

ДИНАМІКА РІДИННОГО АВТОБАЛАНСИРА: ВПЛИВ КОРІОЛІСОВИХ СИЛ

У роботі досліджується явище автобалансування роторів машин рідинними автобалансирами, розробляється теоретичне обґрунтування, що пояснює експериментально відкрите явище самобалансування рідиною на дорезонансних і всіх інших режимах обертання ротора. Розроблене теоретичне обґрунтування автоматичного балансування рідиною роторів з вертикальною віссю обертання відрізняється від існуючих положень врахуванням гідравлічних властивостей рідини і демпфування системи. Також досліджено вплив коріолісових сил інерції, які виникають під час обертання і викликають своєрідні гравітаційні хвилі, що поширюються в нестисливій рідині. Розглянуті хвилі називають інерційними. Оскільки коріолісові сили не роблять роботи над рідиною, яка обертається, енергія, що міститься в цих хвилях, цілком кінетична.

Ключові слова: ротор, автоматичне балансування (самобалансування), автобалансируючий пристрій (АБП), коріолісові сили, інерційні хвилі.

I.V. DRACH

Khmelnitsky National University

DYNAMICS OF THE FLUID BALANCER: INFLUENCE OF CORIOLIS FORCES OF INERTIA

Traditional methods are ineffective for machines with variable rotor imbalance and for balancing machine rotors without a halt in maintenance conditions. Automatic balancing by means of devices with free correcting masses movement is the most reliable, perspective and often the only possible method for reduction of vibration in such machines. The current work is devoted to system research of the method mentioned, particularly to studying the fundamental natural phenomenon – rotor self-balancing with the help of passive auto-balancing units (ABD) which look like cavity chambers, partly filled with working media (liquid, granular materials) being passive regulators of direct action which don't need supply of energy and control system for correcting masses movement. The author contribution to solution of this problem is realized in theoretical development the theory of automatic liquid balancing of rotors with vertical rotation axis, which differs from existing statements by taking into account hydraulic properties of liquid and system damping, two-dimensional self-balancer model. It allows to claim that: in liquid self-balancer liquid aims to settle itself against imbalance not only in above resonance but also in preresonance rotator rotation as well as at the resonance itself; automatic balancing by liquid is effective for elastic strained rotors, rotors on elastic bearings, where there is a difference between force direction from imbalance and flexure or shift of rotor. Also, the influence of the coriolis forces of inertia, which arise during the rotation, is investigated, and cause unique gravitational waves propagating in a incompressible fluid. The considered waves are called inertial waves. The article deals with the process of wave forming in liquid in a chamber of a liquid auto-balancing device partially filled with a liquid for rotors under non-stationary modes of the system's motion. Since the coriolis forces do not work on the moving fluid, the energy contained in these waves is completely kinetic.

Keywords: rotor, imbalance, automatic balancing (self-balancing), auto-balancing device (ABD), coriolis forces, inertial waves.

Вступ

Для усунення дисбалансу тіла, що обертається, використовують рідинні автобалансуючі пристрої (АБП) у вигляді порожнистої камери з рідкими робочими тілами [1]. Вони є стандартною функцією у більшості побутових пральних машин, але також використовуються у важких промислових обертових машинах. До прикладу, для пральних машин використовуються рідинні стабілізатори, які складаються з порожнистого кільця, подібного до гумового обруча але, зазвичай, з прямокутним перерізом, що містить невелику кількість рідини. Кільце, як правило, кріпиться над барабаном [2–4]. Рідина в кільці вільно переміщається і прагне поєднати головну центральну вісь інерції ротора з його віссю обертання.

Основна ідея з'явилася вже в 1912 році, а патент США був наданий в 1916 році (Леблан, 1916 [5]), де і було викладено робочий принцип рідинного балансира. А саме, коли машина обертається при високій кутовій швидкості Ω , рідина утворює тонкий шар на внутрішній поверхні зовнішньої стінки, зображений на рис. 1 [5].

Розглядається ситуація, коли присутня незбалансована маса m , наприклад, через нерівномірність розподілу одягу в пральній машині. Ротор має критичну кутову швидкість Ω_{cr} , де відцентрові сили зрівноважуються силами, зумовленими відновлюваними пружинами. Нижче цієї швидкості ($\Omega < \Omega_{cr}$) центр маси рідини буде розташовуватися «на тій самій стороні», що і незбалансована маса, як показано на рис. 1 а (тут M позначає масу порожнього ротора, а \mathcal{M} – маса рідини, що міститься в камері). При певній надкритичній кутовій швидкості $\Omega > \Omega_{cr}$ (скажімо, під час процесу сушки) центр маси рідини переміститься на "протилежну сторону" відносно незбалансованої маси, як показано на рисунку 1 б, в результаті чого зменшиться "дисбаланс маси" і, таким чином, зменшаться відцентрові сили і зменшаться амплітуди коливань ротора.

Оригінальний макет, наведений у патенті [5], складався з одного або декількох дуже вузьких концентричних каналів (вузьких у радіальному напрямку, але широких в осьовому напрямку, тобто перпендикулярно до площини, зображеної на рис. 1), частково заповненого "рідиною або дуже малими сталевими кульками або металевими дробинками" [5]. Сирл (1932) [6] розглядав і піддав критиці рідинний балансір Леблана; а пізніше і Ден Гартог (1985) [7] підтримав погляди Сирла. Тут йдеться про те, що балансір Леблана не може працювати з рідиною, а лише із сталевими кульками, і, таким чином, винахід не був визнаним. Імовірно, це пов'язано з дуже вузькими каналами, які в основному запобігають утворенню

поверхневих хвиль.

