УДК 519.832.4

В.В. РОМАНЮК
Хмельницкий национальный университет

# ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА О КОНТИНУУМЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ ПРОЕКТИРОВЩИКА В АНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ С ЧЕТЫРЬМЯ УЗЛАМИ В УСЛОВИЯХ ДВУХ НЕКОРРЕКТНО ОЦЕНЕННЫХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЕЙ

*Решается задача оптимального распределения строительных ресурсов с четырьмя узлами в условиях некорректно оцененных одного левого и одного правого конца сегментных неопределённостей. Доказано локальную теорему о континууме оптимальных стратегий проектировщика в соответствующей антагонистической модели.*

*There is solved a problem of distributing optimally the four-mounted building resources under the incorrectly evaluated single left and single right endpoint of segment uncertainties. The local theorem on continuum of the projector optimal strategies in the corresponding antagonistic model has been proved.*

Ключевые слова: распределение строительных ресурсов, сегментные неопределённости, выпуклая антагонистическая игра, оптимальная стратегия проектировщика, континуум оптимальных стратегий проектировщика.

### Вступление

Задачи устранения неопределённостей при проектировании строительных опорных конструкций возникают практически всюду, ведь процесс строительства, как и любой технологический процесс, пронизан различными конфликтными факторами, порождающими неопределённости [1–6]. Одним из способов устранения таких неопределённостей является применение результатов антагонистического моделирования. Например, для устранения неопределённостей возможной нормированной нагрузки на конструкцию с четырьмя узлами (опорами) можно использовать решение выпуклой антагонистической игры с ядром

$$T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = T(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = \max\left\{x_1 y_1^{-2}, x_2 y_2^{-2}, x_3 y_3^{-2}, \frac{1-x_1-x_2-x_3}{(1-y_1-y_2-y_3)^2}\right\}, \tag{1}$$

задаваемым на декартовом произведении

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{X}} \times \boldsymbol{\mathcal{Y}} &= \{[a_1; b_1]\times[a_2; b_2]\times[a_3; b_3]\} \times \{[a_1; b_1]\times[a_2; b_2]\times[a_3; b_3]\} = \\ &= \left\{\prod_{d=1}^{3}[a_d; b_d]\right\} \times \left\{\prod_{d=1}^{3}[a_d; b_d]\right\} \subset \prod_{l=1}^{6}(0; 1) \subset \mathbb{R}^6 \end{aligned} \tag{2}$$

параллелепипеда

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} = [a_1; b_1]\times[a_2; b_2]\times[a_3; b_3] = \prod_{d=1}^{3}[a_d; b_d] \subset \prod_{d=1}^{3}(0; 1) \subset \mathbb{R}^3 \tag{3}$$

чистых стратегий (нормированных нагрузок на три из четырёх узлов)

$$\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \in [a_1; b_1]\times[a_2; b_2]\times[a_3; b_3] = \boldsymbol{\mathcal{X}} \tag{4}$$

первого игрока и параллелепипеда

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}} = [a_1; b_1]\times[a_2; b_2]\times[a_3; b_3] = \prod_{d=1}^{3}[a_d; b_d] \subset \prod_{d=1}^{3}(0; 1) \subset \mathbb{R}^3 \tag{5}$$

чистых стратегий (нормированных площадей поперечных сечений трёх из четырёх узлов)

$$\mathbf{Y} = [y_1 \quad y_2 \quad y_3] \in [a_1; b_1]\times[a_2; b_2]\times[a_3; b_3] = \boldsymbol{\mathcal{Y}} \tag{6}$$

второго игрока (проектировщика). Задача проектировщика состоит в определении оптимальной чистой стратегии

$$\mathbf{Y}_* = [y_1^* \quad y_2^* \quad y_3^*] \in [a_1; b_1]\times[a_2; b_2]\times[a_3; b_3] = \boldsymbol{\mathcal{Y}} \tag{7}$$

второго игрока, существующей в силу теоремы об оптимальных стратегиях второго игрока в выпуклой игре, где $y_d^*$ является оптимальной площадью поперечного сечения $d$-го узла конструкции для $d = \overline{1, 3}$, а

$$y_4^* = 1 - \sum_{d=1}^{3} y_d^* \tag{8}$$

благодаря нормированию. Однако в некоторых специфических случаях [7–9], связанных, прежде всего, с некорректным предварительным оцениванием неопределённостей в форме сегментов $\{[a_d; b_d]\}_{d=1}^{3}$, то есть с некорректной оценкой одного или нескольких концов $\{a_d\}_{d=1}^{3}$ и $\{b_d\}_{d=1}^{3}$, минимаксная процедура определения оптимальной стратегии (7) может усложняться [10–13]. Кроме того, у проектировщика может появиться более одной оптимальной стратегии [13], факт чего также требует отдельного рассмотрения.

