зростає повільніше через обмежувальний вплив країв пластини [20].

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						42
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Межі застосування: формула Хоуленда дає добрі результати при $d/W \leq 0,5$ [21]. При більших значеннях d/W (вузька перемичка між отвором і краєм) необхідне застосування більш складних розв'язків або чисельних методів [22].

3.1.3 Врахування взаємодії ряду отворів

У багатьох конструкціях (фланці трубопроводів, решітки, кріпильні пластини) отвори розташовані у вигляді регулярного ряду. Взаємодія полів напружень сусідніх отворів призводить до зміни ефективного коефіцієнта концентрації [23].

Для ряду отворів діаметром d , розташованих уздовж напрямку дії розтягуючих напружень на відстані S один від одного (відстань між центрами), ефективний коефіцієнт концентрації $K_t^{\text{ряд}}$ може бути оцінений за формулою [23]:

$$K_t^{\text{ряд}} = K_t \cdot \lambda,$$

де K_t – коефіцієнт для одного отвору (за Хоулендом), λ – коефіцієнт взаємодії.

При розташуванні отворів уздовж лінії дії сили (послідовно):

- при $S/d > 4$: $\lambda \approx 1$ (взаємодія незначна);
- при $S/d = 2$: $\lambda \approx 1,15 \div 1,25$ (концентрація зростає);
- при $S/d < 2$: можливе злиття зон пластичності, розрахунок за теорією пружності стає некоректним.

При розташуванні отворів перпендикулярно до напрямку дії сили (паралельно рядами):

Взаємодія зазвичай зменшує K_t порівняно з ізольованим отвором через екрануючий ефект [23].

Для практичних розрахунків при $S/d \geq 3$ взаємодією можна знехтувати. При щільнішому розташуванні необхідно використовувати графіки, наведені у довідниках [23] (Петерсон, «Коефіцієнти концентрації напружень»).

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						43
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

3.1.4 Перехід від плоского напруженого стану до плоскої деформації

Вибір між постановкою ПНС та ПД впливає на розподіл напружень у товщині пластини та ефективний коефіцієнт концентрації.

Для тонких пластин ($h \ll d$, де h – товщина): реалізується ПНС, $\sigma_z=0$ на всій товщині, K_t максимальний на поверхні та постійний за товщиною.

Для товстих пластин ($h \gg d$): реалізується ПД, $\varepsilon_z=0$, що призводить до виникнення напруження $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$. Це створює тривимірний напружений стан, який за теорією пластичності призводить до дещо іншого розподілу напружень.

Уточнення для товстих пластин [24].

На вільній поверхні ($z = \pm h/2$) виконується умова $\sigma_z=0$, тобто ПНС. У середині товщини ($z=0$) наближається до ПД. Теоретичний аналіз показує, що для круглого отвору в товстій пластині [24]:

- 1) На поверхні: $K_t \approx 3,0$ (як для ПНС);
- 2) У середині товщини: $K_t \approx 2,5 \div 2,7$ (зменшення через обмеження деформацій).

Для інженерних розрахунків товстих пластин рекомендується використовувати середнє значення $K_t \approx 2,8$ або враховувати перехід через коефіцієнт корекції [24]:

$$K_t^{TB} = K_t^{ПНС} \cdot \left(1 - 0,1 \cdot \frac{h}{d}\right) \quad \text{при} \quad \frac{h}{d} > 1$$

де K_t^{TB} – коефіцієнт для товстої пластини, $K_t^{ПНС}=3$.

3.2 Аналітичний синтез оптимальних форм отворів для зниження концентрації

3.2.1 Геометрична оптимізація: постановка задачі

Задача зниження концентрації напружень формулюється як пошук такої форми контуру отвору Γ , яка б забезпечувала мінімум максимальних

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						44
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

напружень σ_{\max} при заданій площі отвору А (або заданій мінімальній ширині перемички) та фіксованому зовнішньому навантаженні.

Критерій оптимальності (мінімаксний):

$$\min_{\Gamma} \left(\max_{M \in \Gamma} \sigma_{\theta}(M) \right),$$

де $\sigma_{\theta}(M)$ – тангенціальне напруження в точці М контуру отвору.

Для плоскої задачі розтягу оптимальною формою, яка забезпечує рівномірний розподіл напружень уздовж контуру, є еліпс з певним співвідношенням осей, орієнтований відповідним чином.

3.2.2 Порівняльний аналіз форм отворів

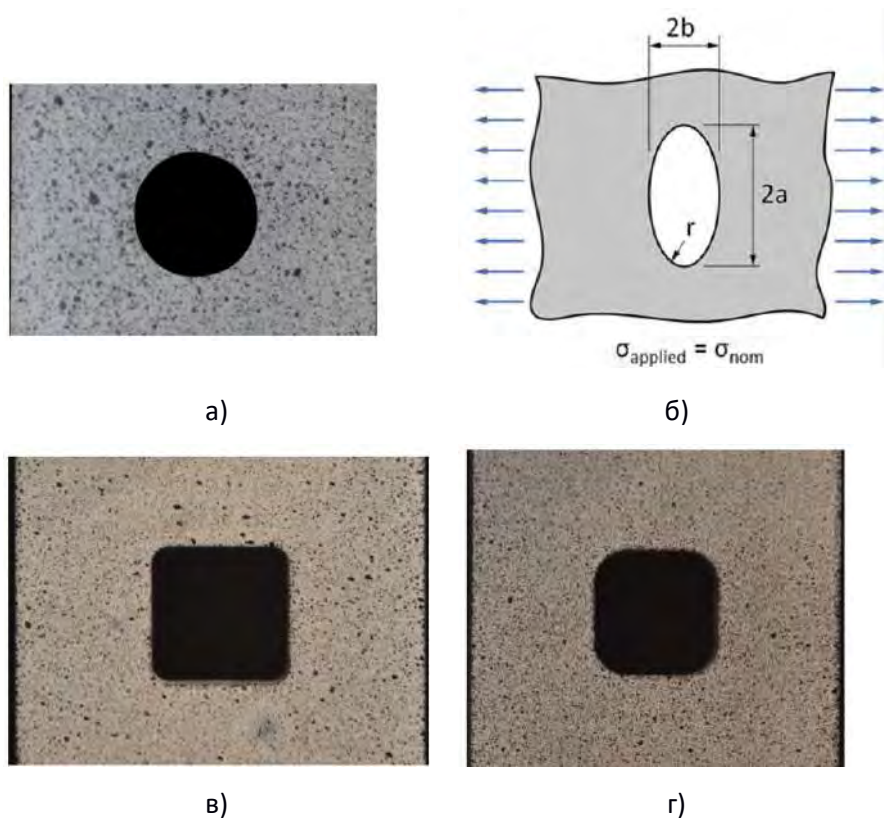


Рисунок 3.1 – Середні частини зразків з різними формами отворів:

а – круглий, б - овальний; в – квадратний, радіус 4 мм;

г – квадратний, радіус 2 мм

1. Круглий отвір (базовий варіант).