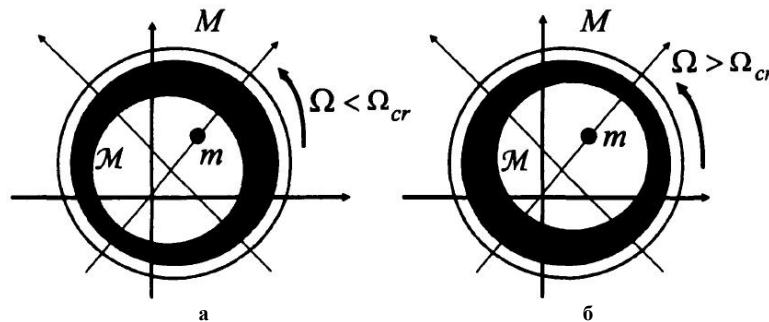


Рис. 1. Принцип роботи рідинного стабілізатора за Лебланом

Тим не менш, автоматична пральна машина, оснащена рідинним балансиrom, була представлена в 1940 році і запатентована в 1945 році (Дайер, 1945) [8]. Макет рідинного балансира був дуже схожий на сучасні макети, з широким концентричною камерою, досить широкою, щоб надати можливість утворенню поверхневій хвилі з великими амплітудами.

Ідея, таким чином, не нова, але останнім часом спостерігається відроджений інтерес до неї як у промисловості, так і в наукових сферах.

Експериментальні дослідження рідинних демпферів проводили Кашара та ін. [9] і Накамура [10]. Що стосується математичних моделей, то прості моделі із зосередженими масами були розглянуті Баєм у [11], Юнгом у [12], Маєвським у [13], Ченом у [14], Урбіола-Сото та Лопезом-Парра у [15]. Перша та останні дві з цих статей включають також експериментальні дослідження. У роботі Юнга [12] міститься декілька чисельних результатів моделювання на основі обчислювальної динаміки рідини.

Слід підкреслити, що вперше зробив спробу теоретично обґрунтувати принцип дії АБП Леблана, кільцевих, маятникових і кульових АБП у циклах своїх статей Сирл. Він запропонував плоску модель ротора і АБП. У її рамках у ротора існує єдина критична швидкість, при перевищенні якої ротор починає обертатися легкою стороною назовні і починає проявлятися явище самоцентрування ротора, яке і було покладено Сирлем в основу принципу роботи усіх пасивних АБП. Насправді, тут явище самоцентрування видається за явище автобалансування рідиною. Підходи і результати робіт Сирла склали основу наступних досліджень в галузі балансування роторів машин пасивними АБП. А отриманий без врахування специфічних властивостей рідини, сил опору, а відтак, теоретично необґрунтований і експериментально неперевірений висновок про обмеженість діапазону працездатності таких автобалансуючих пристроїв закритичною (або зарезонансною) зоною обертання ротора є суперечливим і до тепер. Отже, залишається необхідним більш детальне пояснення цього явища.

Фізичний зміст балансування рідиною

При відсутності АБП величина дисбалансу системи залишається незмінною за величиною і напрямком, і оскільки існує співвідношення між прогином вала, величиною дисбалансу і кутовою швидкістю обертання:

$$f = e_0 \frac{(\omega / \omega_{кр})^2}{1 - (\omega / \omega_{кр})^2},$$

то, очевидно, що зі збільшенням кутової швидкості ω прогин f постійно збільшується на докритичному режимі обертання вала.

У випадку наявності АБП дисбаланс системи \bar{e}_C складається зі стаціонарного дисбалансу \bar{e}_0 , створюваного незрівноваженістю вала, і дисбалансу, створюваного рідиною \bar{e} . При $\omega = 0$ дисбаланс рідини дорівнює нулю.

У початковий момент обертання незрівноваженість вала приводить до виникнення прогину f , що за напрямком збігається з дисбалансом ротора (рис. 2 а). Відцентрові сили відкидають рідину до стінок АБП і її основна маса концентрується в прогині. При збільшенні швидкості обертання ротора напрямком прогину починає відставати від напрямку дисбалансу на кут δ (при наявності рідини в камері АБП величину кута δ варто відраховувати від сумарного дисбалансу ротора) (рис. 2 б). Рідина прагне зайняти положення в найбільш віддаленій точці від осі обертання, а саме в прогині, і рухається разом з ним від дисбалансу. Це, у свою чергу, призводить до зміни сумарного дисбалансу системи за напрямком і величиною (збільшується, оскільки величина сумарного дисбалансу визначається як геометрична сума векторів \bar{e}_0 і \bar{e} і залежить від кута між цими векторами α). Ця зміна призводить до збільшення прогину, а збільшення швидкості обертання приводить до збільшення кута δ . Рідина слідує за прогином, змінює сумарний дисбаланс, збільшуючи кут α і зменшуючи величину сумарного дисбалансу (рис. 2 в), що, у свою чергу, приводить до зменшення величини прогину. Отже, зі збільшенням швидкості обертання внаслідок зменшення \bar{e}_C маємо зменшення прогину за величиною навіть при докритичному режимі обертання ротора.

