3)породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}^{(\mu)jk}_{(\alpha);i2}(t,r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\omega^2 t}Z^{(\mu),k}_{(\alpha);i2}(\beta)V^{(\mu)}_{(\alpha);j}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta;i,k=1,2;j=\overline{1,3} \quad (46)$$

Зауваження 1. Якщо $\gamma^2=\gamma_1^2>0$, то $k_1^2=0, k_2^2=\gamma_1^2-\gamma_2^2\geq 0, k_3^2=\gamma_1^2-\gamma_3^2\geq 0$; якщо $\gamma^2=\gamma_2^2>0$, то $k_1^2=\gamma_2^2-\gamma_1^2\geq 0, k_2^2=0; k_3^2=\gamma_2^2-\gamma_3^2\geq 0$; якщо $\gamma^2=\gamma_3^2>0$, то $k_1^2=\gamma_3^2-\gamma_1^2\geq 0, k_2^2=\gamma_3^2-\gamma_2^2\geq 0, k_3^2=0$.

Зауваження 2. Інтегральне зображення даної задачі теплопровідності поліпараметричне . Структура головних розв'язків дозволяє безпосередньо вибором параметрів виділити будь-який практично важливий випадок (в рамках даної моделі) .

Зауваження 3. Розв'язок (43) задачі теплопровідності (34) - (37) носить алгоритмічний характер . Це дає змогу застосувати його як в теоретичних дослідженнях , так і в числових розрахунках .

За наведеною логічною схемою можна одержати інтегральне зображення розв'язку відповідних стаціонарних та динамічних задач.

Література

1. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. - М.: Наука, 1965. - 328с.

2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М .: Физматгиз. 1959. - 468с.

3. Конет І.М.,Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока.- Чернівці : Прут,2002.-248с.

4. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва.-Чернівці:Прут, 2002.-280с.

5. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя ,Лежандра). Частина 1 . - Тернопіль: Економ. думка,2004.-368с.

6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука. 1971. - 432с.

7. Ленюк М.П.,Ленюк О.М. Гібридне інтегральне перетворення Лежандра-Фур'є -Ейлера на полярній осі //Науковий вісник Чернівецького університету : Зб.наук.пр.Вип.528. Математика .-Чернівці : Чернівец. нац. ун-т, 2010.-С.80-87.

8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972. - 735с.

УДК 517.91:532 26

В.В.Мороз

Гібридне інтегральне перетворення типу Бесселя - Лежандра - Ейлера на сегменті $[0, R_3]$ полярної осі із спектральним параметром

(м.Хмельницький)

Запроваджено гібридне інтегральне перетворення типу Бесселя - Лежандра-Ейлера на сегменті $[0, R_3]$ полярної осі с двома точками сопряження в припущенні, що спектральний параметр бере участь в крайовій умові та умовах спряження.

Введено интегральное преобразование типа Бесселя - Лежандра - Эйлера на сегменте $[0, R_3]$ полярной оси с двумя точками спряження в предположении, что спектральный параметр принимает участие в краевом условии и условиях сопряжения.

Бібліогр.:8 назв.

Запровадимо интегральне перетворення, породжене на множині $I_2=\{r:r\in(0,R_1)\cup(R_1,R_2)\cup(R_2,R_3); R_3<\infty\}$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}=\theta(r)\theta(R_1-r)a_1^2B_{\nu,\alpha_1}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)a_2^2\Lambda_{(\mu)}+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)a_3^2B^*_{\alpha_2}, \quad (1)$$

де $\theta(x)$ - одинична функція Гевісайда [1],$a_j>0, (j=\overline{1,3})$;

Означення. Областю визначення ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ назвемо множину G вектор-функцій $g(r)=\{g_1(r);g_2(r);g_3(r)\}$ з такими властивостями:

1)вектор-функція $f(r)=\{B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)];\Lambda_{(\mu)}[g_2(r)];B^*_{\alpha_2}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2;

2) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$[(\tilde{\alpha}^k_{j1}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}^k_{j1})g_k(r)-(\tilde{\alpha}^k_{j2}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}^k_{j2})g_{k+1}(r)]|_{r=R_k}=0, j, \mathbf{k=1,2} \quad (2)$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\lim_{r\to 0}[r^\gamma g_1(r)]=0, (\tilde{\alpha}^3_{22}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}^3_{22})g_3(r)\,|_{r=R_3}=0 \quad (3)$$

У рівностях (1) беруть участь диференціальні оператори Бесселя [3], Ейлера [2] та Лежандра [4]: $B_{\nu,\alpha_2}=d^2/dr^2+(2\alpha_1+1)r^{-1}d/dr-(\nu^2-\alpha_1^2)r^{-2}$[3] $B^*_{\alpha_2}=r^2d^2/dr^2+(2\alpha_2+1)rd/dr+\alpha_2^2$[2], $\Lambda_(\mu)=d^2/dr^2+cthrd/dr+1/4+1/2(\frac{\mu_1^2}{1-d_1r}+\frac{\mu_2^2}{1+d_1r})$[4];

$2\alpha_j+1>0, \nu\geq\alpha_1, (\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2), (\mu)=(\mu_1,\mu_2)$, $\mu_1\geq\mu_2\geq 0$. У рівностях (2),(3) беруть участь коефіцієнти:

$\tilde{\alpha}_{jm}^k = \alpha_{jm}^k - (\beta^2+\gamma^2)\delta_{jm}^k, \tilde{\beta}_{jm}^k = \beta_{jm}^k - (\beta^2+\gamma^2)\gamma_{jm}^k; \gamma^2 \geq 0, \beta$ - спектральний параметр.

