УДК 539.3

Ярецька Наталія Олександрівна
к. ф.-м. н., доцент кафедри вищої математики та комп’ютерних застосувань
Хмельницький національний університет, massacran2@ukr.net

Yaretska Nataliya Olexandrivna
Ph.D., Associate Professor of Department of Higher Mathematics and Computer Applications, Khmelnytsky National University, massacran2@ukr.net

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДВОХ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ СПІВВІСНИХ ЦИЛІНДРІВ ТА ШАРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Як відомо, практично в усіх елементах конструкцій присутні початкові напруження, які можуть бути викликані різного роду причинами, а саме: технологічними операціями, складанням конструкції, внаслідок дії геостатичних і геодинамічних сил у земній корі, при технологічних процесах створення композитних матеріалів, у кровоносних судинах живих організмів тощо. Детальний огляд задач, що враховують початкові напруження представлені у роботах [1, 2]. Причому у перших роботах з контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями розглядаються або пружні потенціали конкретної структури [3], або задача ставиться в загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл з потенціалом довільної структури на основі лінеаризованої теорії пружності [1,2]. Роботи з контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями присвячені взаємодії попередньо напружених тіл із жорсткими та пружними штампами без початкових напружень [4]. Розв’язок контактної осесиметричної задачі про тиск попередньо напруженого циліндричного штампа на пружний півпростір, у якому є залишкові деформації розглянуто у [5]. Існує також ряд інших публікацій, що повністю або частково пов’язані із тематикою даної статті [6, 7].

У даній роботі з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності досліджена осесиметрична контактна задача про тиск попередньо напружених співвісних штампів з плоскою основою на шар з початковими напруженнями без урахування сил тертя для нерівних коренів характеристичного (визначального) рівняння [1]. Дослідження виконано в загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Вважаємо, що початкові напружено-деформовані стани в штампах і шарі є однорідними і рівними. Усі величини, що відносяться до верхнього та нижнього циліндричного штампу позначаються верхнім індексом (1) та (2), відповідно. Величини, що відносяться до пружного шару позначаються без верхнього індексу. Аналогічна контактна задача у класичному випадку, тобто без початкових напружень розглянута в [4].

Припустимо, що початкові напружено-деформовані стани у циліндрах та шарі рівні та однорідні, тобто виконуються умови:

$$y_k = \lambda_k x_k, \quad \lambda_k = const,$$
$$y_k = u_{0k} + x_k, \quad u_{0k} = \delta_{ik}(\lambda_k - 1)\frac{y_i}{\lambda_i}, \quad (k,i = 1,2,3)$$

де λ_k - коефіцієнти видовження вздовж координатних осей y_k, δ_{ik} - символи Кронекера.

Розрізнятимемо три стани тіл з початковими напруженнями: природний, коли у ньому відсутні напруження; початковий стан, та збурений стан, всі величини якого складаються з суми відповідних величин початкового стану та збурень. Вважаючи збурення набагато меншими за величини початкового стану, дослідження проводимо в рамках лінеаризованої теорії пружності [1,2].

Нехай у пружний шар з початковими напруженнями втискаються два співвісних пружних циліндричних штампа з початковими напруженнями. Товщину шару після виникнення в ньому початкового напруженого стану будемо позначати через $2h = 2\lambda_1 h*$, де λ_1 – коефіцієнти видовження, $h*$ - товщина шару у природному стані (при відсутності початкових напружень у шарі); $R^{(i)}, H^{(1)}(i = 1,2)$- радіус та висоти пружних штампів, відповідно. Будемо вважати, що зовнішні навантаження прикладені тільки до вільних торців пружних штампів так, що їхні точки зміщуються в напрямку осі Oy_3 на сталі величини $\varepsilon^{(1)},\varepsilon^{(2)}$, відносно площини $y_3=0$, а поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішнього навантаження, дія сил тертя в зоні контакту відсутня (дотичні напруження дорівнюють нулю).

Для дослідження введемо лагранжеві координати (x_1,x_2,x_3), які в початковому стані співпадають з декартовими (y_1,y_2,y_3).

