

**Кузьменко А.Г.**Хмельницький національний  
університет,  
м. Хмельницький, Україна  
E-mail: kuzmenko-36@mail.ru**ТРЕХФАКТОРНАЯ МОДЕЛЬ МАСШТАБНО-  
ГО ФАКТОРА (МФ) В ИЗНОСЕ. ЧАСТЬ 1 –  
ТЕОРИЯ**

УДК 621.891

Предложен метод построения трех факторных аналитических моделей трибологических процессов. В большинстве случаев установлено, что при прочих (давление, путь трения) условиях – влияния площади контакта линейное или пропорциональное.

**Ключевые слова:** методы, испытания, износ, модели, масштабный фактор.

**Введение**

В 50-е года XX века интенсивно развивалась и применялась математическая теория планирования многофакторных экспериментов (МПЭ).

Основы этой теории были заложены английским статистиком Р. Фишером еще в 1935 г. Численная процедура планирования экспериментов по этой теории основана на построении линейных или квадратичных моделей процессов.

На сложность и недостаточную надежность и понимание МПЭ указывалось в разных работах Налимова в частности в [6].

В данной работе указано, что в случае 3-х факторного эксперимента возможно эффективное планирование и определение параметров моделей простыми аналитическими методами.

Применение этих методов показано на примере построения модели влияния размеров площадки контакта на износ поверхностей трения.

Давно (1955) [4] замечено, что при прочих равных условиях на износ влияют размеры контактирующих поверхностей. В 1982 г. нами предложена [5] и далее развивалась [3] статистическая модель влияния масштабного фактора на износ.

Среди методов испытаний на износ с определением параметров моделей изнашивания эффективными показали себя методы испытаний с переменной площадкой контакта (МППК) [1,2].

В этих методах площадь контакта от начала и до завершения испытаний может изменяться в широком диапазоне (в десятки раз). В связи с этим влияние масштабного фактора на результаты испытаний на износ может быть существенным и требует учета.

В связи с этим ставится **две задачи: первая** – предложить и реализовать модель и методику учета масштабного фактора в испытаниях на износ при переменной площадке контакта, с определением параметров этой модели; **вторая задача** – установить связь параметров первой модели со статистическими характеристиками неоднородной поверхностей трения.

В дальнейшем метод обобщается еще на другие трех факторные модели. Во второй модели учитывается зависимость износа от пути трения  $S$ , давления  $\sigma$  и скорости скольжения  $V$ , в третьей модели тремя факторами являются: путь трения  $S$ , давления  $\sigma$  и температура трения  $T^\circ C$ .

В дальнейшем аналогичным образом могут быть построены трех факторные модели для процессов с учетом других трех факторов как в процессах например трения, смазывания, контактирование и других трибологических и других механических процессов.

**1. Модель и теория эксперимента****1.1. Смысловая постановка задачи**

- 1) рассматривается контактное взаимодействие шара по плоскости с учетом износа шара;
- 2) при скольжении шара по плоскости на пути трения  $S$  шар изнашивается на величину  $U_w$  с образованием круглой площадки контакта размером диаметра ровно  $2a$ ; полагаем, что в начальной момент  $t$ , площадка контакта мала,  $a(S_1)$  а в конце испытаний  $S_k$  площадка существенно увеличивается:

$$a(S_k) \gg a(S_1); \quad (1.1)$$

- 3) известно, что интенсивность износа зависит от размера (площади) площадки контакта.

**1.2. Модель износа с учетом масштабного фактора**

- 1) в традиционной модели:

$$\frac{dU_w}{dS} = K_w \sigma^m; \quad (1.2)$$

влияние размера площадки не учитывается;

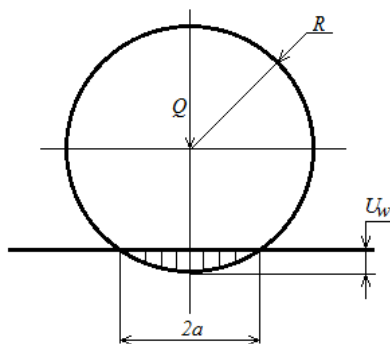


Рис. 1 – Схема контакта

2) здесь для учета этого влияния будем использовать модель изнашивания вида:

$$\frac{dU_w}{dS} = K_w \sigma^m a^{2n}; \quad (1.3)$$

3) для практического использования модели (1.3) необходимо определить три параметра  $K_w, m, n$ ; в работе ставится задача разработки и реализации методики определения этих параметров из эксперимента.