Припустимо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha_{jm}^k \geq 0, \beta_{jm}^k \geq 0$, $\delta_{jm}^k \geq 0, \gamma_{jm}^k \geq 0; c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k; c_{11,k}\cdot c_{21,k} > 0, c_{j2,k} = \delta_{2j}^k\gamma_{1j}^k -$ $-\delta_{1j}^k\gamma_{2j}^k = 0, \alpha_{1j}^k\gamma_{2j}^k - \alpha_{2j}^k\gamma_{1j}^k = \beta_{1j}^k\delta_{2j}^k - \beta_{2j}^k\delta_{1j}^k; j, m, k = 1, 2;$

$$\tilde{\alpha}_{22}^3 = \alpha_{22}^3 - \delta_{22}^3(\beta^2+\gamma^2), \tilde{\beta}_{22} = \beta_{22}^3 - \gamma_{22}^3(\beta^2+\gamma^2); \alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \neq 0, \delta_{22}^3 + \gamma_{22}^3 \neq 0.$$

Зауваження1. Для $u(r) \in G$ та $v(r) \in G$ з умов спряження (2) випливає базова тотожність

$$[u_k'(r)v_k(r) - u_k(r)v_k'(r)]\,|_{r=R_k} = \frac{c_{21,k}}{c_{11,k}}[u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r) - u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r)]\,|_{r=R_k} \quad (4)$$

Визначимо величини

$$a_1^2\sigma_1 = \frac{c_{11,1}c_{11,2}shR_1}{c_{21,1}c_{21,2}shR_2}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}, a_2^2\sigma_2 = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{shR_2}, a_3^2\sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2 shr + \theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1} \quad (5)$$

та скалярний добуток

$$(u(r), v(r)) = \int_0^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr + \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 shrdr +$$

$$+\int_{R_2}^{R_3} u_3(r)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr \equiv \int_0^{R_3} u(r)v(r)\sigma(r)dr. \quad (6)$$

Лема1. ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ самоспряжений.
Доведення Згідно правила (6) скалярний добуток

$$(M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[u], v) = \int_0^{R_1} a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[u_1]\cdot v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr + \int_{R_1}^{R_2} a_2^2\Lambda_\mu[u_2]\cdot v_2(r)\sigma_2 shrdr +$$

$$+\int_{R_2}^{R_3} a_3^2 B_{\alpha_2}^*[u_3]\cdot v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr \quad (7)$$

Проінтегруємо під знаками інтегралів два рази частинами :

$$(M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[u], v) = [\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}a_1^2(u_1'(r)v_1(r) - u_1(r)v_1'(r)]\,|_0^{R_1} + \int_0^{R_1} u_1(r)(B_{\nu,\alpha_1}[v_1(r)]a_1^2)\times$$

$$\times\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr + [a_2^2\sigma_2 shr(u_2'(r)v_2(r) - u_2(r)v_2'(r)]\,|_{r=R_1}^{r=R_2} + \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)(a_2^2\Lambda_\mu[u_2(r)])\sigma_2 shrdr +$$

$$+[\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}a_3^2(u_3'(r)v_3(r) - u_3(r)v_3'(r)]\,|_{r=R_2}^{r=R_3} + \int_{R_2}^{R_3} u_3(r)(a_3^2 B_{\alpha 2}^*[v_3(r)])\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr \quad (8)$$

Внаслідок базової тотожності (4) в точці $r = R_1$ маємо:

$$\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}(u_1'(R_1)v_1(R_1) - u_1(R_1))v_1'(R_1) - \sigma_2 shR_1(u_2'(R_1)v_2(R_1) - u_2(R_1)v_2'(R_1)) =$$

$$= (\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}} - \sigma_2 shR_1)(u_2'(R_1)v_2(R_1) - u_2(R_1)v_2'(R_1) = 0 \quad (9)$$

тому що в силу вибору σ_1, σ_2 вираз

$$(a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}} - a_2^2\sigma_2 shR_1) = \frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}}\cdot\frac{shR_1}{shR_2}R_2^{2\alpha_2+1}\cdot\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}} - \frac{c_{11,1}}{c_{21,2}}\frac{shR_1}{shR_2}R_2^{2\alpha_2+1} =$$

$$= \frac{c_{11,1}}{c_{21,2}}\frac{shR_1}{shR_2}R_2^{2\alpha_2+1}(1-1) \equiv 0.$$

Внаслідок базової тотожності (4) в точці $r = R_2$ маємо:

$$a_2^2\sigma_2 shR_2(u_2'(R_2)v_2(R_2) - u_2(R_2)v_2'(R_2)) - \sigma_3 a_3^2 R_2^{2\alpha_2+1}(u_3'(R_2)v_3(R_2) - u_3(R_2)v_3'(R_2)) =$$

$$= (a_2^2\sigma_2 shR_2\cdot\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}} - \sigma_3 a_3^2 R_2^{2\alpha_2+1})(u_3'(R_2)v_3(R_2) - u_3(R_2)v_3'(R_2)) = (\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}} - R_2^{2\alpha_2+1})$$

$$\times(u_3'(R_2)v_3(R_2) - u_3(R_2)v_3'(R_2)) = R_2^{2\alpha_2+1}(1-1)(u_3'(R_2)v_3(R_2) - u_3(R_2)v_3'(R_2)) \equiv 0 \quad (10)$$

При $\tilde{\alpha}_{22}^3 \neq 0$ знаходимо, що

$$\sigma_3 a_3^2 R_2^{2\alpha_2+1}(u_3'(R_2)v_3(R_2) - u_3(R_2)v_3'(R_2)) = \sigma_3 a_3^2 R_2^{2\alpha_2+1}(\tilde{\alpha}_{22}^3)^{-1}\times$$

$$\times\{[\tilde{\alpha}_{22}^3\frac{du_3}{dr} + \tilde{\beta}_{22}^3 u_3(r)]\,|_{r=R_3} v_3(R_3) - [(\tilde{\alpha}_{22}^3\frac{dv_3}{dr} + \tilde{\beta}_{22}^3 v_3(r))]\,|_{r=R_3} u_3(R_3)\} \equiv 0 \quad (11)$$

В силу умови обмеження в точці r=0 позаінтегральний член в точці r=0перетворюється в нуль.