Даній постановці відповідають наступні граничні умови:

1) на торцях пружних штампів:

$$u_3^{(i)}=(-1)^i\varepsilon^{(i)};\quad Q_{3r}^{(i)}=0;\quad \forall\ r\in[0,R^{(i)}],\quad y_3=(-1)^{i+1}h+(-1)^{i+1}H^{(i)},\quad (i=\overline{1,2}) \tag{1}$$

2) на бічній поверхні пружних штампів:

$$Q_{rr}^{(i)}=0;\quad Q_{3r}^{(i)}=0;\quad \forall\ y_3\in[0,H^{(i)}],\quad r=R^{(i)}\ ,\quad (i=\overline{1,2}) \tag{2}$$

3) на межі пружного шару в області контакту:

$$U_3=U_3^{(i)};\quad Q_{33}=Q_{33}^{(i)};\quad Q_{3r}=Q_{3r}^{(i)}\quad \forall\ r\in[0,R^{(i)}],\quad y_3=(-1)^i h\ ,\quad (i=\overline{1,2}) \tag{3}$$

4) на межі пружного шару поза областю контакту:

$$Q_{33}=Q_{3r}=0\,,\ \forall\ r\in[r,\ +\infty],\ y_3=\pm h \tag{4}$$

Умови рівноваги мають вигляд:

$$\int_0^{R^{(1)}}\rho[Q_{33}]_{y_3=h}\,d\rho-\int_0^{R^{(2)}}\rho[Q_{33}]_{y_3=-h}\,d\rho=0 \tag{5}$$

А рівнодіюча зовнішніх сил визначаються рівністю:

$$P=-2\pi\int_0^{R^{(1)}}\rho[Q_{33}]_{y_3=h}\,d\rho=-2\pi\int_0^{R^{(2)}}\rho[Q_{33}]_{y_3=-h}\,d\rho \tag{6}$$

А для завершення постановки граничних умов, припустимо, що напруження і переміщення у шарі при $r\to\infty$ зменшуються, а на межі контакту шару та штампів – необмежені.

Для визначення напружено-деформованого стану в пружних циліндричних штампах з початковими напруженнями використовуємо лінеаризовані рівняння [1]. З цих рівнянь виразимо співвідношення для компонентів вектора переміщення та тензора напружень для стисливих і нестисливих тіл у випадку нерівних коренів $n_1\neq n_2$ визначального рівняння [1]:

$$U_r^{(i)}=-6C_0^{(i)}r\left(\frac{1}{\sqrt{n_1}}+\frac{1}{\sqrt{n_2}}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{(\gamma_k^{(i)})^2\Big[A_k^{(i)}\sqrt{n_1}I_1\Big(\sqrt{n_1}\gamma_k^{(i)}r\Big)\overline{K}_6^{(i)}\Big(\gamma_k^{(i)}y_3\Big)+B_k^{(i)}\sqrt{n_2}I_1\Big(\sqrt{n_2}\gamma_k^{(i)}r\Big)\overline{K}_6^{(i)}\Big(\gamma_k^{(i)}y_3\Big)\Big]-$$

$$-\left(\alpha_k^{(i)}\right)^2J_1\left(\alpha_k^{(i)}r\right)\left[\overline{K}_4^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)}z_1\right)\frac{1}{\sqrt{n_1}}+\overline{K}_5^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)}z_2\right)\frac{1}{\sqrt{n_2}}\right]\Big\}\ ,\ (i=\overline{1,2})$$

$$U_3^{(i)}=12C_0^{(i)}\left[\frac{m_1z_1}{n_1}+\frac{m_2z_2}{n_2}\right]-4A_0^{(i)}\theta_8+\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{(\gamma_k^{(i)})^2\Big[A_k^{(i)}m_1I_0\Big(\gamma_k^{(i)}\sqrt{n_1}r\Big)\overline{K}_1^{(i)}\Big(\gamma_k^{(i)}z_1\sqrt{n_1}\Big)+B_k^{(i)}m_2I_0\Big(\gamma_k^{(i)}\sqrt{n_2}r\Big)\overline{K}_1^{(i)}\Big(\gamma_k^{(i)}z_2\sqrt{n_1}\Big)\Big]-$$

$$-\left(\alpha_k^{(i)}\right)^2J_0\left(\alpha_k^{(i)}r\right)\left[\frac{m_1}{n_1}\overline{K}_2^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)}z_1\right)+\frac{m_2}{n_2}\overline{K}_3^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)}z_2\right)\right]\Big\},\ (i=\overline{1,2}) \qquad (7)$$