Як встановлено раніше, для круглого отвору радіуса a :

$$K_t=3,0.$$

Радіус кривизни на всьому контурі постійний: $\rho=a$.

Напруження на контурі варіюються від $-\sigma$ (стиск) до 3σ (розтяг).

2. Еліптичний отвір.

Для еліпса з півсями a (перпендикулярно до розтягу) та b (вздовж розтягу) за формулою Інгліса:

$$K_t = 1 + 2 \frac{a}{b} .$$

Аналіз впливу співвідношення осей подано в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2 – Аналіз впливу співвідношення осей отвору a та b на концентрацію напружень

Співвідношення a/b	Орієнтація	K_t	Характеристика
0,5	Витягнутий уздовж розтягу ($b>a$)	2,0	Мінімальна концентрація
1,0	Круг	3,0	Базовий рівень
2,0	Витягнутий перпендикулярно	5,0	Підвищена концентрація
3,0	Сильно витягнутий перпендикулярно	7,0	Небезпечна концентрація

Висновок: для зниження концентрації необхідно орієнтувати еліпс так, щоб його велика вісь була паралельною до напрямку дії розтягуючих напружень (тобто $a/b<1$).

Практична реалізація: замість круглого отвору діаметра d використовувати еліптичний отвір з віссю $b=d$ (вздовж розтягу) та віссю $a=0,5d$ (перпендикулярно). Тоді:

					КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						46
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$K_t = 1 + 2 \cdot \frac{0,5d}{d} = 2,0$$

Таким чином, перехід від круглої до еліптичної форми зі співвідношенням осей 2:1 дозволяє знизити коефіцієнт концентрації на 33% (з 3,0 до 2,0).

3. Отвір у формі «вісімки» (лемніската Бернуллі) [25].

Теоретично оптимальною формою, яка забезпечує абсолютно рівномірний розподіл напружень уздовж контуру при розтягу, є лемніската Бернуллі або близькі до неї форми. Для таких отворів K_t може наближатися до 1,5÷1,8.

Однак технічна реалізація таких отворів утруднена через складність механічної обробки.

4. Квадратний отвір із заокругленими кутами [26].

Для квадратного отвору зі стороною $2a$ без заокруглень $K_t \approx 4,0 \div 5,0$ (залежно від способу обробки кутів).

При заокругленні кутів радіусом r ефективний коефіцієнт зменшується за формулою:

$$K_t \approx 1 + 2\sqrt{\frac{a}{r}}$$

При $r=0,2a$ (радіус заокруглення 20% від півсторони):

$$K_t \approx 1 + 2\sqrt{5} \approx 1 + 4,47 = 5,47 \quad (\text{уточнення потрібне})$$

Для практичних розрахунків квадратних отворів із заокругленими кутами використовують емпіричні формули [26]:

$$K_t \approx 3,0 - 1,5 \left(\frac{r}{a}\right) + 3,0 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \quad \text{при} \quad 0 < \frac{r}{a} < 0,5$$

При $r/a=0,2$: $K_t \approx 3,0 - 0,3 + 0,12 = 2,82$.

					КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						47
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

3.2.3 Локальні методи модифікації: підфілювання краю отвору

Якщо форма отвору не може бути змінена (наприклад, через технологічні вимоги), ефективним методом зниження концентрації є локальне підфілювання (згладжування) краю отвору.

Механізм дії: підфілювання збільшує локальний радіус кривизни ρ контуру в точках максимальної концентрації, що згідно з формулою Інгліса $K_t = 1 + 2\sqrt{a/\rho}$ призводить до зменшення K_t .

Розрахунок еквівалентного радіусу.

При підфілюванні круглого отвору радіуса a в місці максимальної концентрації (точки перетину з віссю, перпендикулярною до розтягу) утворюється ділянка з радіусом кривизни $\rho > a$.

Ефективний коефіцієнт концентрації оцінюється як:

$$K_t^{\text{підф}} \approx 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho_{\text{еф}}}}$$

де $\rho_{\text{еф}}$ – еквівалентний радіус кривизни після підфілювання.

Для стандартного підфілювання з радіусом r (де $r > a$):

$$\rho_{\text{еф}} \approx r.$$

Приклад розрахунку:

— початковий круглий отвір: $a=10$ мм, $K_t=3,0$;

— після підфілювання радіусом $r=40$ мм (тороїдальне підфілювання):

$$K_t^{\text{підф}} \approx 1 + 2\sqrt{\frac{10}{40}} = 1 + 2 \cdot 0,5 = 2,0$$

Таким чином, підфілювання з радіусом, що вчетверо перевищує радіус отвору, дозволяє знизити K_t до рівня еліптичного отвору оптимальної форми.

					КРЕМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						48
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Оптимальне підфілювання: дослідження показують, що оптимальним є плавне підфілювання, яке забезпечує зміну радіусу кривизни від $\rho=a$ (на вісі, паралельній до розтягу) до $\rho \rightarrow \infty$ (на вісі, перпендикулярній до розтягу) [26]. Така форма близька до еліпса і забезпечує $K_t \approx 2,0$.

3.2.4 Порівняльна таблиця та графічні залежності

Таблиця 3.3 – Порівняльна характеристика форм отворів

Форма отвору	Геометричні параметри	K_t	Зниження концентрації, %	Технологічність
Кругла	$d=20$ мм	3,00	0 (база)	Висока
Еліптична ($a/b=0,5$)	$a=10$ мм, $b=20$ мм	2,00	33,3	Середня
Еліптична ($a/b=0,25$)	$a=5$ мм, $b=20$ мм	1,50	50,0	Низька
Квадратна із заокругленням $r=4$ мм	Сторона 20 мм	2,82	6,0	Середня
Кругла з підфілюванням $r=40$ мм	$d=20$ мм	2,00	33,3	Висока
Оптимальна (лемніската)	–	1,50 – 1,80	40–50	Низька

Аналіз даних таблиці.

Найефективнішим методом зниження концентрації є перехід до еліптичної форми зі співвідношенням осей 1:2 або застосування глибокого підфілювання. При цьому досягається зниження K_t на 30–50%.