Внаслідок (9),(10),(11) рівність (8) набуває вигляду:

$$(M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[u(r)], v(r)) = [u(r); M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[v(r)]) \tag{12}$$

Рівність (12) означає, що ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ самоспряжений оператор.

Доведення леми завершено.

Оскільки ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ самоспряжений і немає на множині I_2 ні одної особливої точки, то його спектр дійсний і дискретний [5].

Власні елементи ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ (власні числа та відповідні їм власні функції)знайдемо в результаті розв'язання відповідної задачі Штурма-Ліувілля.

Побудувати на множині I_2 розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}(B_{\nu,\alpha_1} + b_1^2)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = 0, r \in (0, R_1)\\ (\Lambda_{(\mu)} + b_2^2)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = 0, r \in (R_1, R_2)\\ (B^*_{\alpha_2} + b_3^2)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = 0, r \in (R_2, R_3)\end{gathered} \tag{13}$$

за крайовими умовами (3) та умовами спряження (2).

Тут $b_j = a_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)^{1/2}, k_j^2 \geq 0, j = \overline{1,3}; V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)$ - компоненти спектральної вектор-функції

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta) = \theta(r)\theta(R_1 - r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) + \sum_{k=1}^{2}\theta(r - R_k)\theta(R_{k+1} - r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k+1}(r,\beta) \tag{14}$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha_1} + b_1^2)v = 0$ складають функції $J_{\nu,\alpha_1}(b_1 r)$ та $N_{\nu,\alpha_1}(b_1 r)$ [3]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)} + b_2^2)v = 0$ складають функції $v_1 = A^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chr)$ та $v_2 = B^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chr); \nu_2^* = -1/2 + ib_2$[4]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_2} + b_3^2)v = 0$ складають функції $v_{\alpha_2;1}(r, b_3) = r^{-\alpha_2}\cos(b_3 lnr)$ та $v_{\alpha_2;2}(r, b_3) = r^{-\alpha_2}\sin(b_3 lnr)$[2]. Якщо в силу лінійності задачі покласти

$$\begin{gathered}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = A_1 J_{\nu,\alpha_1}(b_1 r), r \in (0, R_1),\\ V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = A_2 A^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chr) + B_2 B^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chr), r \in (R_1, R_2),\\ V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = A_3 v_{\alpha_2,1}(r, b_3) + B_3 v_{\alpha_2;2}(r, b_3), r \in (R_2, R_3),\end{gathered} \tag{15}$$

то умови спряження (2) й крайова умова в точці $r = R_3$дають однорідну алгебраїчну систему з п'яти рівнянь для визначення п'яти невідомих величин $A_j (j = \overline{1,3})$ та B_2, B_3 :

$$u^{11}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1 R_1)A_1 - Y^{(\mu),11}_{\nu_2^*;j2}(chR_1)A_2 - Y^{(\mu),12}_{\nu_2^*;j2}(chR_1)B_2 = 0; j = 1, 2;$$

$$\begin{gathered}Y^{(\mu),21}_{\nu_2^*;j1}(chR_2)A_2 + Y^{(\mu),22}_{\nu_2^*;j1}(chR_2)B_2 - Y^{21}_{\alpha_2;j2}(b_3, R_2)A_3 - Y^{22}_{\alpha_2;j2}(\boldsymbol{b_3, R_2})\boldsymbol{B_3} = 0\\ Y^{31}_{\alpha_2;22}(b_3, R_2)A_3 + Y^{32}_{\alpha_2;22}(b_3, R_3)B_3 = 0\end{gathered} \tag{16}$$

У системі (16) беруть участь функції

$$u^{11}_{\nu,\alpha_1;j_1}(b_1 R_1) = (\tilde{\alpha}^1_{j1}\frac{\nu - \alpha_1}{R_1} + \tilde{\beta}^1_{j1})J_{\nu,\alpha_1}(b_1 R_1) - \tilde{\alpha}^1_{j1}R_1 b_1^2 J_{\nu+1,\alpha_1+1}(\boldsymbol{b_1 R_1}), \boldsymbol{j = 1, 2;}$$

$$Y^{(\mu),m1}_{\nu_2^*;jk}(chR_m) = (\tilde{\alpha}^m_{jk}d/dr + \tilde{\beta}^m_{jk})A^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chr)\mid_{r=R_m},$$

$$Y^{(\mu),m2}_{\nu_2^*;jk}(chR_m) = (\tilde{\alpha}^m_{jk}d/dr + \tilde{\beta}^m_{jk})B^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chr)\mid_{r=R_m},$$

$$Y^{m1}_{\alpha_2,jk}(b_3, R_m) = [(\tilde{\beta}^m_{jk} - \tilde{\alpha}^m_{jk}R_m^{-1}\alpha_2)\cos(b_3 lnR_m) - b_3 R_m^{-1}\tilde{\alpha}^m_{jk}\sin(b_3 lnR_m)]R_m^{-\alpha_2},$$

$$Y^{m2}_{\alpha_2,jk}(b_3, R_m) = [(\tilde{\beta}^m_{jk} - \tilde{\alpha}^m_{jk}R_m^{-1}\alpha_2)\sin(b_3 lnR_m) + b_3 R_m^{-1}\tilde{\alpha}^m_{jk}\cos(b_3 lnR_m)]R_m^{-\alpha_2}.$$

Для того, щоб алгебраїчна система (16) мала ненульові розв'язки, необхідно й досить, щоб її визначник був рівний нулю [6]:

$$\delta^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta) \equiv \delta_{\alpha_2;22}(b_3, R_2, R_3)a^{(\mu)}_{\nu,\alpha_1;1}(\beta) - \delta_{\alpha_2;12}(b_3, R_2, R_3)a^{(\mu)}_{\nu,\alpha_1;2}(\beta) = \boldsymbol{0} \tag{17}$$