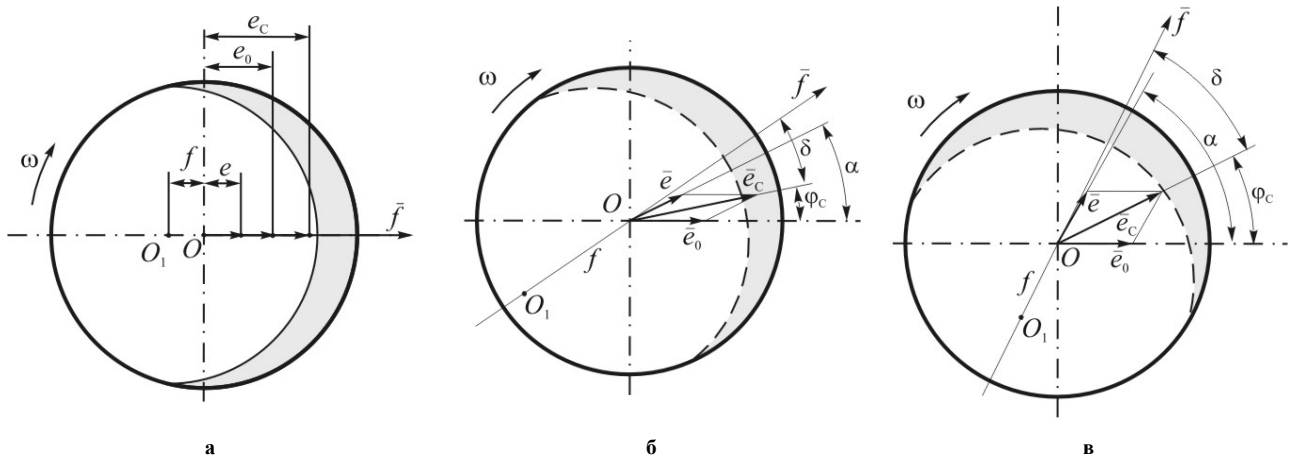


Рис. 2. Векторна модель процесу автобалансування рідиною

Оскільки

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2n\omega}{\omega_{кр}^2 - \omega^2},$$

то при наближенні швидкості обертання до критичної δ збільшується і прямує до 90° .

Оскільки δ – кут між прогином і сумарним дисбалансом, а φ_c – кут між стаціонарним і сумарним дисбалансами, то при обертанні ротора з кутовою швидкістю $\omega = \omega_{кр}$ кут між прогином і стаціонарним дисбалансом дорівнює $90^\circ + \varphi_c$ (рис. 2 г).

У випадку коли стаціонарний дисбаланс і дисбаланс, створюваний рідиною, рівні за величиною $e_0 = e$, то φ_c наближено буде дорівнювати δ (рис. 2 д). А отже кут між прогином і стаціонарним дисбалансом буде прямувати до 180° . Отже, при проходженні резонансної швидкості обертання ротора рідина разом із прогином вала буде зміщена на кут 180° щодо стаціонарного дисбалансу. По цьому буде мати місце автоматичне балансування дисбалансу вала рідиною, що і приведе до істотного зменшення вібрацій ротора.

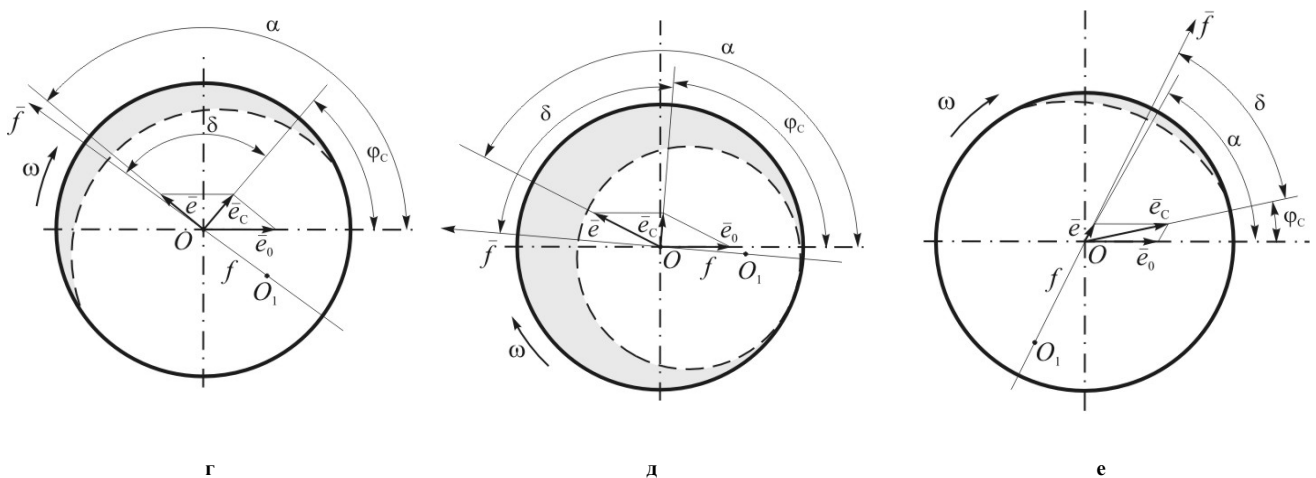


Рис. 2. Векторна модель процесу автобалансування рідиною (продовження)

При подальшому збільшенні кутової швидкості збалансована система повертається, не змінюючи відносного положення рідини і стаціонарного дисбалансу.