### 1.3. Математическая постановка прямой задачи

1) в соответствии с схемой рис.1 из геометрических соотношений следует:

$$U_w = \frac{a^2}{2R}; \quad (1.4)$$

2) из условия равновесия в контакте при круглой площадке и равномерном распределении давлений, имеем:

$$\sigma = \frac{Q}{\pi a^2}; \quad (1.5)$$

3) таким образом ставится задача при использовании соотношений (1.3), (1.4), (1.5) и результатов испытаний на износ определить три параметра  $K_w, m, n$  модели износа с учетом масштабного фактора, имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dU_w}{dS} &= K_w \sigma^m a^{2n}; \quad (a) \\ U_w &= \frac{a^2}{2R}; \quad (б) \\ \sigma &= \frac{Q}{\pi a^2}. \quad (c) \end{aligned} \quad (1.6)$$

### 1.4. Решение прямой задачи

1.4.1. Смысловая постановка задачи:

1) математическая постановка задачи формируется с помощью уравнений (1.6) при условии, что параметры модели (1.1)  $K_w, m, n$  – заданы;

2) требуется определить значение размеров площадки контакта  $a(S)$ , удовлетворяющие системе уравнений (1.6); т.е. получить зависимость для определения  $a(S)$  с учетом всех влияющих факторов:

$$a(S, Q, R, m, n, K_w),$$

или дано (1.6) получить формулу типа :

$$a(S, Q, R, m, n, K_w).$$

1.4.2. Вывод дифференциального уравнения процесса изнашивания:

1) дифференцируя по  $S$  выражение (б) в (1.6) получаем:

$$\frac{dU_w}{dS} = \frac{a}{R} \frac{da}{dS}; \quad (1.7)$$

2) подставляя (1.7) и (с) из (1.6) в (а) из (1.6), получаем:

$$\frac{a}{R} \frac{da}{dS} = K_{w_n} \left( \frac{Q}{\pi a^2} \right)^m a^{2n}; \quad (1.8)$$

3) преобразовывая (1.8), имеем:

$$\left( a^{2m+1-2n} \right) da = K_{w_n} R (Q/\pi)^m dS; \quad (1.9)$$

это дифференциальное уравнение будем решать при условии, что в начале процесса площадка контакта равна нулю т.е.:

$$a(S=0) = 0. \quad (1.10)$$

1.4.3. Решение уравнения (1.9) с учетом (1.10)

1) интегрируя (1.11), имеем:

$$\frac{a^{2m+2-2n}}{2m+2-2n} = K_{w_n} R (Q/\pi)^m S + C; \quad (1.11)$$

с учетом (1.12) имеем  $C = 0$ , тогда решение имеет вид:

$$a^{2m+2-2n} = (2m+2-2n) K_{w_n} R (Q/\pi)^m S. \quad (1.12)$$

## 1.5. Постановка и решение обратной задачи

### 1.5.1 Постановка задачи

1) математическая постановка задачи соответствует системе уравнений (1.6), которую необходимо решить относительно параметров  $K_w, m, n$  при использовании экспериментальных данных в форме  $a(S)$ .

### 1.5.2. Схема эксперимента

1) будем полагать, что испытания выполнены по схеме рис.2;

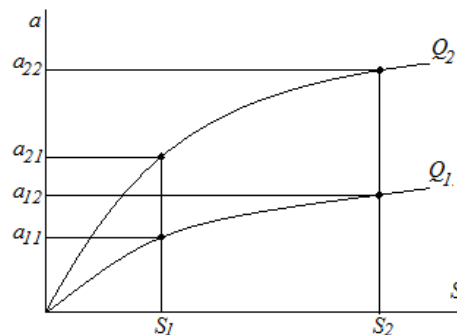


Рис. 2 – Схема представления результатов с испытаний

2) испытания выполняются при двух нагрузках  $Q_1, Q_2$  на испытываемую пару шар-плоскость;

3) по результатам испытаний строится график двух функции  $a_1(S, Q_1); a_2(S, Q_2)$ ;

4) функции  $a_1(S), a_2(S)$  аппроксимируются степенными функциями:

$$a_1 = C_1 S^{\beta_1}; a_2 = C_2 S^{\beta_2}; \quad (1.13)$$

5) параметры  $C_1, \beta_1, C_2, \beta_2$  аппроксимируемых функции могут быть определены численно методом наименьших квадратов или приближенно по двум точкам:

$$\beta_1 = \frac{\lg a_{11}/a_{12}}{\lg S_1/S_2}; \beta_2 = \frac{\lg a_{21}/a_{22}}{\lg S_1/S_2}; \quad (1.14)$$

$$C_1 = \frac{a_1(S_1)}{S_1 \beta_1}; C_2 = \frac{a_2(S_1)}{S_1 \beta_2};$$

1.5.3. Порядок решения обратной задачи:

1) обратную задачу будем решать при использовании решения прямой задачи, полученное в форме (1.14);

2) для определения трех параметров  $K_w, m, n$  с учетом (1.14) необходимо иметь три уравнения;

3) с этой целью запишем (1.14) для трех точек функции  $a(S)$  по рис.2 с координатами:

$$(a_{11}, S_1, Q_1); (a_{12}, S_2, Q_1); (a_{21}, S_1, Q_2);$$

4) подставляя координаты этих точек в решении прямой задачи (1.14), получаем три уравнения обратной задачи:

$$\begin{aligned} a_{11}^{2m+2-2n} &= (2m+2-2n)K_{w_n} R(Q_1/\pi)^m S_1; \\ a_{12}^{2m+2-2n} &= (2m+2-2n)K_{w_n} R(Q_1/\pi)^m S_2; \\ a_{22}^{2m+2-2n} &= (2m+2-2n)K_{w_n} R(Q_2/\pi)^m S_2; \end{aligned} \quad (1.15)$$

1.5.4. Решение системы уравнений (1.15) обратной задачи:

1) разделив первое уравнение на второе, получаем:

$$\left( \frac{a_{11}}{a_{12}} \right)^{2m+2-2n} = \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^m; \quad (1.16)$$

2) разделив второе уравнение на третье, имеем:

$$\left( \frac{a_{12}}{a_{22}} \right)^{2m+2-2n} = \left( \frac{Q_1}{Q_2} \right)^m; \quad (1.17)$$

3) в результате имеем два уравнения (1.16), (1.17) с двумя неизвестными  $m, n$ ;

4) логарифмируя уравнения (1.16), (1.17), имеем:

$$\begin{aligned} (2m+2-2n) \lg(a_{11}/a_{12}) &= \lg(S_1/S_2); \\ (2m+2-2n) \lg(a_{12}/a_{22}) &= m \lg(Q_1/Q_2); \end{aligned} \quad (1.18)$$

5) решая систему (1.18), получаем:

$$\frac{\lg(a_{11}/a_{12})}{\lg(a_{12}/a_{22})} = \frac{1}{m} \frac{\lg(S_1/S_2)}{\lg(Q_1/Q_2)},$$

отсюда:

$$m = \frac{\lg(a_{12}/a_{22}) \lg(S_1/S_2)}{\lg(a_{11}/a_{12}) \lg(Q_1/Q_2)}; \quad (1.19)$$

и с учетом (1.14):

$$m = \beta_1 \frac{\lg(a_{12}/a_{22})}{\lg(a_{11}/a_{12})}; \quad (1.20)$$

6) параметр  $n$  определяем из уравнения (1.16) с учетом (1.20):

$$\begin{aligned} (2m+2-2n) &= \beta_1; \\ n &= \frac{1}{2}(2m+2-\beta_1); \end{aligned} \quad (1.21)$$

(1.20)→(1.21) ⇒

$$n = \frac{1}{2} \left( 2\beta_1 \frac{\lg(a_{12}/a_{22})}{\lg(Q_1/Q_2)} + 2 - \beta_1 \right); \quad (1.22)$$

## 1.6. Определение параметра $K_w$

1) Из первого уравнения системы (1.15) при известных значениях параметров  $m$  и  $n$  находим:

$$K_{w_n} = \frac{a_{11}^{2m+2-2n}}{(2m+2-2n)R(Q_1/\pi)^m S_1}; \quad (1.23)$$

1.6.1. Оценка влияния размера площадки контакта  $a$  на износ

1) Сравнение интенсивности изнашивания выполним по модели (1.3) при одинаковых давлениях  $\sigma$ , и пути трения  $S$ ;

2) для двух размеров площадки  $a_I, a_{II}$ :

$$\begin{aligned}(I_w)_I &= \frac{dU_w}{dS} = K_{w_n} \sigma^m a_I^{2n}; \\ (I_w)_{II} &= \frac{dU_w}{dS} = K_{w_n} \sigma^m a_{II}^{2n};\end{aligned}\tag{1.24}$$

3) разделив первое на второе получаем:

$$\frac{(I_w)_I}{(I_w)_{II}} = \left( \frac{a_I}{a_{II}} \right)^{2n};\tag{1.25}$$