У рівності (17) прийняті позначення:

$$\delta^{(\mu)}_{\nu_2^*;jk}(chR_1, chR_2) = Y^{(\mu),11}_{\nu_2^*;j2}(chR_1)Y^{(\mu),22}_{\nu_2^*;k1}(chR_2) - Y^{(\mu),12}_{\nu_2^*;j2}(chR_1)Y^{(\mu),21}_{\nu_2^*;k1}(chR_2),$$

$$a^{(\mu)}_{\nu,\alpha_1;j}(\beta) = u^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1 R_1)\delta^{(\mu)}_{\nu_2^*;2j}(chR_1, chR_2) - u^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(b_1 R_1)\delta^{(\mu)}_{\nu_2^*;1j}(chR_1, chR_2); j = 1, 2;$$

$$\delta_{\alpha_2;j2}(b_3, R_2, R_3) = Y^{21}_{\alpha_2;j2}(b_3, R_2)Y^{32}_{\alpha_2;22}(b_3, R_3) - Y^{22}_{\alpha_2;j2}(b_3, R_2)Y^{31}_{\alpha_2;22}(b_3, R_3).$$

Алгебраїчне рівняння (17) - трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел β_n ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta_n$ - корінь рівняння (17)).

Підставимо в систему (17) $\beta = \beta_n(b_j(\beta_n) \equiv b_{jn})$ й відкинемо останнє рівняння в силу лінійної залежності . При довільному $A_1 \neq 0$ для визначення A_2, B_2 маємо алгебраїчну систему з двох рівнянь.

$$Y^{(\mu),11}_{\nu_{2n}^*;j2}(chR_1)A_2 + Y^{(\mu),12}_{\nu_{2n}^*;j2}(chR_1)B_2 = u^{11}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_{1n}R_1)A_1, j = 1, 2; \nu_{2n}^* = -1/2 + ib_{2n} \tag{18}$$

Визначник алгебраїчної системи (18)

$$q_{(\mu)}(\beta_n) \equiv Y^{(\mu),11}_{\nu_{2n^*},12}(chR_1)Y^{(\mu),12}_{\nu_{2n}^*,22}(chR_1) - Y^{(\mu),11}_{\nu_{2n}^*22}(\boldsymbol{chR_1})Y^{(\mu),12}_{\nu_{2n}^*,12}(chR_1) =$$

$$= \frac{c_{21,1}}{S_{(\mu)}(b_{2n})shR_1} \neq 0$$

$$S_{(\mu)}(b_{2n})=\frac{2^{\mu_1}\pi^3\cos(\mu_1\pi)[\cos\mu_2\pi+\cos\mu_1\pi ch(2\pi b_{2n})]^{-1}}{2^{\mu_2}\mid\Gamma(1/2+ib_{2n}+\nu_{12}^{+})\mid^2\mid\Gamma(1/2+ib_{2n}+\nu_{12}^{-})\mid^2},\ \nu_{12}^{\pm}=1/2(\mu_1\pm\mu_2);$$

Алгебраїчна система (18) має єдиний розв'язок [6]:

$$A_2=\frac{A_1}{q_{(\mu)}(\beta_n)}[u_{\nu,\alpha_1;11}^{11}(b_{1n}R_1)Y_{\nu_{2n}^*;22}^{(\mu),12}(chR_1)-u_{\nu,\alpha_1;21}^{11}(b_{1n}R_1)Y_{\nu_{2n}^*;12}^{(\mu),12}(chR_1)],$$

$$B_2=\frac{A_1}{q_{(\mu)}(\beta_n)}[u_{\nu,\alpha_1;21}^{11}(b_{1n}R_1)Y_{\nu_{2n}^*;12}^{(\mu),11}(chR_1)-u_{\nu,\alpha_1;11}^{11}(b_{1n}R_1)Y_{\nu_{2n}^*;22}^{(\mu),11}(chR_1)]. \quad (19)$$

При визначених A_2, B_2 розглянемо алгебраїчну систему стосовно величин A_3, B_3:

$$Y_{\alpha_2;j2}^{21}(b_{3n},R_2)A_3+Y_{\alpha_2;j2}^{22}(b_{3n},R_2)B_3=-A_1[q_{(\mu)}(\beta_n)]^{-1}a_{\nu,\alpha_1;j}^{(\mu)}(\beta_n);\ j=1,2 \quad (20)$$

Визначник алгебраїчної системи (20)

$$q_{\alpha_2}(\beta_n)\equiv Y_{\alpha_2;12}^{21}(b_{3n},R_2)Y_{\alpha_2;22}^{22}(b_{3n},R_2)-Y_{\alpha_2;22}^{21}(b_{3n},R_2)Y_{\alpha_2;12}^{22}(b_{3n},R_2)=$$
$$=c_{21,2}b_{3n}R_2^{-(2\alpha_2+1)}\neq 0$$

Алгебраїчна система (20) має єдиний розвязок [6]:

$$A_1=q_{(\mu)}(\beta_n)q_{\alpha_2}(\beta_n),\ A_3=\omega_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(\beta_n),\ B_3=-\omega_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(\beta_n); \quad (21)$$

$$\omega_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(\beta_n)=a_{\nu,\alpha_1;2}^{(\mu)}(\beta_n)Y_{\alpha_2;12}^{2j}(b_{3n},R_2)-a_{\nu,\alpha_1;1}^{(\mu)}(\beta_n)Y_{\alpha_2;22}^{2j}(b_{3n},R_2),\ j=1,2$$

Піставимо в рівності (15) визначені формулами (19) та (21) величини A_j й B_k. Одержуємо шукані функції:

$$V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)=q_{(\mu)}(\beta_n)q_{\alpha_2}(\beta_n)J_{\nu,\alpha_1}(b_{1n}r),$$
$$V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)=q_{\alpha_2}(\beta_n)[u_{\nu,\alpha_1;21}^{11}(b_{1n}R_1)f_{\nu_{2n}^*;12}^{(\mu),1}(chR_1,chr)-$$
$$-u_{\nu,\alpha_1;11}^{11}(b_{1n}R_1)f_{\nu_{2n}^*;22}^{(\mu),1}(chR_1,chr)], \quad (22)$$
$$f_{\nu_{2n}^*;j2}^{(\mu),1}(chR_1,chr)=Y_{\nu_{2n}^*;j2}^{(\mu),11}(chR_1)B_{\nu_{2n}^*}^{(\mu)}(chr)-Y_{\nu_{2n}^*;j2}^{(\mu),12}(chR_1)A_{\nu_{2n}^*}^{(\mu)}(chr);$$
$$V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta_n)=\omega_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(\beta_n)r^{-\alpha_2}\cos(b_{3n}lnr)-\omega_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(\beta_n)r^{-\alpha_2}\sin(b_{3n}lnr).$$

Згідно рівності (14) спектральна функція $V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)$ визначена.