При малому дисбалансі, створюваному рідиною $e \ll e_0$, сумарний дисбаланс системи буде в основному визначатися за величиною і напрямком стаціонарним дисбалансом і не буде істотно змінюватися при збільшенні кута δ (рис. 2 е). Отже не буде істотно зменшуватися величина прогину вала, обумовлена сумарним дисбалансом ротора.

Тому кількість рідини, що створює малий дисбаланс у порівнянні зі стаціонарним дисбалансом, буде недостатньою для балансування системи. Збільшити дисбаланс, створюваний рідиною, можна за рахунок збільшення її маси або радіуса камери АБП.

При сталих параметрах АБП збільшуючи масу рідини можна досягти рівності дисбалансів рідини і вала, при якому будемо мати максимальну збалансованість системи. Подальше збільшення маси рідини не буде впливати на створюваний нею дисбаланс, а, отже, і на збалансованість системи, оскільки рідина буде розташовуватися концентрично навколо осі обертання, що у даному випадку вже є головною віссю інерції системи.

Велика маса рідини в АБП може істотно впливати на стійкість її розміщення щодо стаціонарного дисбалансу. Оскільки в силу гідравлічних особливостей рідкого середовища, яке може довільно змінювати свою форму під дією будь-яких малих сил, виникнення випадкових незначних зовнішніх збурювань може істотно вплинути на місце розташування його центра мас, а, отже, змінити стан зрівноваженості системи. Причому, чим більша маса рідини, тим більшою за величиною і напрямком буде зміна вектора її дисбалансу.

Розглянемо більш детально динаміку балансування рідиною.

У багатьох дослідженнях, присвячених динаміці та стабілізації роторів, частково заповнених рідиною, приділяється велика увага динамічним властивостям рідини; хорошими оглядами щодо цих питань є робота Болотіна [16] та Кандалла [17]. Більшість досліджень, таких як роботи Вольфа [18], Хендрікса і Мортонна [19] та Холма-Крістенсена та Трегера [20], базуються на лінійній теорії (лінеаризації). Хоча такого підходу цілком достатньо для визначення стійкості руху, але може бути недостатнім для моделювання та розуміння динаміки рідинного балансування (у будь-якому випадку, якщо до розгляду включені вільні (необмежені) компоненти хвилі), оскільки необхідно знати амплітуду поверхневих хвиль.

При проектуванні пасивних рідинних АБП необхідно знати вплив рідини на обертання тіла. Дослідженню обертання зрівноваженого ротора при частковому заповненні камери АБП рідиною присвячені роботи [21, 22]. Гнучкі коливання вала з незрівноваженим диском на ньому вивчаються в [23, 24]. У [25, 26] показано вплив рідини у камері ротора, що обертається, на автоматичне балансування механічної системи без врахування сил опору. У дослідженні [27] розглянуто усталений рух незрівноваженого ротора з рідиною в камері АБП при наявності зовнішнього тертя. Задана умова, що рідина в балансувальній камері при стаціонарному русі обертається разом з ротором як тверде тіло. Визначено, що рідинний АБП зменшує критичну швидкість і максимальне відхилення ротора від осі обертання. У [28] досліджено вплив сили ваги на процес рідинного автобалансиування.

Однак, ці висновки не враховують те, що своєрідні гравітаційні хвилі можуть поширюватися в нестисливій рідині, що рівномірно обертається як ціле. Їхнє походження пов'язане з коріолісовими силами, які виникають при обертанні. З метою вивчення стаціонарних збурень відносного руху рідини, що обумовлені об'ємними відцентровою і коріолісовою силами інерції необхідно проаналізувати модель малих збурень потоку, що викликані рівномірним обертанням камери навколо деякої осі, що лежить з її віссю в одній площині [29].

Інерційні хвилі в рідині, що обертається

Розглянемо закриту камеру АБП, що має форму прямого кругового циліндра радіуса R і висотою h , частково заповнену ідеальною нестисливою рідиною густини ρ ($\rho = \text{const}$). Нехай при відсутності об'ємних сил рідина здійснює усталений круговий рух і розташовується в камері у вигляді кільцевого шару, що має товщину $R - R_0$. У безрозмірних циліндричних координатах $\eta = r/R$, φ , $\zeta = z/R$ рівності

$$\bar{v}_0 = (0, v_0(\eta), 0), \quad p_0 = p_0^0 + \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{v_0^2(x)}{x} dx, \quad \eta = \eta_0 \left(\eta_0 = \frac{R_0}{R} \right) \quad (1)$$

є відповідно виразами для безрозмірних швидкості потоку, тиску і рівняння вільної поверхні при довільно заданих функції $v_0(\eta)$ і величині p_0^0 .

Нехай камера здійснює обертання зі сталою кутовою швидкістю $\bar{\Omega} = -i\Omega$ навколо деякої осі z' , що лежить з віссю камери z в одній площині і складає з нею кут α ($-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$). Задача полягає у вивченні стаціонарних збурень відносного руху рідини, обумовлених об'ємними переносною і коріолісовою силами інерції. Ця задача виникає в ході дослідження роботи рідинного АБП.