$$Q_{33}^{(i)}=C_{44}(1+m_1)l_1\Big\langle 12C_0^{(i)}\left(\frac{1}{\sqrt{n_1}}+\frac{s}{\sqrt{n_2}}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{(\gamma_k^{(i)})^3\Big[A_k^{(i)}n_1I_0\Big(\gamma_k^{(i)}\sqrt{n_1}r\Big)\overline{K}_6^{(i)}\Big(\gamma_k^{(i)}z_1\sqrt{n_1}\Big)+$$

$$+sn_2B_k^{(i)}I_0\Big(\gamma_k^{(i)}\sqrt{n_2}r\Big)\overline{K}_6^{(i)}\Big(\gamma_k^{(i)}z_2\sqrt{n_2}\Big)\Big]-(\alpha_k^{(i)})^3J_0(\alpha_n^{(i)}r)\left[\left(\overline{K}_4^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)}z_1\right)\frac{1}{\sqrt{n_1}}+\overline{K}_5^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)}z_2\right)\frac{s}{\sqrt{n_1}}\right)\right]\Big\}\Big\rangle$$

$$Q_{3r}^{(i)}=C_{44}(1+m_1)\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{(\gamma_k^{(i)})^3\Big[A_k^{(i)}\sqrt{n_1}I_1\Big(\gamma_k^{(i)}\sqrt{n_1}r\Big)\overline{K}_1^{(i)}\Big(\gamma_k^{(i)}z_1\sqrt{n_1}\Big)+s_0\sqrt{n_2}B_k^{(i)}I_1\Big(\gamma_k^{(i)}\sqrt{n_2}r\Big)\overline{K}_1^{(i)}\Big(\gamma_k^{(i)}z_2\sqrt{n_2}\Big)\Big]+$$

$$+(\alpha_k^{(i)})^3J_1\left(\alpha_k^{(i)}r\right)\left[\frac{1}{n_1}\overline{K}_2^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)}z_1\right)+\frac{s_0}{\sqrt{n_2}}\overline{K}_3^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)}z_2\right)\right]\Big\}\ \ (i=\overline{1,2})$$

де $J_v(x),\quad I_v(x)$ – функції Бесселя дійсного та уявного аргументу, відповідно, значення $D_{44},C_{44},l_1,l_2,m_1,m_2,s_0$ визначаються із [1] та визначають початковий напружений стан у контактуючих пружних тілах.

Невідомі коефіцієнти $A_0^{(i)}\ ,C_0^{(i)}\ ,B_k^{(i)}\ ,C_k^{(i)}\ ,D_k^{(i)}\ ,E_k^{(i)}\ ,F_k^{(i)}\ ,N_k^{(i)}\ ,M_k^{(i)}\ \ (i=\overline{1,2})$ визначаються, спираючись на значення інтегралів:

$$\int_0^1 x^3J_0(\lambda_1x)dx=\frac{2}{\lambda_1^2}J_0(\lambda_1),\ \int_0^1 xI_0(\lambda_1x)dx=\int_0^1 xJ_0(\lambda_1x)dx=0\ ,\ \int_0^1 xJ_0(\lambda_1x)I_0(\lambda_2x)dx=\begin{cases}0,\lambda_1\neq\lambda_2\\0.5J_0^2(\lambda_1),\lambda_1=\lambda_2\end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2J_0(\lambda_1x)I_0(\lambda_2x)dx=\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}J_0(\lambda_1)\left(I_0(\lambda_2)-\frac{2\lambda_2I_1(\lambda_2)}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\right),\ \int_0^1 xJ_0(\lambda_1x)I_0(\lambda_2x)dx=\frac{\lambda_2I_1(\lambda_2)J_0(\lambda_1)}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}.$$

Враховуючи розв’язок для штампа (7) та задовольняючи граничні умови (1) – (6), знаходимо власні значення задачі (1) – (6) для $n_1\neq n_2$:

$$\gamma_k^{(i)}=\frac{\pi(2k+1)}{H^{(i)}},\ \alpha_k=\mu_kR^{-1},\ (J_1(\mu_k)=0)\ \ (i=\overline{1,2};k=0,1,2,...)\,. \qquad (8)$$