**Предварительный анализ источников**

Известная и упомянутая ранее минимаксная процедура определения оптимальной стратегии (7) сводится к решению уравнения

$$v_* = b_1\left(y_1^*\right)^{-2} = b_2\left(y_2^*\right)^{-2} = b_3\left(y_3^*\right)^{-2} = \frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-y_1^*-y_2^*-y_3^*\right)^2}. \tag{9}$$

При этом корни $\left\{y_d^*\right\}_{d=1}^3$ уравнения (9) должны составлять точку параллелепипеда (5), то есть удовлетворять условию в (7). Но иногда, как уже было подчёркнуто, именно из-за некорректного предварительного оценивания одного или нескольких концов $\left\{a_d, b_d\right\}_{d=1}^3$ равенство (9) не может быть достигнуто на параллелепипеде (5). Частные случаи, когда к такой ситуации приводят некорректные оценки исключительно левых или правых концов, рассмотрены в работах [7–9, 13]. Случай же, когда некорректно оценены одновременно один левый и один правый конец, до сих пор не рассматривался.

**Цель работы**

Будем отталкиваться от того, что у нас имеются некорректные оценки чисел $a_p$ и $b_q$ при $p \in \left\{\overline{1, 3}\right\}$ и $q \in \left\{\overline{1, 3}\right\}$ для $p \neq q$, которые означают, что компонентами оптимальной стратегии проектировщика (7) уже не могут быть корни уравнения (9)

$$y_j^* = \frac{\sqrt{b_j}}{\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d} + \sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}}, \; j = \overline{1, 3}, \tag{10}$$

поскольку здесь выполнены

$$\frac{\sqrt{b_p}}{\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d} + \sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}} < a_p \text{ при } p \in \left\{\overline{1, 3}\right\} \tag{11}$$

и

$$\frac{\sqrt{b_q}}{\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d} + \sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}} > b_q \text{ при } q \in \left\{\overline{1, 3}\right\}. \tag{12}$$

Необходимо определить оптимальные стратегии проектировщика, доказав соответствующее утверждение при определённом условии соотношения частей равенства (9).

Теорема о континууме оптимальных стратегий проектировщика в антагонистической игре с ядром (1) на декартовом произведении (2) параллелепипедов (3) и (5)

Прежде всего отметим, что в случае, когда равенство (9) невыполнимо в силу условий (11) и (12), компонента

$$y_p^* > \frac{\sqrt{b_p}}{\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d} + \sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}} \tag{13}$$

и компонента

$$y_q^* < \frac{\sqrt{b_q}}{\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d} + \sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}}. \tag{14}$$

Тогда совершенно очевидно, что вместо (9) имеет место неравенство

$$\frac{1}{b_q} > \frac{b_k}{\left(y_k^*\right)^2} > \frac{b_p}{a_p^2} \text{ при } k \in \left\{\overline{1, 3}\right\} \backslash \left\{p, q\right\} \text{ и } y_k^* = \frac{\sqrt{b_k}}{\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d} + \sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}} \in \left[a_k; b_k\right]. \tag{15}$$

Используем его при доказательстве нижеследующей теоремы о компонентах $\left\{y_d^*\right\}_{d=1}^3$. При этом будем иметь в виду, что вместе с (15) также выполнено одно из неравенств:

$$\frac{1}{b_q} > \frac{b_k}{\left(y_k^*\right)^2} \geqslant \frac{1-\sum\limits_{d=1}^{3} a_d}{\left(1-b_q-a_p-y_k^*\right)^2} > \frac{b_p}{a_p^2} \text{ для } k \in \left\{\overline{1,3}\right\} \setminus \{p, q\} \text{ и } y_k^* = \frac{\sqrt{b_k}}{\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d} + \sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3} a_d}} \in \left[a_k; b_k\right], \quad (16)$$