Відомо [7], що система $\{V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ власних функцій узагальнено ортогональна з ваговою функцією $\sigma(r)$. Квадрат норми власної функції обчислюється за правилом [7]:

$$\|V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|_1^2=\|V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|_1^2+Q_2(\beta_n,\beta_n) \quad (23)$$

Наявність вагової функції $\sigma(r)$, спектральної вектор-функції $V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)$ та її квадрату норми $\|V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|_1^2$ дає можливість визначити пряме $H_{\nu,(\alpha);n}^{(\mu)}$ й обернене $H_{\nu,(\alpha);n}^{-(\mu)}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_2 ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu,(\alpha);n}^{(\mu)}[g(r)]=\int_0^{R_3}g(r)V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}_n, \quad (24)$$

$$H_{\nu,(\alpha);n}^{-(\mu)}[\tilde{g}_n]=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n\frac{V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\|V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|_1^2}\equiv g(r) \quad (25)$$

Математичним обґрунтуванням правил (24), (25) є твердження.

Теорема 1 (про дискретний спектр). Корені β_n трансцендентного рівняння $\delta_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)=0$ складають дискретний спектр ГДО $\delta_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$: дійсні, різні (за винятком, можливо, нуля), симетричні відносно точки $\beta=0$ й на півосі $\beta>0$ утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою $\beta=\infty$.

Теорема 2 (про дискретну функцію). Система $\{V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ власних вектор-функцій ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ узагальнено ортогональна, повна й замкнена.

Теорема 3(про зображення рядом Фур'є). Будь-яка вектор-функція $g(r)\in G$ зображається абсолютно й рівномірно збіжним на множині I_2 рядом Фур'є за системою $\{V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$g(r)=\sum_{n=1}^{\infty}(\int_0^{R_3}g(\rho)V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho)\frac{V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\|V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|_1^2} \quad (26)$$

Якщо перейти до ортонормованої системи власних вектор-функцій

$$\{v_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}=V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)(\|V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|_1)^{-1}\}_{n=1}^{\infty},$$

то ряд Фур'є (26) набуде простішого вигляду :

$$g(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{R_3}g(\rho)v_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho v_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n) \quad (27)$$

При цьому запис правила (24), (25) стає простішою:

$$H_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)]=\int_0^{R_3}g(r)v_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}_n, \quad (28)$$

$$H^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n) \equiv g(r) \tag{29}$$

Застосування правил (28),(29) до розв'язання відповідних задач базується на основній тотожності інтегрального перетворення ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$.

Визначимо величини та функції :

$$d_1 = a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} : c_{11,1},\ d_2 = a_2^2\sigma_2 shR_2 : c_{11,2},\ \tilde{g}_{1n} = \int_0^{R_1} g_1(r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr,$$

$$\tilde{g}_{2n} = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\sigma_2 shrdr,\ \tilde{g}_{3n} = \int_{R_2}^{R_3} g_3(r)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr;$$

$$Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);i2}(\beta_n) = (\tilde{\alpha}^k_{i2}d/dr + \tilde{\beta}^k_{i2})v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k+1}(r,\beta_n)\ |_{r=R_k};\ i,k=1,2$$

Теорема 4 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f(r) = \{B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)];\ \Lambda_{(\mu)}[g_2(r)];\ B^*_{\alpha_2}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\lim_{r\to 0}\{r^{2\alpha_1+1}[g_1'(r)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n) - g_1(r)v^{(\mu)'}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)]\} = 0, \tag{30}$$

$$[(\tilde{\alpha}^3_{22}d/dr + \tilde{\beta}^3_{22})v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)\ |_{r=R_3} = g_R \tag{31}$$

та умови спряження

$$[(\tilde{\alpha}^k_{j1}d/dr + \tilde{\beta}^k_{j1})g_k(r) - (\tilde{\alpha}^k_{j2}d/dr + \tilde{\beta}^k_{j2})g_{k+1}(r)]\ |_{r=R_k} = \omega_{jk};\ j,k=1,2, \tag{32}$$

то має місце основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$:

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);n}[M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]] = -\beta_n^2\tilde{g}_n - \sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde{g}_{in} + (\tilde{\alpha}^3_{22})^{-1}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n)\times$$

$$\times a_3^2\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}g_R + \sum_{k=1}^{2} d_k[Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)\omega_{2k} - Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)\omega_{1k}] \tag{33}$$

Доведення. Згідно правила (28) маємо:

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);n}[M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]] = \int_0^{R_3} M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]\cdot v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr \equiv$$

$$\equiv \int_0^{R_1} a_1^2 B_{\nu,(\alpha_1)}[g(r)]v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr + \int_{R_1}^{R_2} a_2^2\Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]\times$$

$$\times v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\sigma_2 shrdr + \int_{R_2}^{R_3} a_3^2 B^*_{(\alpha_2)}[g_3(r)]v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr \tag{34}$$

Проінтегруємо в рівності (34) під знаками інтегралів два рази частинами :