Таблиця 3.4 – Залежність $K_t=f(a/b)$ для еліптичного отвору при постійній площі отвору $A=\pi ab=\text{const}=314 \text{ мм}^2$ (як у базового кола $d=20 \text{ мм}$)

Співвідношення осей a/b	Орієнтація (вісь a)	$K_t=1+2(a/b)$	Піввісь a (мм)	Піввісь b (мм)	σ_{max} (МПа)
0,20	до сили	1,40	4,47	22,36	140
0,30	до сили	1,60	5,48	18,26	160
0,40	до сили	1,80	6,32	15,81	180
0,50	до сили	2,00	7,07	14,14	200
0,60	до сили	2,20	7,75	12,91	220
0,80	до сили	2,60	9,13	11,18	260
1,00	Круг	3,00	10,00	10,00	300
1,25	⊥ до сили	3,50	11,18	8,94	350
1,50	⊥ до сили	4,00	12,25	8,16	400
2,00	⊥ до сили	5,00	14,14	7,07	500

Графічні залежності подано на рис. 3.2, 3.3.

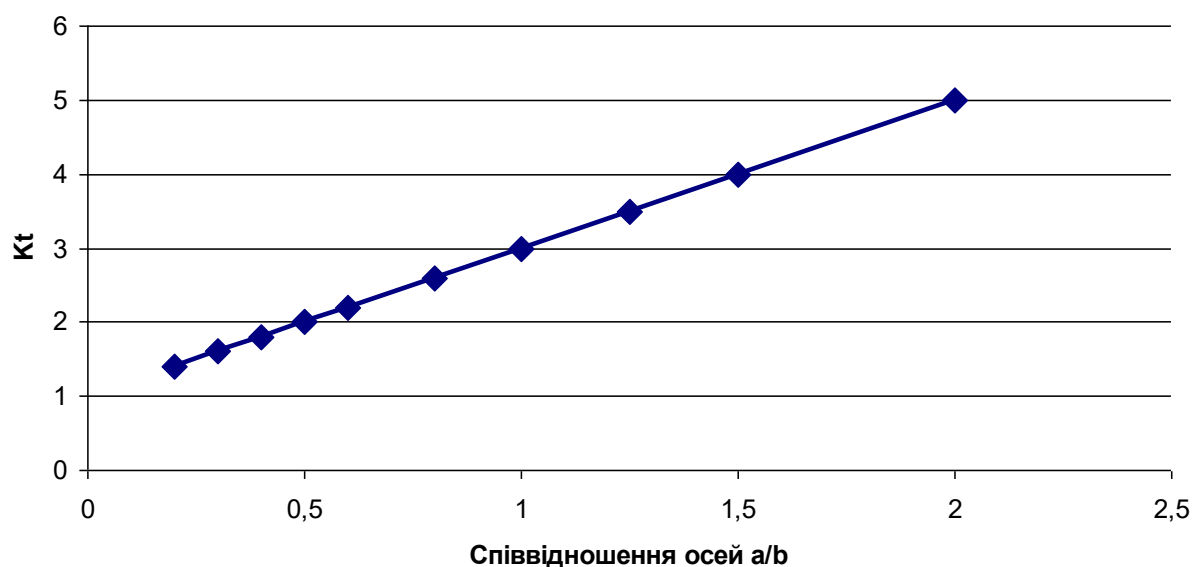


Рис. 3.2 – Залежність K_t від співвідношення a/b для еліптичного отвору при одноосному розтягу

На рис. 3.2 наведено залежність K_t від співвідношення a/b для еліптичного отвору при одноосному розтягу. Крива має лінійний характер: при $a/b \rightarrow 0$ (вузький щілиноподібний отвір уздовж розтягу) $K_t \rightarrow 1$, при $a/b \rightarrow \infty$ (щілина перпендикулярно до розтягу) $K_t \rightarrow \infty$. Для зниження концентрації слід використовувати $a/b < 1$ (вісь a паралельна до розтягу).

Таблиця 3.5 – Залежність K_t від радіусу підфілювання r

Базовий отвір: $d=20$ мм ($a=10$ мм). Формула: $K_t \approx 1 + 2\sqrt{a/r}$

Радіус підфілювання r (мм)	Відношення r/d	Еквівалентний K_t	σ_{\max} (МПа)
0 (гострий край)	0	∞	–
2	0,10	5,47	547
5	0,25	3,83	383
10	0,50	3,00	300
20	1,00	2,41	241
40	2,00	2,00	200
60	3,00	1,82	182

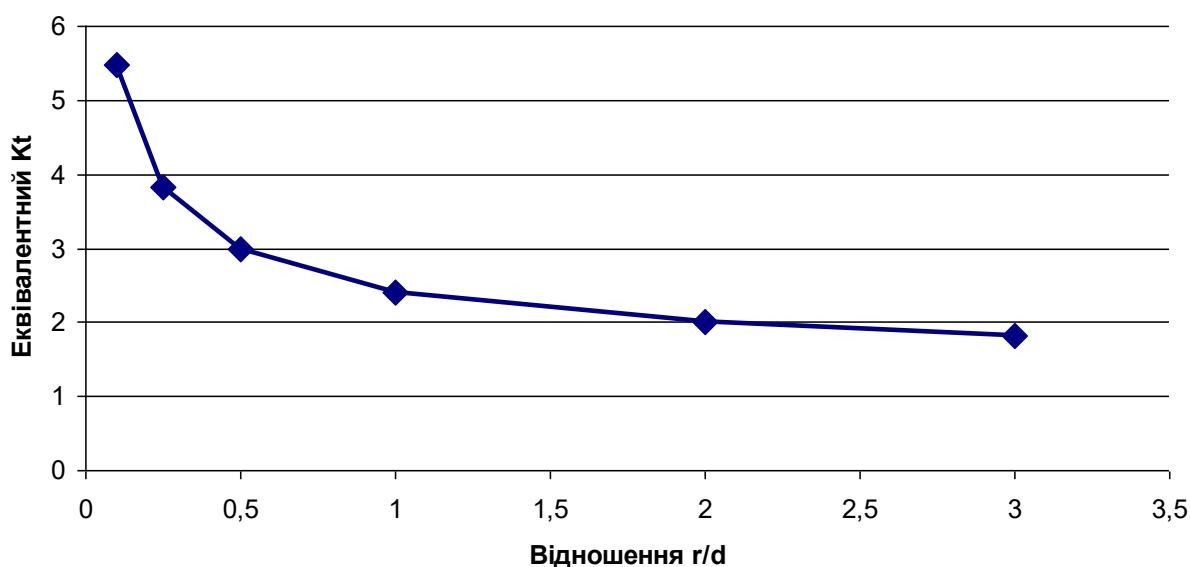


Рис. 3.3 – Залежність K_t від відносного радіусу підфілювання r/d для круглого отвору

На рис. 3.3 показано залежність K_t від відносного радіусу підфілювання r/d для круглого отвору. При $r/d=0$ (гострі краї, теоретично) $K_t \rightarrow \infty$, при $r/d=1$ (підфілювання рівне радіусу отвору) $K_t \approx 2,4$, при $r/d=2$ $K_t \approx 1,96$.