Для пружного шару компоненти напружено-деформованого стану будемо визначати через гармонійні функції і за допомогою інтегралів Хенкеля:

$$U_3 = \theta_3 \left[\int_0^\infty f(\xi)\xi^{-1} J_0(\xi\rho) d\xi - \int_0^\infty f(\xi)\xi^{-1} F\left(\xi h^{(i)}\right) J_0(\xi\rho) d\xi \right] \quad Q_{33} = \theta_1 \int_0^\infty f(\xi) J_0(\xi\rho) d\xi$$

де $\theta_1 = c_{44} l_1 (1 + m_1)\tilde{k}$, $h^{(i)} = \dfrac{h}{R^{(i)}}$, $\theta_3 = \dfrac{m_1(s_1 - s_0)}{\sqrt{n_1}}$, $\tilde{k} = \begin{cases} s_0 - s_1, & для\ n_1 = n_2, \\ 1 + s, & для\ n_1 \neq n_2. \end{cases}$,

$$f(\xi) = \frac{\xi^3 B_2}{\left(R^{(i)}\right)^3 (1 - F(\xi))}$$

Вид функції $F(\xi)$ визначаються із граничних умов (2) - (6).

Далі з умов неперервності напружень та переміщень у зоні контакту та поза нею (3), задача зводиться до системи парних інтегральних рівнянь. Після чого за допомогою формул звернення отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма II роду відносно $F(\xi)$. Розв'язок якого будемо шукати методом послідовних наближень [1]. Відмітимо, що процес послідовних наближень збіжний при $h > 1$ та $\lambda_1 > \lambda_{kp}$, враховуючи дослідження проведені в [1, 2].

Використовуючи граничні умови на торці пружних штампів та ортогональність бесселевих функцій отримаємо умови для нерівних коренів визначального рівняння [1], з яких отримаємо нескінченну квазірегулярну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\vartheta_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{kn} \chi_n = \varpi_k \quad (k = 0, 1, 2, ..) \tag{9}$$

де χ_i (i=0,1,2,..) – шукані сталі через які виражаються компоненти напружень і переміщень пружних контактуючих тіл з початковими напруженнями.

Відмітимо, що при $R_1 = R_2$ (де R_1, R_2 – радіуси першого та другого співвісних циліндрів, відповідно) дана задача може бути трактована як задача про тиск попередньо напруженого циліндричного штампа на шар з початковими напруженнями, що знаходиться на жорсткій основі без тертя [5].

Отже, в результаті числової реалізації методу розв'язку було виявлено, що початкові напруження досить суттєво впливають на закон розподілу контактних характеристик попередньо напружених співвісних циліндрів та шару у випадку потенціалів найпростішої структури. При чому у випадку стиску вони призводять до зменшення сили напружень, а при розтягненні – до їх збільшення. Для переміщень – навпаки. Отже, вплив початкових напружень є суттєвим для контактуючих тіл і повинен враховуватися при розрахунках на міцність у деталях конструкцій.

Список літератури

1. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями: Навчальний посібник. Київ: Вища школа. 1995. 304 с.
2. Guz A.N., Babich S.Y., Rudnitskii V.B. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research. *Int. Appl. Mech. Rew*. 1998. **51**, №5. P. 343–371. https://doi.org/10.1115/1.3099009
3. Александров В.М., Арутюнян Н.Х. Контактные задачи для преднапряженных деформируемых тел. Прикл. механика. 1984. **20**, № 3. С. 9 – 16. https://doi.org/10.1007/BF00883134.
4. Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов: Вища шк. 1981. 136 с.
5. Yaretskaya N. A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses /N.A. Yaretskaya// International Applied Mechanics. – July 2014. – Volume 50, Issue 4. – pp. 378 –388. https://doi.org/10.1007/s10778-014-0641-y.
6. Рудницький В.Б.,Яецька Н.О.,Венгер В.О.Застосування IT технологій в механіці деформованого твердого тіла /В.Б. Рудницький, Н.О. Яецька, В.О. Венгер// Проблеми трибології (Problems of Tribology) 2017, Том 84, № 2. – Хмельницький: ХНУ. – с. 32-40.
7. Yaretskaya N. F. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses /N.F. Yaretskaya// International Applied Mechanics. – October, 2018. – Volume 54, Issue 5. – pp. 539 –543.