$$\frac{1}{b_q} \geqslant \frac{1-\sum\limits_{d=1}^{3} a_d}{\left(1-b_q-a_p-y_k^*\right)^2} > \frac{b_k}{\left(y_k^*\right)^2} > \frac{b_p}{a_p^2} \text{ для } k \in \left\{\overline{1,3}\right\} \setminus \{p, q\} \text{ и } y_k^* = \frac{\sqrt{b_k}}{\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d} + \sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3} a_d}} \in \left[a_k; b_k\right], \quad (17)$$

$$\frac{1}{b_q} > \frac{b_k}{\left(y_k^*\right)^2} > \frac{b_p}{a_p^2} \geqslant \frac{1-\sum\limits_{d=1}^{3} a_d}{\left(1-b_q-a_p-y_k^*\right)^2} \text{ для } k \in \left\{\overline{1,3}\right\} \setminus \{p, q\} \text{ и } y_k^* = \frac{\sqrt{b_k}}{\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d} + \sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3} a_d}} \in \left[a_k; b_k\right], \quad (18)$$

$$\frac{1-\sum\limits_{d=1}^{3} a_d}{\left(1-b_q-a_p-y_k^*\right)^2} > \frac{1}{b_q} > \frac{b_k}{\left(y_k^*\right)^2} > \frac{b_p}{a_p^2} \text{ для } k \in \left\{\overline{1,3}\right\} \setminus \{p, q\} \text{ и } y_k^* = \frac{\sqrt{b_k}}{\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d} + \sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3} a_d}} \in \left[a_k; b_k\right]. \quad (19)$$

**Теорема.** В антагонистической игре с ядром (1) на декартовом произведении (2) параллелепипедов (3) и (5) при условиях (11) и (12) с неравенством (16) проектировщик обладает континуумом вариантов оптимального поведения в форме стратегии (7) с компонентой

$$y_q^* = b_q \,. \quad (20)$$

Если

$$1-b_q-\sqrt{b_q\left(1-\sum_{d=1}^{3} a_d\right)} \geqslant b_p + b_k \,, \quad (21)$$

то компонента

$$y_p^* \in \left[a_p; b_p\right] \quad (22)$$

и компонента

$$y_k^* \in \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{b_q b_k} + a_k + \left(\sqrt{b_q b_k} - a_k\right)\operatorname{sign}\left(\sqrt{b_q b_k} - a_k\right)\right); b_k\right]. \quad (23)$$

Если же

$$1-b_q-\sqrt{b_q\left(1-\sum_{d=1}^{3} a_d\right)} < b_p + b_k \,, \quad (24)$$

то компонента

$$y_p^* \in \left[a_p; y_p^{\langle\max\rangle}\right] \quad (25)$$

и компонента

$$y_k^* \in \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{b_q b_k} + a_k + \left(\sqrt{b_q b_k} - a_k\right)\operatorname{sign}\left(\sqrt{b_q b_k} - a_k\right)\right); y_k^{\langle\max\rangle}\right] \quad (26)$$

при

$$y_p^{\langle\max\rangle} + y_k^{\langle\max\rangle} = 1-b_q-\sqrt{b_q\left(1-\sum_{d=1}^{3} a_d\right)} \,, \quad (27)$$

$$y_p^{\langle\max\rangle} \in \left[a_p; b_p\right], \quad (28)$$

$$y_k^{\langle\max\rangle} \in \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{b_q b_k} + a_k + \left(\sqrt{b_q b_k} - a_k\right)\operatorname{sign}\left(\sqrt{b_q b_k} - a_k\right)\right); b_k\right]. \quad (29)$$

**Доказательство.** Из локально поставленного неравенства (16) сразу получаем оптимальное значение игры $v_* = b_q^{-1}$, откуда выплывает компонента (20). Такое значение игры будет достигаться на таких компонентах $y_p^*$ и $y_k^*$ оптимальной стратегии проектировщика (7), которые удовлетворят неравенствам

$$\frac{1}{b_q} \geqslant \frac{b_k}{\left(y_k^*\right)^2}, \tag{30}$$

$$\frac{1}{b_q} \geqslant \frac{1-\sum\limits_{d=1}^{3} a_d}{\left(1-b_q-y_p^*-y_k^*\right)^2}, \tag{31}$$

$$\frac{1}{b_q} \geqslant \frac{b_p}{\left(y_p^*\right)^2}. \tag{32}$$

Из неравенства (30) получаем

$$y_k^* \geqslant \sqrt{b_q b_k} \quad \text{при} \quad k \in \left\{\overline{1,3}\right\} \setminus \{p, q\}, \tag{33}$$