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);n}[M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]] = [a_1^2\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}(g_1'(r)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n) - g_1(r)v^{(\mu)'}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n))]_0^{R_1} +$$

$$+\int_0^{R_1} g_1(r)(a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)])\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr + [a_2^2\sigma_2 shr(g_2'(r)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n) -$$

$$-g_2(r)v^{(\mu)'}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n))]_{R_1}^{R_2} + \int_{R_1}^{R_2} g_2(r)(a_2^2\Lambda_{(\mu)}[v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)])\sigma_2 shrdr +$$

$$+\int_{R_2}^{R_3} g_3(r)(a_3^2 B^*_{\alpha_1}[v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)])\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr + [a_3^2\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}(g_3'(r)\times$$

$$\times v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n) - g_3(r)v^{(\mu)'}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n))]_{R_2}^{R_3}, \tag{35}$$

В силу умови обмеження (30) позаінтегральний член в точці r=0 рівний нулю. При $\tilde{\alpha}^3_{22} \neq 0$ маємо:

$$[g_3'(R_3)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n) - g_3(R_3)v^{(\mu)'}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n)]R_3^{2\alpha_2+1} =$$

$$= (\tilde{\alpha}^3_{22})^{-1}R_3^{2\alpha_2+1}[(\tilde{\alpha}^3_{22}g_3'(R_3) + \tilde{\beta}^3_{22}g_3(R_3))v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n) - g_3(R_3)(\tilde{\alpha}^3_{22}v^{(\mu)'}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n) +$$

$$+(\tilde{\beta}^3_{22}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n))] = (\tilde{\alpha}^3_{22})^{-1}R_3^{2\alpha_2+1}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n)g_R - g_3(R_3)(\tilde{\alpha}^3_{22})^{-1}\times$$

$$\times R_3^{2\alpha_2+1}\cdot 0 = (\tilde{\alpha}^3_{22})^{-1}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n)a_3^2\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}g_R;\ a_3^2\sigma_3 = 1 \tag{36}$$

Для випадку, коли умови спряження неоднорідні, базова тотожність (4) має структуру:

$$u_k'(R_k)v_k(R_k) - u_k(R_k)v_k'(R_k) = \frac{c_{21,k}}{c_{11,k}}[u_{k+1}'(R_k)v_{k+1}(R_k) - u_{k+1}(R_k)v_{k+1}'(R_k)] +$$

$$+c_{11,k}^{-1}[Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)\omega_{2k} - Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)\omega_{1k}] \tag{37}$$

Якщо скористатися базовою тотожністю (37)та вибором вагових множникі $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, то в точках спряження $r = R_1$ та $r = R_2$ позаінтегральні члени да ють вирази:

$$1) a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}[g_1'(R_1)v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_1,\beta_n) - g_1(R_1)v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)'}(R_1,\beta_n)] - a_2^2\sigma_2 shR_1 \times$$

$$\times[g_2'(R_1)v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(R_1,\beta_n) - g_2(R_1)v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)'}(R_1,\beta_n)] = (a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}} -$$

$$-a_2^2\sigma_2 shR_1)[g_2'(R_1)v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(R_1,\beta_n) - g_2(R_1)v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)'}(R_1,\beta_n)] + a_1^2\sigma_1 R_1 \times$$

$$\times c_{11,1}^{-1} \times [Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),1}(\beta_n)\omega_{21} - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),1}(\beta_n)\omega_{11}] = d_1[Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),1}(\beta_n)\omega_{21} - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),1}(\beta_n)\omega_{11}]$$

тому що в силу вибору σ_1, σ_2 вираз

$$a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}} - a_2^2\sigma_2 shR_1 = \frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_21,2}\cdot\frac{shR_1}{shR_2}R_2^{2\alpha_2+1}\cdot\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}} - \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{shR_1}{shR_2}R_2^{2\alpha_2+1} =$$

$$= \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{shR_1}{shR_2}R_2^{2\alpha_2+1}(1-1) \equiv 0;$$

$$2) a_2^2\sigma_2 shR_2[g_2'(R_2)v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(R_2,\beta_n) - g_2(R_2)v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)'}(R_2,\beta_n)] - a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha_1+1}\times$$

$$\times[g_3'(R_2)v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_2,\beta_n) - g_3(R_2)v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)'}(R_2,\beta_n)] = (a_2^2\sigma_2 shR_2\cdot\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}} -$$

$$-a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha_2+1})[g_3'(R_2)v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_2,\beta_n) - g_3(R_2)v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)'}(R_2,\beta_n)] + a_2^2\sigma_2 shR_2 c_{11,2}^{-1}\times$$

$$\times[Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),2}(\beta_n)\omega_{22} - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),2}(\beta_n)\omega_{12}] = d_2[Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),2}(\beta_n)\omega_{12} - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),2}(\beta_n)\omega_{12}]$$

тому що в силу вибору σ_2 та σ_3 вираз

$$a_2^2\sigma_2 shR_2\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}} - a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha_1+1} = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}} - R_2^{2\alpha_2+1} = R_2^{2\alpha_2+1}(1-1) \equiv 0.$$

Внаслідок диференціальних тотожностей

$$[a_1^2 B_{\nu,\alpha_1} + (\beta_n^2 + k_1^2)]v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta_n) \equiv 0, [a_2^2\Lambda_{(\mu)} + (\beta_n^2 + k_2^2)]v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta_n) \equiv 0,$$

$$[a_3^2 B_{\alpha_2}^* + (\beta_n^2 + k_3^2)]v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta_n) \equiv 0$$

отримаємо рівності:

$$a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta_n)] = -(\beta_n^2 + k_1^2)]v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta_n), a_2^2\Lambda_{(\mu)}[v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta_n)] =$$

$$= -(\beta_n^2 + k_2^2)v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta_n), a_3^2 B_{\alpha_2}^*[v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta_n)] = -(\beta_n^2 + k_3^2)v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta_n).$$

Підставивши одержані залежності в рівність (35), матимемо:

$$H_{\nu,(\alpha);n}^{(\mu)}[M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)]] = \sum_{k=1}^{2} d_k[Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{2k} - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{1k}] +$$

$$+(\tilde{\alpha}_{22}^3)^{-1}v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)R_3^{2\alpha_2+1}g_R + [-(\beta_n^2 + k_1^2)\int_0^{R_1} g_1(r)v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr -$$

$$-(\beta_n^2 + k_2^2)\tilde{g}_{2n} - (\beta_n^2 + k_3^2)\tilde{g}_{3n}]$$

Якщо роз'єднати суму $(\beta_n^2 + k_j^2)$ на два доданки й врахувати, що $\sum_{j=1}^{3}\tilde{g}_{jn} \equiv \tilde{g}_n$, то отримаємо (33). Доведення теореми завершено.