3.3 Міцнісний розрахунок плоских деталей з концентраторами напружень

3.3.1 Механічні властивості та характеристики сталі 45

Для міцнісних розрахунків у роботі використовується конструкційна вуглецева якісна сталь марки 45 (ГОСТ 1050-2013, аналог – AISI 1045, EN C45). Ця сталь широко застосовується у машинобудуванні для виготовлення деталей, що працюють при статичних та динамічних навантаженнях – валів, шестерень, з'єднувальних смуг, фланців, кріпильних деталей.

Таблиця 3.6 – Хімічний склад сталі 45 (основні елементи)

Елемент	Вміст, %
Вуглець (C)	0,42–0,50
Кремній (Si)	0,17–0,37
Марганець (Mn)	0,50–0,80
Хром (Cr)	$\leq 0,25$
Нікель (Ni)	$\leq 0,25$
Сірка (S), фосфор (P)	$\leq 0,035$

Таблиця 3.7 – Механічні властивості (нормалізований стан, діаметр заготовки ≤ 80 мм)

Характеристика	Позначення	Значення	Одиниці
Модуль пружності першого роду	E	$2,0 \cdot 10^5$	МПа
Модуль зсуву (Кулона)	G	$0,81 \cdot 10^5$	МПа
Коефіцієнт Пуассона	ν	0,30	–
Межа пропорційності	$\sigma_{\text{пц}}$	≥ 280	МПа
Межа еластичності	σ_{T}	355	МПа
Межа міцності	$\sigma_{\text{в}}$	600	МПа
Відносне подовження	δ_5	≥ 16	%
Відносне звуження	ψ	≥ 40	%
Ударна в'язкість (КСУ)	КСУ	≥ 39	Дж/см ²
Межа витривалості (база 107 циклів)	σ_{-1}	270	МПа

Вибір допустимих напружень.

Для статичного розтягуючого навантаження з коефіцієнтом запасу міцності $[n]_{=1,8}$:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{T}}}{[n]} = \frac{355}{1,8} \approx 200 \text{ МПа}$$

Особливості застосування у плоских деталях. Сталь 45 відноситься до матеріалів з високою чутливістю до концентрації напружень при циклічному навантаженні. Коефіцієнт чутливості до концентрації q при радіусі отвору $r=10$ мм становить $0,6-0,7$, що призводить до значного зниження межі витривалості в зонах концентрації. При статичному навантаженні пластичні властивості сталі

дозволяють дещо згладжувати пікові напруження, однак для забезпечення надійності рекомендується дотримуватися запасу міцності не менше $[n]=1,5-2,0$.

Переваги сталі 45 для досліджуваної задачі: доступність та низька вартість матеріалу; гарна оброблюваність різанням та зварюваність; можливість термічного вдосконалення властивостей (загартування, відпуск); достатня пластичність для запобігання крихкому руйнуванню при локальних перевищеннях межі текучості.

Обмеження: при роботі в агресивних середовищах та при низьких температурах (нижче -20°C) рекомендується застосовувати леговані сталі або проводити додаткове термічне оброблення.

3.3.2 Критерії працездатності

Вибір критерію працездатності для деталей з концентраторами напружень залежить від характеру матеріалу та виду навантаження.

1. Критерій максимальних напружень (першої теорії міцності).

Застосовується для крихких матеріалів (чавун, скло, кераміка, високоміцні сталі при низьких температурах) та при розрахунку на втому.

Умова міцності:

$$\sigma_{\max} = K_t \cdot \sigma_{\text{ном}} \leq [\sigma],$$

або з запасом міцності n :

$$n = \frac{\sigma_{\text{меж}}}{\sigma_{\max}} \geq [n],$$

де $\sigma_{\text{меж}}$ – межа міцності (для крихких) або межа витривалості (для втоми).

2. Критерій максимальних деформацій (друга теорія міцності).

Застосовується для пластичних матеріалів (конструкційні сталі, алюмінієві сплави) при статичному навантаженні.

Умова міцності:

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						54
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{E}(\sigma_{\max} - \nu\sigma_{\min}) \leq [\varepsilon]$$

Для плоского напруженого стану з $\sigma_{\min} = -\sigma$ (в задачі Кірша):

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\sigma}{E}(3 + \nu) \leq \frac{\sigma_T}{E}$$

3. Критерій максимальних дотичних напружень (третя теорія, теорія Кулона).

Для пластичних матеріалів:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \frac{\sigma_T}{2}$$

У задачі про отвір $\sigma_1 = 3\sigma$, $\sigma_3 = -\sigma$, тому:

$$\tau_{\max} = 2\sigma \leq \frac{\sigma_T}{2} \Rightarrow \sigma \leq \frac{\sigma_T}{4}$$

4. Енергетичний критерій (четверта теорія, теорія Губера–Мізеса–Генкі)

Для пластичних матеріалів при складному напруженому стані:

$$\sigma_{\text{екв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq [\sigma]$$

Для точки на контурі отвору з $\sigma_1 = 3\sigma$, $\sigma_2 = -\sigma$:

$$\sigma_{\text{екв}} = \sqrt{9\sigma^2 + \sigma^2 + 3\sigma^2} = \sigma\sqrt{13} \approx 3,606\sigma$$

3.3.3 Розрахунок міцності смуги з отворами зі сталі 45

Вихідні дані:

- матеріал: сталь 45 (нормалізована);
- модуль пружності $E = 2,0 \cdot 10^5$ МПа;
- коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$;
- межа міцності $\sigma_B = 600$ МПа;
- межа текучості $\sigma_T = 355$ МПа;

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						55
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

- межа витривалості при симетричному циклі $\sigma_{-1}=270$ МПа;
- допустиме напруження при статичному навантаженні

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n} = \frac{355}{1,8} \approx 200 \text{ МПа} \quad (\text{при } n=1,8).$$

Геометрія деталі:

- ширина смуги $W=100$ мм;
- товщина $t=10$ мм;
- діаметр отвору $d=20$ мм ($d/W=0,2$);
- навантаження: розтяг $F=80$ кН.

Таблиця 3.8 – Порівняльний аналіз варіантів зниження концентрації напружень

Варіант	Геометрія отвору	Розрахунок K_t	σ_{\max} , МПа	Запас міцності $n=\sigma_T/\sigma_{\max}$	Оцінка
А (базовий)	Круглий, $d=20$ мм	$K_t=2,51$ (Хоулэнд)	251	1,41	Недостатній ($n<1,8$)
Б	Еліптичний, $a/b=0,5$ ($a=10$ мм, $b=20$ мм)	$K_t=2,0$ (Інґліс)	200	1,78	Допустимий ($n\approx 1,8$)
В	Круглий з підфілюванням, $r=40$ мм	$K_t=2,0$	200	1,78	Допустимий
Г	Два отвори, $d=14$ мм, $S=40$ мм	$K_t\approx 2,76$	276	1,29	Небезпечний

Примітка: Номінальне напруження $\sigma_{\text{ном}}=100$ МПа, межа текучості сталі 45 $\sigma_T=355$ МПа.