### 1.7. Случай когда $n = 0$ , отсутствие влияния масштаба

1) модель:

$$\frac{dU_w}{dS} = K_w \sigma^m;\tag{1.2}$$

2) получая  $n = 0$  из (1.12), имеем:

$$a^{2m+2} = (2m+2) K_{w_n} R(Q/\pi)^m S;\tag{1.26}$$

3) выбирая две точки  $(a_{11}, S_1), (a_{12}, S_2)$ , имеем систему:

$$\begin{aligned}C^{2m+2} S_1^{(2m+2)\beta} &= (2m+2) K_w R(Q_1/\pi)^m S_1; \\ C^{2m+2} S_2^{(2m+2)\beta} &= (2m+2) K_w R(Q_1/\pi)^m S_2;\end{aligned}\tag{1.27}$$

4) решения системы:

$$\left( \frac{S_1}{S_2} \right)^{(2m+2)\beta} = \frac{S_1}{S_2};\tag{1.28}$$

отсюда:

$$\begin{aligned}(2m+2)\beta &= 1; \\ m &= \frac{1-2\beta}{2\beta};\end{aligned}\tag{1.29}$$

(1.27)→(1.24) ⇒

$$K_{w_n} = \frac{C^{2m+2}}{R(Q/\pi)^m S}.\tag{1.30}$$

### Выводы

1. Предложен метод построения трехфакторных аналитических моделей трибологических процессов.
2. Построение трехфакторных трехпараметрических моделей влияния масштабного фактора в износе пар трения.
3. Разработана и реализована процедура определения параметров модели масштабного фактора в износе.
4. Определены параметры модели масштабного фактора в износе для 4-х пар трения.
5. В большинстве случаев установлено, что при прочих равных условиях (давление, путь трения)– влияние площади контакта линейное или пропорциональное.

### Литература

1. Кузьменко А.Г. Теоретическая и экспериментальная трибология том 6. Прикладная теория методов испытаний на износ, -Хмельницкий: ХНУ . -2007. -5. 79с.
2. Кузьменко А.Г. Методы испытаний на износ при переменной площадке контакта с определением параметров модели изнашивания // Проблемы трибологии .- 2014. – w1. – с123 – 148.
3. Кузьменко А.Г. Влияния статистической неоднородности, размеров и кинематических условий на износ поверхностей трения // Трение на износ. – 1985. – т6. – w3.- с 432 – 441.
4. Гаркунов Д.Н. Влияния отношения поверхности трения на износ // Доклады АН СССР. – 1955. – т104. – w2. с.125
5. Кузьменко А.Г. Статистическое уравнения подобия и масштабный фактор в износе // Деконезовано в ВИНТИ – 1659 – 88. – Брянск: - БИМ – 1982.

---

6. Налимов В.В. Голинова Т.Н. Логические основание планирование эксперимента М.: Металлургия, 1981. – 152с.

Надійшла в редакцію 04.12.2014

**Kuzmenko A.G. Three-factor model of the scale factor (SF) in the wear. Part 1**

A method of constructing three factor analytic models tribology processes. In most cases, found that when other (pressure, friction path) conditions - the influence of the contact area of the linear or proportional.

**Keywords:** methods, testing, wear, model, scale factor.

**References**

1. Kuzmenko A.G. Teoreticheskaya i eksperimentalnaya tribologiya tom 6. Prikladnaya teoriya metodov isptaniy na iznos, -Hmelnitskiy: HNU . -2007. -5 .79s.
2. Kuzmenko A.G. Metodi ispyitaniy na iznos pri peremennoy ploschadke kontakta s opredeleniem parametrov modeli iznashivaniya // Problemyi tribologii .- 2014. – w1. – s123 – 148.
3. Kuzmenko A.G. Vliyaniya statisticheskoy neodnorodnosti, razmerov i kinematcheskikh usloviy na iznos poverhnostey treniya // Trenie na iznos. – 1985. – t6. – w3.- s 432 – 441.
4. Garkunov D.N. Vliyaniya otnosheniya poverhnosti treniya na iznos // Dokladyi AN SSSR. – 1955. – t104. – w2. s.125
5. Kuzmenko A.G. Statisticheskoe uravneniya podobiya i masshtabniy faktor v iznose // Dekonezovano v VINITI – 1659 – 88. – Bryansk: - BIM – 1982.
6. Nalimov V.V. Golinova T.N. Logicheskie osnovanie planirovanie eksperimenta M.: Metal-lurgiya, 1981. – 152s.