Рівняння Ейлера і нестисливості можна подати у формі

$$\text{grad} \left(p + \frac{V^2}{2} \right) + \text{rot} \bar{V} \times \bar{V} = -\varepsilon \bar{W}_e - \varepsilon \bar{W}_c, \quad \text{div} \bar{V} = 0 \quad (2)$$

$$\bar{W}_e = \frac{1}{\Omega^2 R_1} \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{R}_1) = -\frac{\bar{R}_1}{R_1} = (\cos \alpha \cos \varphi, -\cos \alpha \sin \varphi, -\sin \alpha) \quad (3)$$

$$\bar{W}_c = \frac{1}{2\Omega V_*} 2\bar{\Omega} \times (V_* \bar{V}) = -\bar{i} \times \bar{V} = (w \sin \alpha \sin \varphi + v \cos \alpha, w \sin \alpha \cos \varphi - u \cos \alpha, -\sin \alpha (v \cos \varphi + u \sin \varphi)) \quad (4)$$

де $\varepsilon = \frac{\Omega^2 R_1 R}{V_*^2}$, $\varepsilon c = \frac{2\Omega V_* R}{V_*^2}$. Тут $\bar{V} = (u, v, w)$ – швидкість рідини відносно камери АБП; p – тиск; \bar{W}_e ,

\bar{W}_c – переносне та коріолісове прискорення; V_* – масштаб швидкості – максимальне значення модуля колової швидкості рідини. Параметр ε будемо вважати малим, що відповідає співвідношенням, які є характерними для пристроїв, що вивчаються. Подамо рівняння вільної поверхні у вигляді $F(\eta, \varphi, \zeta) = \eta - \psi(\varphi, \zeta) = 0$ і запишемо граничні умови задачі, а також умови періодичності шуканих величин за кутовою координатою φ і умови незмінності об'єму, що займає рідина

$$u \Big|_{\eta=1} = 0, \quad w \Big|_{\zeta = \pm \frac{h}{2R}} = 0, \quad (\bar{V} \text{grad} F)_{F=0} = 0, \quad p \Big|_{F=0} = p_0^0, \quad [\bar{V}, p, \psi]_{\varphi+2\pi} - [\bar{V}, p, \psi]_{\varphi} = 0, \\ \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2R}}^{\frac{h}{2R}} \int_0^{2\pi} \psi^2(\varphi, \zeta) d\varphi d\zeta = \pi \eta_0^2 \frac{h}{R}. \quad (5)$$

Розв'язок задачі (1)–(5), що належить до класу обернених крайових задач, будемо шукати у вигляді рядів за степенями малого параметра ε

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + \varepsilon \bar{V}_1 + \dots, \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \dots, \quad F = \eta - \psi_0(\varphi, \zeta) - \varepsilon \psi_1(\varphi, \zeta) - \dots = 0. \quad (6)$$

Підстановка виразів (6) у рівняння (2) і умови (5) приводить до таких співвідношень для послідовного знаходження початкового і першого наближень до розв'язку задачі

$$\text{grad} \left(p_0 + \frac{V_0^2}{2} \right) + \text{rot} \bar{V}_0 \times \bar{V}_0 = 0, \quad \text{div} \bar{V}_0 = 0 \\ u_0 \Big|_{\eta=1} = 0, \quad w_0 \Big|_{\zeta = \pm \frac{h}{2R}} = 0, \\ (\bar{V}_0 \text{grad} F_0)_{F_0=0} = 0, \quad (F_0 = \eta - \psi_0(\varphi, \zeta)), \quad p_0 \Big|_{F_0=0} = p_0^0, \quad (7)$$

$$[\bar{V}_0, p_0, \psi_0]_{\varphi+2\pi} - [\bar{V}_0, p_0, \psi_0]_{\varphi} = 0, \quad \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2R}}^{\frac{h}{2R}} \int_0^{2\pi} \psi_0^2(\varphi, \zeta) d\varphi d\zeta = \pi \eta_0^2 \frac{h}{R}. \\ \text{grad}(p_1 + \bar{V}_0 \bar{V}_1) + \text{rot} \bar{V}_0 \times \bar{V}_1 + \text{rot} \bar{V}_1 \times \bar{V}_0 = -\bar{W}_e + c\bar{i} \times \bar{V}_0, \quad \text{div} \bar{V}_1 = 0 \\ u_1 \Big|_{\eta=1} = 0, \quad w_1 \Big|_{\zeta = \pm \frac{h}{2R}} = 0, \quad \left[\frac{\partial p_0}{\partial \eta} \psi_1(\varphi, \zeta) + p_1 \right]_{F_0=0} = 0, \\ \left[\psi_1(\varphi, \zeta) \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{V}_0 \text{grad} F_0) + \bar{V}_1 \text{grad} F_0 - \bar{V}_0 \text{grad} \psi_1(\varphi, \zeta) \right]_{F_0=0} = 0, \quad [\bar{V}_1, p_1, \psi_1]_{\varphi+2\pi} - [\bar{V}_1, p_1, \psi_1]_{\varphi} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{h}{2R} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2R}}^{\frac{h}{2R}} \psi_0(\varphi, \zeta) \psi_1(\varphi, \zeta) d\varphi d\zeta = 0.$$