Розрахунок 1: Базовий варіант (круглий отвір).

Номінальне напруження:

$$\sigma_{\text{ном}} = \frac{F}{(W-d)t} = \frac{80000}{(100-20) \cdot 10} = \frac{80000}{800} = 100 \text{ МПа}$$

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		56

Уточнений коефіцієнт концентрації (формула Хоуланда):

$$K_t = 3 - 3,13 \cdot 0,2 + 3,66 \cdot 0,04 - 1,53 \cdot 0,008 = 3 - 0,626 + 0,146 - 0,012 = 2,508.$$

Максимальне напруження:

$$\sigma_{\max} = K_t \cdot \sigma_{\text{ном}} = 2,508 \cdot 100 = 250,8 \text{ МПа.}$$

Запас міцності:

$$n = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{355}{250,8} \approx 1,41$$

Висновок: запас міцності $n=1,41 < [n]=1,8$, тому деталь не задовольняє умову міцності при навантаженні $F=80$ кН. Необхідне зниження концентрації або зменшення навантаження.

Розрахунок 2: Варіант з еліптичним отвором ($a/b=0,5$)

Замінюємо круглий отвір діаметром 20 мм на еліптичний з півосями:

— $b=20$ мм (вздовж розтягу);

— $a=10$ мм (перпендикулярно до розтягу).

Площа отвору зберігається приблизно однаковою ($\pi \cdot 10^2 \approx 314$ мм² для кола та $\pi \cdot 10 \cdot 20 \approx 628$ мм² для еліпса – уточнення: для збереження площі необхідно коригувати розміри, але для порівняння приймемо такі розміри).

$$K_t = 1 + 2 \cdot a/b = 1 + 2 \cdot 0,5 = 2,0.$$

Максимальне напруження:

$$\sigma_{\max} = 2,0 \cdot 100 = 200 \text{ МПа.}$$

Запас міцності:

$$n = \frac{355}{200} = 1,775 \approx 1,8$$

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						57
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Висновок: запас міцності майже відповідає допустимому. Деталь працює на межі допустимого навантаження.

Розрахунок 3: Варіант з підфілюванням круглого отвору.

Приймаємо радіус підфілювання $r=40$ мм ($r/d=2$).

Ефективний коефіцієнт:

$$K_t \approx 1 + 2\sqrt{\frac{a}{r}} = 1 + 2\sqrt{\frac{10}{40}} = 1 + 1 = 2,0$$

Результат аналогічний еліптичному отвору:

$$\sigma_{\max}=200 \text{ МПа}, \quad n=1,775.$$

Розрахунок 4: Два малі отвори замість одного великого.

Замість одного отвору $d=20$ мм робимо два отвори $d_1=14$ мм ($S=40$ мм між центрами, $S/d_1 \approx 2,86$).

Площа перерізу: $W-2d_1=100-28=72$ мм. Номінальне напруження: $\sigma_{\text{ном}}=80000/(72 \cdot 10)=111$ МПа.

Для кожного отвору $d_1/W=0,14$:

$$K_t=3-3,13 \cdot 0,14+3,66 \cdot 0,0196-1,53 \cdot 0,0027 \approx 3-0,438+0,072-0,004=2,63.$$

Враховуючи взаємодію при $S/d_1=2,86$ ($\lambda \approx 1,05$):

$$K_t^{\text{еф}} \approx 2,63 \cdot 1,05 = 2,76;$$

$$\sigma_{\max} = 2,76 \cdot 111 = 306 \text{ МПа} - \text{гірший варіант, ніж базовий.}$$

Для порівняння характеристик смуги зі сталі 45 з отворами різної форми складемо табл. 3.9.

					КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						58
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Табл. 3.9 – Порівняльний зведений розрахунок

Параметр	Варіант А (Круг)	Варіант Б (Еліпс)	Варіант В (Підфілювання)	Варіант Г (Два отвори)
Геометрія	d=20	a=10, b=20	d=20, r=40	2×d=14
K _t	2,51	2,00	2,00	2,63
σ _{max} , МПа	251	200	200	263
Запас міцності n	1,41	1,78	1,78	1,35
Статус	Небезпечний	Допустимий	Допустимий	Небезпечний

3.3.4 Визначення допустимого навантаження

Для базового варіанту (круглий отвір) визначимо максимально допустиме навантаження F_{доп} при [σ]=200 МПа:

$$\sigma_{\max} = K_t \cdot \frac{F_{\text{доп}}}{(W - d)t} \leq [\sigma]$$

$$F_{\text{доп}} \leq \frac{[\sigma] \cdot (W - d)t}{K_t} = \frac{200 \cdot 80 \cdot 10}{2,508} = \frac{160000}{2,508} \approx 63800 \text{ Н} = 63,8 \text{ кН}$$

Для оптимізованого варіанту (еліптичний отвір або підфілювання з K_t=2,0):

$$F_{\text{доп}} \leq \frac{200 \cdot 80 \cdot 10}{2,0} = 80000 \text{ Н} = 80 \text{ кН}$$

Ефективність методу. Застосування еліптичної форми або підфілювання дозволяє збільшити допустиме навантаження на 25% порівняно з круглим отвором (з 63,8 кН до 80 кН) або, при фіксованому навантаженні 80 кН, збільшити запас міцності з 1,41 до 1,8.

					КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						59
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

3.3.5 Розрахунок на втому (циклічна міцність)

При циклічному навантаженні необхідно враховувати коефіцієнт чутливості матеріалу до концентрації напружень q та ефективний коефіцієнт концентрації K_σ :

$$K_\sigma = 1 + q(K_t - 1).$$

Для сталі 45 при радіусі отвору $r=10$ мм та $\sigma_B=600$ МПа $q \approx 0,6 \div 0,7$.

При $q=0,65$ та $K_t=2,508$:

$$K_\sigma = 1 + 0,65 \cdot 1,508 = 1 + 0,98 = 1,98.$$

Межа витривалості деталі з отвором:

$$\sigma_{-1}^{\text{дет}} = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma} = \frac{270}{1,98} \approx 136 \text{ МПа}$$

Для еліптичного отвору з $K_t=2,0$:

$$K_\sigma = 1 + 0,65 \cdot 1 = 1,65;$$

$$\sigma_{-1}^{\text{дет}} = \frac{270}{1,65} \approx 164 \text{ МПа}$$

Збільшення межі витривалості становить 20% .