Одержані правила (28),(29) та (33) складають математичний апарат для одержання інтегрального зображення точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру достатньо широкого класу нестаціонарних задач математичної фізики неоднорідних середовищ з м'якими межами за логічною схемою наступної задачі.

Задача дифузії. Знайдемо закон, за яким відбуваються дифузійні процеси в неоднорідному середовищі $D_2 = \{(t,r) : t \in (0,\infty); r \in I_2\}$ з м'якими межами, змодельовані за степеневими законами. Математично це приводить до інтегрування в області D_2 сепаратної системи параболічного типу [8]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[u_1] = f_1(t,r), r \in (R_0, R_1), \\ &\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2\Lambda_{(\mu)}[u_2] = f_2(t,r), r \in (R_1, R_2), \\ &\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 B_{\alpha_2}^*[u_3] = f_3(t,r), r \in (R_2, R_3) \end{aligned} \qquad (39)$$

за нульовими початковими умовами, крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0}[r^{\gamma}u_1(t,r)] = 0; [(\alpha_{22}^3 + \delta_{22}^3\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^3 + \gamma_{22}^3\frac{\partial}{\partial t}]u_3 |_{r=R_3} = g_R(t) \qquad (40)$$

та умовами спряження

$$\{[(\alpha_{j1}^k + \delta_{j1}^k\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k + \gamma_{j1}^k\frac{\partial}{\partial t}]u_k(t,r) - [(\alpha_{j2}^k + \delta_{j2}^k\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k +$$

$$+\gamma_{j2}^k\frac{\partial}{\partial t}]u_{k+1}(t,r)\} |_{r=R_k} = \omega_{jk}(t); j,k = 1,2 \qquad (41)$$

Розв'язання. Запишемо систему (39) й нульові початкові умови в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_1^2-a_1^2B_{\nu,\alpha_1}\right)u_1(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_2^2-a_2^2\Lambda_{(\mu)}\right)u_2(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_3^2-a_3^2B^*_{\alpha_2}\right)u_3(t,r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t,r) \\ f_2(t,r) \\ f_3(t,r) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \\ u_3(t,r) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (42)$$

Інтегральний оператор $H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);n}$ за правила (28) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);n}[\ldots] = [\int_0^{R_1} \ldots v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr \int_{R_1}^{R_2} \ldots v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\sigma_2 shr dr$$

$$\int_{R_2}^{R_3} \ldots v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr] \qquad (43)$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (43) за правилом множення матриць до задачі (42). Внаслідок основної тотожності (33) маємо задачу Коші [2]:

$$\frac{d\tilde{u}_n}{dt}+(\beta_n^2+\gamma^2)\tilde{u}_n = \tilde{F}_n(t), \tilde{u}_n\,|_{t=0} = 0; \gamma^2 = max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\}. \qquad \mathbf{(44)}$$

Тут функція

$$\tilde{F}_n(t) = \tilde{f}_n(t) + \sum_{k=1}^{2} d_k[Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)\omega_{2k}(t) - Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)\omega_{1k}(t)] +$$

$$+(\tilde{\alpha}^3_{22})^{-1}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n)R_3^{2\alpha_2+1}g_R(t).$$

Розвязком задачі Коші (44) є функція

$$\tilde{u}_n(t) = \int_0^t e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)}\tilde{F}_n(\tau)d\tau \qquad (45)$$

Оператор $H^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha);n}$ згідно правила **(29) як обе**рнений до **(43) зобразимо у** вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H^{-1}_{(\alpha)}[\ldots] = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \ldots v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \ldots v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \ldots v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n) \end{bmatrix} \qquad (46)$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (46) за правилом множення матриць до матриці елементу $[\tilde{u}_n(t)]$, де функція $\tilde{u}_n(t)$ визначена формулою (45). У результаті елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок дифузійної задачі (39)-(41):

$$u_j(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{u}_n(t)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n) = \int_0^t\int_0^{R_1} H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j1}(t-\tau,r,\rho)\times$$

$$\times f_1(\tau,\rho)\sigma_1\rho^{2\alpha_1+1}d\rho d\tau + \int_0^t\int_{R_1}^{R_2} H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j2}(t-\tau,r,\rho)f_2(\tau,\rho)\sigma_2 sh\rho d\rho d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_{R_2}^{R_3} H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j3}(t-\tau,r,\rho)f_3(\tau,\rho)\sigma_3\rho^{2\alpha_2-1}d\rho d\tau + \int_0^t W^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3j}(t-\tau,r)g_R(\tau)d\tau +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} d_k\int_0^t [R^{(\mu),j,k}_{\nu,(\alpha);12}(t-\tau,r)\omega_{2k}(\tau) - R^{(\mu),j,k}_{\nu,(\alpha);22}(t-\tau,r)\omega_{1k}(\tau)]d\tau; j = \bar{1,3} \qquad (47)$$

У рівностях (47) беруть участь головні розв'язки даної параболічної задачі: 1) породжені неоднорідністю системи функції впливу

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);jk}(t,r,\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta_n); j,k = \bar{1,3} \qquad (48)$$

2)породжені крайовою умовою в точці $r = R_3$ функції Гріна

$$W^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3j}(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}(\tilde{\alpha}^3_{22})^{-1}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)R_3^{2\alpha_2+1}, \mathbf{j = \bar{1,3}} \quad \mathbf{(49)}$$

3)породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^{(\mu),j,k}_{\nu,(\alpha);i2}(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);i2}(\beta_n)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n); i,k = \mathbf{1,2}; \mathbf{j = \bar{1,3}} \qquad \mathbf{(50)}$$

Вектор-функція $u(t,r) = \{u_1(t,r); u_2(t,r); u_3(t,r)\}$ повністю характеризує дифузійний процес в даному середовищі.