Вирази (1) є розв'язками задачі (7). При врахуванні виразів (1), рівностей (9)

$$\psi_0(\varphi, \zeta) = \eta_0, \quad F_0 = \eta - \eta_0 \quad (9)$$

і одержаної за допомогою формули (4) рівності $\bar{i} \times \bar{V}_0 = v_0(\eta)(-\cos \alpha, 0, \sin \alpha \cos \varphi)$ співвідношення (8) для знаходження першого наближення можна записати у формі (штрихом позначено диференціювання по η)

$$\frac{v_0(\eta)}{\eta} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - 2v_1 \right) + \frac{\partial p_1}{\partial \eta} = -\cos \alpha \cos \varphi + 0 - \frac{2V_*}{\Omega R_1} v_0(\eta) \cos \alpha + 0 \\ \frac{v_0(\eta)}{\eta} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + \frac{[\eta v_0(\eta)]'}{\eta} u_1 + \frac{1}{\eta} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} = \cos \alpha \sin \varphi + 0 + 0 + 0 \quad (10)$$

$$\frac{v_0(\eta)}{\eta} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial p_1}{\partial \zeta} = 0 + \sin \alpha + 0 + \frac{2V_*}{\Omega R_1} v_0(\eta) \sin \alpha \cos \varphi \\ \frac{\partial(\eta u_1)}{\partial \eta} + \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + \eta \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} = 0 \quad (11)$$

$$u_1 \Big|_{\eta=1} = 0, \quad w_1 \Big|_{\zeta = \pm \frac{h}{2R}} = 0, \quad u_1 \Big|_{\eta=\eta_0} = \frac{v_0(\eta_0)}{\eta_0} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi}, \quad p_1 \Big|_{\eta=\eta_0} = -\frac{v_0^2(\eta_0)}{\eta_0} \psi_1$$

$$\left[\bar{V}_1, p_1, \psi_1 \right]_{\varphi} + 2\pi \left[\bar{V}_1, p_1, \psi_1 \right]_{\varphi} = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2R}}^{\frac{h}{2R}} \int_0^{2\pi} \psi_1 d\varphi d\zeta = 0. \quad (12)$$

Лінійність задачі (10)–(12) дозволяє розбити її на чотири незалежні задачі, які відповідають збуренням потоку різними складовими сил інерції у відносному русі. Розглянемо вплив сил інерції Кориоліса.

1. Збурення руху радіальною складовою сили інерції Кориоліса. Ця задача полягає в розв’язанні за умов (12) рівняння (11) і рівнянь (13)

$$\begin{aligned} \frac{v_0(\eta)}{\eta} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - 2v_1 \right) + \frac{\partial p_1}{\partial \eta} &= -\frac{2V^*}{\Omega R_1} v_0(\eta) \cos \alpha \\ \frac{v_0(\eta)}{\eta} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + \frac{[\eta v_0(\eta)]}{\eta} u_1 + \frac{1}{\eta} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{v_0(\eta)}{\eta} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial p_1}{\partial \zeta} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Враховуючи, що дана задача осесиметрична і вважаючи, що $(\eta v_0)' \neq 0$, одержимо з рівностей (13), (11) і (12)

$$u_1 = w_1 = 0, \quad \psi_1 = 0; \quad \frac{\partial p_1}{\partial \eta} = -\frac{2V^*}{\Omega R_1} v_0(\eta) \cos \alpha + \frac{2v_0(\eta)}{\eta} v_1, \quad \frac{\partial p_1}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} = -v_0(\eta) \frac{\partial v_1}{\partial \varphi}; \quad p_1 \Big|_{\eta = \eta_0} = 0.$$

Звідки одержимо

$$\bar{V}_1 = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad p_1 = -\frac{2V^*}{\Omega R_1} \cos \alpha \int_{\eta_0}^{\eta} v_0(x) dx. \quad (14)$$

Таким чином, радіальна складова сили Кориоліса не призводить до змін у розташуванні і форми циліндричного «повітряного стовпа» (вільної поверхні рідини) і до збурення поля швидкостей, викликаючи лише збурення поля тисків, що не залежить від координат φ і ζ , що цілком збігається з результатами, одержаними в [30] при дослідженні інерційних хвиль у рідині, що обертається.

2. Збурення руху осьової складової сили інерції Кориоліса. Ця задача полягає в розв’язанні при умовах (12) рівняння (11) і рівнянь (15)

$$\begin{aligned} \frac{v_0(\eta)}{\eta} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - 2v_1 \right) + \frac{\partial p_1}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{v_0(\eta)}{\eta} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + \frac{[\eta v_0(\eta)]}{\eta} u_1 + \frac{1}{\eta} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{v_0(\eta)}{\eta} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial p_1}{\partial \zeta} &= \frac{2V^*}{\Omega R_1} v_0(\eta) \sin \alpha \cos \varphi \end{aligned} \quad (15)$$

Розглядувана задача значно складніша за попередню, оскільки виникають тут збурення є неплоскими і неосесиметричними.