Висновки до розділу 3

У третьому розділі розглянуто інженерні методи оцінки та зниження концентрації напружень у плоских деталях машинобудівних конструкцій.

Встановлено, що для пластин кінцевої ширини коефіцієнт концентрації зменшується зі збільшенням відношення d/W згідно з формулою Хоуланда. При $d/W=0,2$ значення K_t знижується з 3,0 до 2,51 .

Проведено аналітичний синтез оптимальних форм отворів. Показано, що перехід від круглої форми до еліптичної зі співвідношенням півосей $a/b=0,5$

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						60
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

(велика вісь уздовж розтягу) дозволяє знизити K_t до 2,0 , тобто на 33% . Локальне підфілювання краю круглого отвору радіусом $r=4d$ дає аналогічний ефект.

Виконано міцнісний розрахунок розтягнутої смуги зі сталі 45 з отворами різної форми. Розрахунки показали, що при навантаженні $F=80$ кН смуга з круглим отвором $d=20$ мм має запас міцності $n=1,41$, що недостатньо ($[n]=1,8$). Застосування еліптичного отвору або підфілювання підвищує запас міцності до $n=1,77$, що забезпечує працездатність конструкції.

Визначено, що оптимізація форми отвору дозволяє збільшити допустиме навантаження на 25% або підвищити межу витривалості деталі на 20% порівняно з базовим круглим отвором.

Отримані результати можуть бути використані при проектуванні з'єднувальних елементів машинобудівних конструкцій для забезпечення заданого рівня міцності при мінімальній матеріаломісткості.

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						61
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі проведено теоретичне та прикладне дослідження концентрації напружень у плоских деталях машинобудівних конструкцій на прикладі розтягнутої смуги з отворами. Актуальність теми підтверджена необхідністю підвищення надійності та довговічності деталей типу фланців, з'єднувальних полос та кріпильних пластин шляхом оптимізації їх геометрії без застосування ресурсоемних чисельних методів.

Метою роботи було розроблення інженерної методики аналітичної оцінки концентрації напружень та визначення ефективних шляхів її зниження. Поставлені завдання виконано повністю.

У першому розділі систематизовано теоретичні основи плоскої задачі теорії пружності. Встановлено принципи відмінності між плоским напруженим станом (ПНС), характерним для тонких пластин, та плоскою деформацією (ПД), що реалізується у довгих призматичних тілах. Показано, що перехід від ПНС до ПД супроводжується зміною пружних констант: для ПД використовуються приведені модуль пружності $E' = E / (1 - \nu^2)$ та приведений коефіцієнт Пуассона $\nu' = \nu / (1 - \nu)$, що призводить до збільшення жорсткості конструкції. Виведено систему визначальних рівнянь плоскої задачі: диференціальні рівняння рівноваги, геометричні співвідношення Коші, фізичні співвідношення (закон Гука) та умови сумісності деформацій Сен-Венана. Детально розглянуто метод функції напружень Ейрі $\phi(x, y)$, який зводить задачу до розв'язання бігармонічного рівняння $\nabla^4 \phi = 0$, та наведено формули для компонентів напружень у декартовій та полярній системах координат.

У другому розділі виконано аналітичний аналіз концентрації напружень біля отворів. Отримано класичний розв'язок задачі Кірша для нескінченної пластини з круговим отвором радіуса a під дією одноосного розтягу σ . Встановлено розподіл тангенціальних напружень на контурі отвору $\sigma_\theta = \sigma(1 - 2\cos 2\theta)$ та доведено, що теоретичний коефіцієнт концентрації

					КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						62
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

напружень для круглого отвору дорівнює $K_t=3$. Розглянуто задачу Інґліса про еліптичний отвір, для якої $K_t=1+2(a/b)$, що демонструє принципову можливість зниження концентрації шляхом витягування отвору уздовж напрямку дії зовнішніх сил (при $a/b=0,5$ отримуємо $K_t=2$). Уточнено значення K_t для пластин кінцевої ширини за формулою Хоуленда, яка враховує відношення d/W : при збільшенні d/W від 0 до 0,5 коефіцієнт K_t зменшується від 3,0 до 2,25.

У третьому розділі розроблено інженерні методи зниження концентрації напружень та виконано міцнісний розрахунок конкретної деталі. На основі аналітичного синтезу встановлено, що найефективнішими методами є:

- заміна круглого отвору еліптичним зі співвідношенням півосей $a/b=0,5$ (зменшення K_t на 33%);
- локальне підфілювання краю отвору радіусом $r=4d$ (досягнення аналогічного ефекту $K_t=2$).

Практична значимість роботи підтверджена розрахунками міцності смуги зі сталі 45 (межа текучості $\sigma_T=355$ МПа) шириною $W=100$ мм та товщиною $t=10$ мм з отвором діаметром $d=20$ мм ($d/W=0,2$) під дією розтягуючої сили $F=80$ кН. Основні результати практичної частини:

Номінальне напруження у зменшеному перерізі становить $\sigma_{ном}=100$ МПа.

Для базового круглого отвору з урахуванням кінцевої ширини смуги (формула Хоуленда) $K_t=2,51$, максимальне напруження $\sigma_{max}=251$ МПа, запас міцності $n=1,41$, що є недостатнім (вимагається $[n]=1,8$).

Для оптимізованого еліптичного отвору ($a/b=0,5$, велика вісь уздовж розтягу) $K_t=2,0$, $\sigma_{max}=200$ МПа, запас міцності $n=1,78$, що задовольняє умову міцності.

Перехід від круглої до еліптичної форми дозволяє збільшити допустиме навантаження на 25% (з 63,8 кН до 80 кН) або підвищити запас міцності з 1,41 до 1,78.

Отримані результати доводять, що аналітичні методи плоскої задачі теорії пружності дозволяють ефективно оцінювати концентрацію напружень та

					КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						63
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

обґрунтовувати конструктивні заходи щодо підвищення міцності без використання ліцензійного програмного забезпечення для скінченних елементів.

Основні практичні рекомендації:

У проєктувальній практиці при розрахунку пластин з отворами відношенням $d/W \geq 0,15$ необхідно застосовувати уточнену формулу Хоуланда замість класичного $K_t=3$.

Для зниження концентрації напружень у розтягнутих смугах доцільно застосовувати еліптичні отвори зі співвідношенням осей 2:1 (велика вісь паралельно до навантаження) або виконувати підфілювання краю отвору радіусом, що не менший подвійного діаметра отвору.

Розроблена методика розрахунку може бути використана при проєктуванні болтових з'єднань фланців, кріпильних пластин та інших деталей з концентраторами напружень з конструкційної сталі.