где в последствии нужно учесть, что $\sqrt{b_q b_k}$ может быть как не меньше $a_k$, так и меньше $a_k$. Обратимся к неравенству (31), считая его составленным относительно суммы $y_p^* + y_k^*$ двух компонент проектировщика:

$$\left(1-b_q\right)^2 - 2\left(1-b_q\right)\left(y_p^* + y_k^*\right) + \left(y_p^* + y_k^*\right)^2 \geqslant b_q\left(1-\sum_{d=1}^{3} a_d\right), \tag{34}$$

$$\left(y_p^* + y_k^*\right)^2 - 2\left(1-b_q\right)\left(y_p^* + y_k^*\right) + \left(1-b_q\right)^2 - b_q\left(1-\sum_{d=1}^{3} a_d\right) \geqslant 0, \tag{35}$$

где соответствующее квадратное уравнение

$$\left(y_p^* + y_k^*\right)^2 - 2\left(1-b_q\right)\left(y_p^* + y_k^*\right) + \left(1-b_q\right)^2 - b_q\left(1-a_1-a_2-a_3\right) = 0 \tag{36}$$

имеет дискриминант

$$D = 4\left(1-b_q\right)^2 - 4\left[\left(1-b_q\right)^2 - b_q\left(1-a_1-a_2-a_3\right)\right] = 4b_q\left(1-a_1-a_2-a_3\right). \tag{37}$$

Корнями уравнения (36), составленного относительно неизвестной суммы $y_p^* + y_k^*$ двух компонент проектировщика, являются значения

$$\frac{2\left(1-b_q\right)-\sqrt{D}}{2} = \frac{2\left(1-b_q\right)-2\sqrt{b_q\left(1-a_1-a_2-a_3\right)}}{2} = 1-b_q-\sqrt{b_q\left(1-a_1-a_2-a_3\right)} \tag{38}$$

или

$$\frac{2\left(1-b_q\right)+\sqrt{D}}{2} = \frac{2\left(1-b_q\right)+2\sqrt{b_q\left(1-a_1-a_2-a_3\right)}}{2} = 1-b_q+\sqrt{b_q\left(1-a_1-a_2-a_3\right)}. \tag{39}$$

Следовательно, неравенство (31) или, что является тем же, параболическое неравенство (35) верно при условии

$$y_p^* + y_k^* \leqslant 1-b_q-\sqrt{b_q\left(1-a_1-a_2-a_3\right)}, \tag{40}$$

что равносильно условию (21), или при условии

$$y_p^* + y_k^* \geqslant 1-b_q+\sqrt{b_q\left(1-a_1-a_2-a_3\right)}. \tag{41}$$

Однако, подставляя корень (39) в знаменатель (31), который согласно (8) должен быть положительным, получаем

$$1-b_q-y_p^*-y_k^* = 1-b_q-\left(1-b_q+\sqrt{b_q\left(1-a_1-a_2-a_3\right)}\right) = -\sqrt{b_q\left(1-a_1-a_2-a_3\right)} < 0, \tag{42}$$

то есть сума $y_p^* + y_k^*$ не может быть равной (39). Итак, при условии (21) будет (23), где вместе с (33) учитывается взаимное расположение точек $\sqrt{b_q b_k}$ и $a_k$, а также (22), что следует из равносильного неравенству (32) неравенства $y_p^* \geqslant a_p$. Если же выполнено условие (24), то в соответствии с (40) максимальная сума компонент $y_p^*$ и $y_k^*$ должна равняться правой части в (40), удовлетворяя неравенству (30). В этом случае справедливы записи (25) и (26) с ограничениями (27)–(29). Теорема доказана.