Підстановка

$$u_1 = U(\eta, \zeta) \sin \varphi, \quad v_1 = V(\eta, \zeta) \cos \varphi, \quad w_1 = W(\eta, \zeta) \sin \varphi, \quad p_1 = P(\eta, \zeta) \cos \varphi, \quad \psi_1 = \Psi(\zeta) \cos \varphi, \quad (16)$$

де U, V, W, P і Ψ – невідомі функції від η і ζ , дозволяє виключити змінну φ з рівнянь і граничних умов. Маємо

$$\frac{v_0}{\eta} (U - 2V) + \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0, \quad -v_0 V + (\eta v_0)' U - P = 0, \quad \frac{v_0}{\eta} W + \frac{\partial P}{\partial \zeta} = \frac{2V^*}{\Omega R_1} v_0 \sin \alpha, \quad \frac{\partial(\eta U)}{\partial \eta} - V + \eta \frac{\partial W}{\partial \zeta} = 0. \quad (17)$$

$$U \Big|_{\eta=1} = 0, \quad W \Big|_{\zeta = \pm \frac{h}{2R}} = 0, \quad U \Big|_{\eta = \eta_0} = -\frac{v_0(\eta_0)}{\eta_0} \Psi, \quad P \Big|_{\eta = \eta_0} = -\frac{v_0^2(\eta_0)}{\eta_0} \Psi. \quad (18)$$

Нехай $v_0 \neq \frac{D}{\sqrt{\eta}}$, де D – стала. Систему рівнянь (17) можна звести до одного лінійного диференціального рівняння і частинних похідних другого порядку для функції $P = P(\eta, \zeta)$

$$\eta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} + \eta a(\eta) \frac{\partial P}{\partial \eta} - b(\eta) P - \eta^2 d(\eta) \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} = 0$$

$$a(\eta) = \frac{3v_0^2 + 2\eta v_0 v_0' - 2\eta^2 v_0 v_0'' - 2\eta^2 (v_0')^2}{v_0(2\eta v_0' + v_0)}, \quad b(\eta) = \frac{4\eta^2 v_0'' + 4\eta v_0' - v_0}{2\eta v_0' + v_0}, \quad d(\eta) = \frac{2\eta v_0' + v_0}{v_0} \quad (19)$$

Використовуючи умови (18) і рівняння (17), знайдемо граничні умови, яким повинна задовольняти функція P

$$\eta_0 v_0(\eta_0) \frac{\partial P}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} + [v_0(\eta_0) - 2\eta_0 v_0'(\eta_0)] P \Big|_{\eta=\eta_0} = 0, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial \eta} + 2P \right)_{\eta=1} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\pm \frac{h}{2R}} = \pm \frac{h}{2R} = \frac{2V_*}{\Omega R_1} v_0(\eta) \sin \alpha. \quad (20)$$

Зауважимо, що коефіцієнти $a(\eta)$, $b(\eta)$ і $d(\eta)$ перетворюються в константи, якщо $v_0 = B\eta^\gamma$, де B і γ – сталі. Для спрощення приймемо $v_0(\eta) = \eta^\gamma$. Функції v_0 такого виду дозволяють охопити достатньо широкий клас практично важливих випадків, у тому числі випадок рідини, що квазіжорстко обертається, якому відповідає значення $\gamma=1$.

В результаті підстановки $v_0 = \eta^\gamma$ в рівняння (19) і умови (20) маємо крайову задачу

$$\eta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} + (3-2\gamma)\eta \frac{\partial P}{\partial \eta} - (2\gamma-1)P - (2\gamma+1)\eta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (\gamma \neq 1/2)$$

$$\left[(2\gamma-1)P - \eta_0 \frac{\partial P}{\partial \eta} \right]_{\eta=\eta_0} = 0, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial \eta} + 2P \right)_{\eta=1} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\pm \frac{h}{2R}} = \pm \frac{h}{2R} = \frac{2V_*}{\Omega R_1} \eta^\gamma \sin \alpha$$

зв'язану з рівнянням гіперболічного (при $\gamma > -1/2$) або еліптичного (при $\gamma < -1/2$) типу. При розділенні змінних вважатимемо $P(\eta, \zeta) = S(\eta)Z(\zeta)$ і позначивши через μ^2 сталу розділення, прийдемо до регулярної задачі Штурма-Ліувілья з умовами

$$\left(\eta^{3-2\gamma} S' \right)' + \left[\mu^2 \eta^{3-2\gamma} - (2\gamma-1)\eta^{1-2\gamma} \right] S = 0, \quad S'(\eta_0) - \frac{(2\gamma-1)S(\eta_0)}{\eta_0} = 0, \quad S'(1) + 2S(1) = 0$$

і рівнянням $\frac{d^2 Z}{d\zeta^2} + \frac{\mu^2}{2\gamma+1} Z = 0$.