Напрями подальших досліджень можуть включати врахування впливу пластичних деформацій на redistribution напружень, аналіз концентрації напружень під дією циклічного навантаження з використанням коефіцієнта чутливості матеріалу q , а також дослідження оптимальних форм отворів методами варіаційного числення.

					КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						64
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Єврокод 3. Проектування сталевих конструкцій. Частина 1-1. Загальні правила та правила для будівель : ДСТУ EN 1993-1-1:2019. – Київ : УкрНДНЦ, 2019. – 304 с.
2. Sadd M. H. Elasticity: Theory, Applications, and Numerics / M. H. Sadd. – 4th ed. – Oxford : Elsevier Academic Press, 2020. – 550 с.
3. Barber J. R. Elasticity / J. R. Barber. – 3rd ed. – Dordrecht : Springer, 2010. – 534 с.
4. Теорія пружності : підручник / В. С. Білецький, В. В. Федірін, С. В. Овчаренко. – Харків : НТУ «ХП», 2020. – 232 с.
5. Механіка пружного тіла / О. М. Гузь, В. Д. Кубенко, М. А. Черевко. – Київ : Наукова думка, 2016. – 464 с.
6. Timoshenko S. P. Theory of Elasticity / S. P. Timoshenko, J. N. Goodier. – 3rd ed. – New York : McGraw-Hill, 1970. – 567 с.
7. Little R. W. Elasticity / R. W. Little. – Mineola : Dover Publications, 1999. – 431 с.
8. Ventsel E. Thin Plates and Shells: Theory: Analysis, and Applications / E. Ventsel, T. Krauthammer. – New York : Marcel Dekker, 2001. – 688 с.
9. Основи теорії пружності : навч. посібник / В. М. Маланич, В. О. Тимошенко. – Вінниця : ВНТУ, 2015. – 152 с.
10. Pilkey W. D. Peterson's Stress Concentration Factors / W. D. Pilkey, D. F. Pilkey. – 4th ed. – Hoboken : John Wiley & Sons, 2020. – 600 с.
11. Savin G. N. Stress Concentration around Holes / G. N. Savin. – Oxford : Pergamon Press, 1961. – 430 с.
12. Inglis C. E. Stresses in a Plate due to the Presence of Cracks and Sharp Corners / C. E. Inglis // Transactions of the Institution of Naval Architects. – 1913. – Vol. 55. – P. 219–241.

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						65
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

13. Howland R. C. J. On the Stresses in the Neighbourhood of a Circular Hole in a Strip under Tension / R. C. J. Howland // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. – 1930. – Vol. 229. – P. 49–86.

14. Kirsch G. Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre / G. Kirsch // Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure. – 1898. – Vol. 42. – P. 797–807.

15. Neuber H. Theory of Notch Stresses: Principles for Exact Calculation of Strength with Reference to Structural Form and Material / H. Neuber. – 2nd ed. – Berlin : Springer, 1958. – 200 с.

16. Murakami Y. Stress Intensity Factors Handbook / Y. Murakami. – Oxford : Pergamon Press, 1987. – Vol. 1. – 450 с.

17. Концентрація напружень у конструкціях машин та споруд : монографія / О. С. Ткачук, В. А. Галапац. – Львів : Львівська політехніка, 2015. – 212 с.

18. Panasyuk V. V. Fracture Mechanics and Strength of Materials: A Reference Book / V. V. Panasyuk, A. E. Andreikiv, V. Z. Parton. – Cambridge : Cambridge Scientific Publishers, 2008. – Vol. 1. – 420 с.

19. Dowling N. E. Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue / N. E. Dowling. – 4th ed. – Boston : Pearson, 2012. – 920 с.

20. Suresh S. Fatigue of Materials / S. Suresh. – 2nd ed. – Cambridge : Cambridge University Press, 1998. – 704 с.

21. Mechanical Metallurgy / G. E. Dieter, D. J. Bacon. – SI metric ed. – New York : McGraw-Hill, 1989. – 600 с.

22. Metal Fatigue in Engineering / H. O. Fuchs, R. I. Stephens. – New York : John Wiley & Sons, 1980. – 336 с.

23. Міцність та пластичність металів : підручник / В. В. Божидарнік, А. М. Пугач. – Київ : Вища школа, 2018. – 312 с.

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						66
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

24. ASM Handbook. Vol. 1 : Properties and Selection: Irons, Steels, and High-Performance Alloys / ed. J. R. Davis. – Materials Park : ASM International, 1990. – 1150 с.

25. Довідник з конструкційних сталей / В. М. Папіро, О. В. Папіро. – Харків : НТУ «ХП», 2012. – 180 с.

26. Андрійків А. Е. Методи оцінки міцності та довговічності конструкцій / А. Е. Андрійків, М. Б. Кітура, І. П. Штайер. – Львів : Каменяр, 2019. – 240 с.

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ</i>	Арк.
						67
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

ДОДАТОК

					КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ	Арк.
						68
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

ІНЖЕНЕРНІ МЕТОДИ ОЦІНКИ ТА ЗНИЖЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ У ПЛОСКИХ ДЕТАЛЯХ АВТОМОБІЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Виконав : студент групи МТВА-22-1 Мирончук В.К.

Керівник : д.т.н., професор Драч І.В.

Кафедра
трибології, автомобілів і матеріалознавства

Актуальність та мета дослідження

Проблема:
50–60 % руйнувань деталей машин пов'язано з концентрацією напружень біля отворів
Необхідність підвищення надійності без збільшення матеріаломісткості

Об'єкт дослідження: розтягнута смуга з отворами (фланці, з'єднувальні пластини)

Мета роботи: розробка інженерної методики аналітичної оцінки концентрації напружень та визначення шляхів її зниження

Завдання:
Дослідити теоретичні основи плоскої задачі теорії пружності
Проаналізувати класичні розв'язки задач Кірша та Інгліса
Розробити методи зниження концентрації напружень
Виконати міцнісний розрахунок смуги зі сталі 45

2

Постановка плоскої задачі теорії пружності

ДВА ФУНДАМЕНТАЛЬНІ СТАНИ:

Плоский напряженный стан (ПНС)	Плоская деформация (ПД)
Тонкі пластини ($h \ll L$)	Довгі призматичні тіла ($L_x \gg D$)
$\sigma_z = 0, \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$	$\varepsilon_z = 0, \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$
Константи: E, ν	Константи: $E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \nu' = \frac{\nu}{1-\nu}$

Ключове рівняння — бігармонічне:

$$\nabla^4 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$$

Функція напружень Ейрі:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

3

Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата

КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ

Арк.