**Вывод**

Доказанная теорема с локальным условием (16) предоставляет возможность для непосредственного определения вариантов оптимального поведения проектировщика для случаев, когда в сегментах неопределённостей $\left\{\left[a_d; b_d\right]\right\}_{d=1}^{3}$ один из трёх левых концов и один из трёх правых концов были оценены некорректно, что дало (11) и (12). Работа с условиями (17)–(19) составит отдельные исследования. Естественно, что в случае, если переоценка значений $a_p$ и $b_q$ при $p \in \left\{\overline{1,3}\right\}$ и $q \in \left\{\overline{1,3}\right\}$ для $p \neq q$

невозможна, то проектировщик получает в распоряжение бесконечно много оптимальных вариантов распределения нормированных площадей поперечных сечений, а это, в свою очередь, порождает проблему однозначного или уникального выбора оптимальной стратегии (7). Дилемма о или выборе единственной [14–17] оптимальной стратегии (7) или переоценивании сегментных неопределённостей (которое часто может быть по понятным причинам затруднено) является предметом продолжения исследования антагонистической модели (1)–(6).

**Литература**


1. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределённости / Трухаев Р. И. – М. : Наука, 1981. – 258 с.
2. Киселев В. А. Строительная механика: Спец. курс. Динамика и устойчивость сооружений : [учебник для вузов] / Киселев В. А. – [3-е изд., испр. и доп.]. – М. : Стройиздат, 1980. – 616 с. : ил.
3. Дарков А. В. Строительная механика : [учебник для строит. спец. вузов] / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – [8-е изд., перераб. и доп.]. – М. : Высш. шк., 1986. – 607 с. : ил.
4. Черноруцкий И. Г. Методы принятия решений / Черноруцкий И. Г. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 416 с. : ил.
5. Романюк В. В. Регулярна оптимальна стратегія проектувальника у моделі дії нормованого одиничного навантаження на $N$-колонну будівельну конструкцію-опору / В. В. Романюк // Проблеми трибології. – 2011. – № 2. – С. 111 – 114.
6. Романюк В. В. Узагальнена модель усунення $N$ часткових невизначеностей імовірнісного типу як континуальна антагоністична гра на $(2N-2)$-вимірному паралелепіпеді з мінімізацією максимального дисбалансу / В. В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2011. – № 3. – С. 45 – 60.
7. Романюк В. В. Про особливі компоненти оптимальної стратегії проектувальника у моделі дії нормованого одиничного навантаження на триколонну будівельну конструкцію / В. В. Романюк // Проблеми трибології. – 2011. – № 1. – С. 44 – 46.
8. Romanuke V. V. Digression on the right off-bound projector optimal strategy in four props construction being pressed uncertainly / V. V. Romanuke // Системи обробки інформації. – 2011. – Випуск 2 (92). – С. 129 – 132.
9. Романюк В. В. Нерегулярна ліворуч оптимальна стратегія проектувальника першого степеня у моделі усунення чотирьохелементних невизначеностей як антагоністичній грі на шестивимірному гіперпаралелепіпеді для оптимізації конструювання чотирьохопорної платформи / В. В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2011. – № 4. – С. 74 – 82.
10. Воробьёв Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Воробьёв Н. Н. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 272 с.
11. Теория игр : [учеб. пособие для ун-тов] / Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. – М. : Высшая школа, Книжный дом “Университет”, 1998. – 304 с. : ил.
12. Романюк В. В. Теорія антагоністичних ігор : [навчальний посібник] / Романюк В. В. – Львів : “Новий Світ – 2000”, 2010. – 294 с.
13. Романюк В. В. Доведення тверджень для моделі дії нормованого одиничного навантаження на три колони однакової висоти у будівельній конструкції / В. В. Романюк // Проблеми трибології. – 2010. – № 4. – С. 72 – 81.
14. Романюк В. В. Про раціоналізований принцип оптимальності у деяких матричних іграх / В. В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2008. – № 1. – С. 156 – 161.
15. Романюк В. В. Питання виокремлення підмножини раціональних чистих стратегій гравців у деяких антагоністичних іграх / В. В. Романюк // Інформаційні технології та комп’ютерна інженерія. – 2009. – № 3 (20). – С. 47 – 52.
16. Романюк В. В. Означення та використання множини строго раціональних стратегій у деяких антагоністичних іграх / В. В. Романюк // Збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України. – 2010. – Випуск 57. – С. 53 – 62.
17. Romanuke V. V. Determination of the optimal pure strategies subset as the latent predominance set in some matrix games / V. V. Romanuke // Scientific Papers of Donetsk National Technical University. “Informatics, Cybernetics and Computer Science”. – 2009. – Vol. 10 (153). – P. 46 – 53.


Надійшла 19.10.2011 р.
Рецензент: д.т.н., проф. Сорокатий Р.В.