Зауваження 1. Якщо $\gamma^2 = \gamma_1^2 > 0$, то $k_1^2 = 0, k_2^2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \geq 0, k_3^2 = \gamma_1^2 - \gamma_3^2 \geq 0$; якщо $\gamma^2 = \gamma_2^2 > 0$, то $k_1^2 = \gamma_2^2 - \gamma_1^2 \geq 0, k_2^2 = 0; k_3^2 = \gamma_2^2 - \gamma_3^2 \geq 0$; якщо $\gamma^2 = \gamma_3^2 > 0$, то $k_1^2 = \gamma_3^2 - \gamma_1^2 \geq 0, k_2^2 = \gamma_3^2 - \gamma_2^2 \geq 0, k_3^2 = 0$.

Зауваження2. Інтегральне зображення (47) аналітичного розв'язку дифузійної задачі (39)-(41) носить алгоритмічний характер. Параметри задачі допускають реалізацію будь-якого часткового випадку безпосереднім вибором із загальних структур (в рамках даної моделі, звичайно).

Зауваження 3. Якщо початкові умови не нульові ($u_j |_{t=0} = g_j(r)$) то в рівностях (47) будуть брати участь ще доданки

$$\sum_{k=1}^{2} d_k [R^{(\mu),j,k}_{\nu,(\alpha);12}(t,r)\psi_{2k} - R^{(\mu),j,k}_{\nu,(\alpha);22}(t,r)\psi_{1k}] + W^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3j}(t,r)\psi_{33} \quad \textbf{(51)}$$

$$\psi_{jk} = [\delta^k_{j1} g_k^{'}(R_k) + \gamma^k_{j1} g_k(R_k)] - [\delta^k_{j2} g_{k+1}^{'}(R_k) + \gamma^k_{j2} g_{k+1}(R_k)],$$

$$\psi_{33} = \delta^3_{22} g_3^{'}(R_3) + \gamma^3_{22} g_3(R_3); j,k = 1,2.$$

Поява доданків (51) відображає вплив початкових умов на м'якість середовища по відношенню до відбиття дифузійних хвиль . Якщо $\sigma^k_{jm} = 0, \gamma^k_{jm} = 0$, то ми одержуємо випадок жорсткої межі кусково-однорідного середовища D_2.

Література

1. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. - М.: Наука, 1965. - 328с.

2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М .: Физматгиз, 1959. - 468с.

3. Ленюк М.П., Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя.-Киев, 1983.-62с.-(Препринт /АН УССР. Ин-т математики;83.3

4. Конет I.М.,Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока.- Чернівці : Прут,2002.-248с.

5. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя ,Лежандра). Частина 1 . - Тернопіль: Економ. думка,2004.-368с.

6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука. 1971. - 432с.

7. Ленюк М.П., Мороз В.В. Побудова скінченного гібридного інтегрального перетворення при наявності спектрального параметру в крайових умовах та умовах спряження //Науковий вісник Чернівецького університету. Випуск 314-315. Математика .- Чернівці : Рута, 2006.-С.105.-113.

8. Тихонов А.Н., **Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.:** Наука, 1972. - 735с.

УДК 517.92:532.2

О.М. Нікітіна

Інтегральні перетворення, породжені диференціальним оператором Ейлера другого порядку на сегменті $[0, R]$ полярної осі

(м.Чернівці)

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) запроваджено інтегральне перетворення, породжене диференціальним оператором Ейлера другого порядку на сегменті $[0, R]$ полярної осі.

Методом дельта-образной последовательности (ядро Дирихле) введено интегральное преобразование, порожденное дифференциальным оператором Эйлера второго порядка на сегменте $[0, R]$ полярной оси.

Бібліогр.:5 назв.

Запровадимо методом дельта-подібної послідовності інтегральне перетворення, породжене на множині $I = \{r : r \in (0, R)\}$ диференціальним оператором Ейлера другого порядку [1]

$$B^*_\alpha = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1) r \frac{d}{dr} + \alpha^2, \ \ 2\alpha + 1 > 0 \quad (1.1)$$

Означення. Областю задання диференціального оператора B^*_α назвемо множину G функцій $g(r)$ з такими властивостями: 1) функція $f(r) = B^*_\alpha[g(r)]$ неперервна на множині I; 2) функція $g(r)$ задовольняє крайові умови

$$\lim_{r \to 0}\Big[r^\gamma g(r)\Big] = 0, \ \ \Big(\alpha^1_{11} \frac{d}{dr} + \beta^1_{11}\Big) g(r)\Big|_{r=R} = 0 \quad (1.2)$$

Розглянемо диференціальне рівняння Ейлера другого порядку [1]

$$\Big(B^*_\alpha + \beta^2\Big) u(r) = 0, \ \ \beta > 0 \quad (1.3)$$

Якщо відшукувати розв'язок рівняння (1.3) за правилом $u = r^\lambda$, то матимемо для λ характеристичне рівняння

$$(\lambda + \alpha)^2 + \beta^2 = 0$$

Звідси знаходимо, що $\lambda = -\alpha \pm i\beta$. Отже, $u = r^{-\alpha \pm i\beta} = r^{-\alpha} \cdot r^{\pm i\beta} = r^{-\alpha} e^{\pm i\beta \ln r} = r^{-\alpha}(\cos\beta \ln r \pm i \sin\beta \ln r)$.