69

Задача Кірша — круглий отвір у нескінченній пластині

Постановка: розтяг σ , круглий отвір радіуса a

Розв'язок (функція Ейрі у полярних координатах):

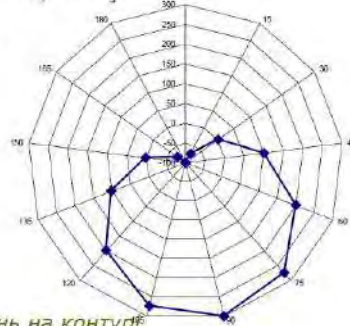
$$\varphi(r, \theta) = \frac{\sigma}{4} \left[r^2 - 2a^2 \ln r - \left(r^2 - 2a^2 + \frac{a^4}{r^2} \right) \cos 2\theta \right]$$

Напруження на контурі отвору ($r = a$):

$$\sigma_{\theta}(a, \theta) = \sigma(1 - 2 \cos 2\theta)$$

Ключовий результат:

- Максимум при $\theta = 90^\circ$: $\sigma_{\theta}^{\max} = 3\sigma$
- Коефіцієнт концентрації: $K_t = 3$



Еюра розподілу напружень на контурі

4

Узагальнення — задача Інгліса та формула Хоулєнда

Еліптичний отвір (Інгліс, 1913):

$K_t = 1 + 2\frac{a}{b}$ де a — піввісь перпендикулярно до розтягу, b — уздовж розтягу

Вплив орієнтації:	a/b	Орієнтація	K_t
	0,5	Витягнутий уздовж сили	2,0 ✓
	1,0	Круглий	3,0
	2,0	Витягнутий \perp до сили	5,0 X

Пластина кінцевої ширини (Хоулєнд, 1930):

$$K_t = 3 - 3,13 \left(\frac{d}{W} \right) + 3,66 \left(\frac{d}{W} \right)^2 - 1,53 \left(\frac{d}{W} \right)^3$$

При $d/W = 0,2$: $K_t = 2,51$ (зниження на 16% порівняно з 3,0)

5

Методи зниження концентрації напружень

□ Геометрична оптимізація:

- Еліптична форма отвору ($a/b = 0,5$)
 - $K_t = 2,0$ (зниження на 33%)
 - Велика вісь паралельна до розтягу
- Підфілювання крайок ($r = 4d$)
 - Еквівалентний радіус кривизни $\rho = r$
 - $K_t \approx 1 + 2\sqrt{a/\rho} = 2,0$
- Оптимальні контури (лемніската)
 - Теоретичний мінімум $K_t \approx 1,5-1,8$

Метод	K_t	Зниження концентрації
Базовий (коло)	3,0	—
Еліпс $a/b = 0,5$	2,0	33%
Підфілювання $r = 4d$	2,0	33%
Два малі отвори	2,1-2,8	залежить від S/d

Порівняльна ефективність:

6

Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата

КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ

Арк.

70

Практична задача — вихідні дані

Матеріал: Сталь 45 (нормалізована) Геометрія смуги:

- $\sigma_T = 355$ МПа, $\sigma_B = 600$ МПа
- $W = 100$ мм, $t = 10$ мм
- $E = 2,0 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$
- $d = 20$ мм, $d/W = 0,2$
- $[\sigma] = 200$ МПа (при $[n] = 1,8$)

Навантаження: $F = 80$ кН

Номінальне напруження:

$$\sigma_{ном} = \frac{F}{(W-d)t} = \frac{80000}{80 \cdot 10} = 100 \text{ МПа}$$

Результати розрахунку — порівняння варіантів

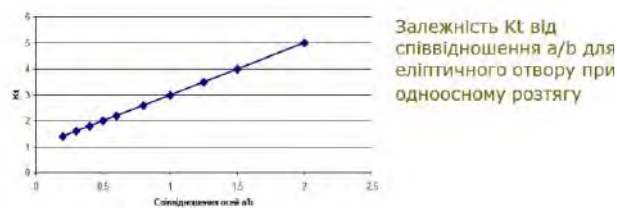
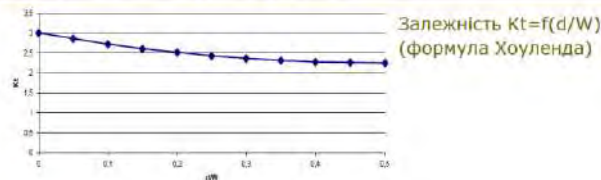
Варіант	Геометрія	K_t	σ_{max} , МПа	Запас п.	Статус
А	Круглий $d = 20$ мм	2,51	251	1,41	✗ Недостатній
Б	Еліпс $a/b = 0,5$	2,00	200	1,78	✓ Допустимий
В	Коло + підфілювання $r = 40$ мм	2,00	200	1,78	✓ Допустимий
Г	Два отвори $d = 14$ мм	2,76	276	1,29	✗ Небезпечний

Висновок: Оптимальними є варіанти Б та В з $K_t = 2,0$

Ефективність оптимізації:

- Збільшення допустимого навантаження: з 63,8 кН до 80 кН (+25%)
- Або збільшення запасу міцності: з 1,41 до 1,78

Графічна ілюстрація результатів



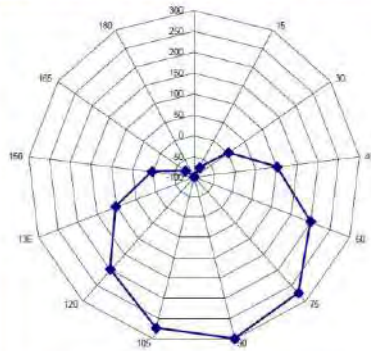
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата

КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ

Арк.

71

Графічна ілюстрація результатів



Епіюра розподілу тангенціальних напружень σ_t на контурі круглого отвору при одноосному розтягу



Епіюра розподілу тангенціальних напружень σ_t на контурі еліптичного отвору ($a/b = 0,5$) при одноосному розтягу 10

Висновки та рекомендації

Основні результати:

- Установлено відмінності ПНС та ПД через пружні константи E' , ν'
- Отримано аналітичні залежності для концентрації напружень:
 - Кірш: $Kt=3$ (круглий отвір)
 - Інґліс: $Kt=1+2(a/b)$ (еліпс)
 - Хоуленд: уточнення для $d/W > 0$
- Розроблено методи зниження Kt на 30–35%:
 - Еліптична форма з $a/b=0,5$
 - Підфілювання $r \geq 4d$
- Для сталі 45 доведено недостатність запасу міцності при $Kt=2,51$ та забезпечення міцності при $Kt=2,0$

11

Висновки та рекомендації

Практичні рекомендації:

- Застосовувати формулу Хоуленда при $d/W \geq 0,15$
- Використовувати еліптичні отвори з великою віссю уздовж розтягу
- Застосовувати підфілювання радіусом не менше подвійного діаметра отвору

12

Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата

КРБМТВАТАМ 26 22094. 000 ПЗ

Арк.

72