Застосуємо метод Фур'є і прийдемо до розв'язку задачі у вигляді

$$u_1 = \frac{A}{2\gamma+1} \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \left[\mu_n H_{\gamma-1, \gamma}(\mu_n, \mu_n \eta) + \frac{1}{\eta} H_{\gamma, \gamma}(\mu_n, \mu_n \eta) \right] Z_n^{(s)}(\zeta),$$

$$v_1 = \frac{A}{2\gamma+1} \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \left[(\gamma+1)\mu_n H_{\gamma-1, \gamma}(\mu_n, \mu_n \eta) - \frac{\gamma}{\eta} H_{\gamma, \gamma}(\mu_n, \mu_n \eta) \right] Z_n^{(s)}(\zeta),$$

$$w_1 = \frac{A}{2} \sin \varphi \left[\eta - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|\lambda_{n, \gamma}|} \theta_n H_{\gamma, \gamma}(\mu_n, \mu_n \eta) Z_n^{(c)}(\zeta) \right],$$

$$p_1 = A \eta^{\gamma-1} \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n H_{\gamma, \gamma}(\mu_n, \mu_n \eta) Z_n^{(s)}(\zeta), \quad \psi_1 = -A \eta_0^{-\gamma} \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n H_{\gamma, \gamma}(\mu_n, \mu_n \eta) Z_n^{(s)}(\zeta) \quad (21)$$

де μ_n – корені рівняння $H_{\gamma+1, \gamma}(\mu, \mu \eta_0) = 0$ пронумеровані у порядку зростання власних значень μ_n^2 ; $H_{q, s}(\mu, \mu \eta) = [Y_s(\mu) + \mu Y_{s-1}(\mu)] J_q(\mu \eta) - [J_s(\mu) + \mu J_{s-1}(\mu)] Y_q(\mu \eta)$, причому $J(x)$ і $Y(x)$ функції Бесселя першого і другого роду порядку r ;

$$Z_n^{(s)}(\zeta) = \begin{cases} \sin \sqrt{\lambda_{n, \gamma}} \zeta, & \lambda_{n, \gamma} > 0 \\ \text{sh} \sqrt{-\lambda_{n, \gamma}} \zeta, & \lambda_{n, \gamma} < 0 \end{cases}, \quad Z_n^{(c)}(\zeta) = \begin{cases} \cos \sqrt{\lambda_{n, \gamma}} \zeta, & \lambda_{n, \gamma} > 0 \\ \text{ch} \sqrt{-\lambda_{n, \gamma}} \zeta, & \lambda_{n, \gamma} < 0 \end{cases},$$

$$\theta_n = \frac{\int_0^1 \eta^2 H_{\gamma, \gamma}(\mu_n, \mu_n \eta) d\eta}{\eta_0 \sqrt{|\lambda_{n, \gamma}|} Z_n^{(c)} \left(\frac{2V_*}{\Omega R_1} \right) \left[\left(1 + \frac{1}{\lambda_{n, \gamma}} \right) H_{\gamma, \gamma}^2(\mu_n, \mu_n) - \eta_0^2 H_{\gamma, \gamma}(\mu_n, \mu_n \eta_0) \right]}, \quad \lambda_{n, \gamma} = \frac{\mu_n^2}{2\gamma+1}, \quad A = \frac{4V_* \sin \alpha}{\Omega R_1} \quad (22)$$

Проаналізуємо розв'язок (21). Рівняння вільної поверхні, викривленої в результаті дії збурення, що вивчається, відповідно до (6) і (9) має вигляд

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon N(\zeta) \cos \varphi, \left(N(\zeta) = -A \eta_0^{-\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n H_{\gamma, \gamma}(\mu_n, \mu_n \eta) Z_n^{(s)}(\zeta) \right). \quad (23)$$

Отже, всі перетини $\zeta = \text{const}$ викривленої вільної поверхні залишаються з розглядуваною точністю колами радіуса η_0 , а осьова лінія поверхні є кривою $x = \varepsilon N(\zeta)$, що лежить в площині zz' .

Зауважимо, що при виконанні нерівності $\frac{\mu_n^2}{2\gamma + 1} > 0$ і співвідношення

$$\sqrt{\frac{\mu_n^2}{2\gamma + 1} \frac{h}{2R}} = \frac{\pi}{2} (2k + 1) \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (24)$$

маємо $Z_n^{(c)}\left(\frac{h}{2R}\right) = \cos \sqrt{\frac{\mu_n^2}{2\gamma + 1} \frac{h}{2R}} = 0$, тому n -і члени усіх рядів в розв'язку (21) перетворюються на безмежність. Оскільки числа μ_n^2 відповідно до $H_{\gamma+1, \gamma}(\mu, \mu \eta_0) = 0$ залежать тільки від параметрів η_0 і γ , то рівність (24) встановлює при фіксованому γ для кожного номера n і числа k деяку залежність між геометричними параметрами η_0 і $\frac{h}{2R}$. Назвемо сукупність цих залежностей резонансними

співвідношеннями. Відмітимо, що характер збурюваної дії дає підстави визначити, що тут дійсно має місце явище резонансу при вимушених коливаннях шару рідини, що обертається. Природно, що перетворення шуканих величин у безмежність при виконанні резонансних співвідношень пов'язано лише із застосуванням моделі ідеальної рідини. При використанні моделі в'язкої рідини збурення при резонансах мали б скінчені значення. В околах резонансів вийшло б лише зростання збурень, найбільш яскраво виражене тільки для резонансів «низьких порядків», тобто тих, які відповідають невеликим значенням n . Розглядувані резонансні явища мають ту особливість, що умови їх виникнення при заданому характері розподілу колових швидкостей в незбурюваному русі визначаються співвідношеннями тільки між геометричними параметрами системи – висотою камери, її радіусом і радіусом вільної поверхні і не залежить ні від інтенсивності обертання рідини, ні від її густини. Розглянуті хвилі називають інерційними. Оскільки коріолісові сили не роблять роботи над рідиною, яка рухається, енергія, що міститься в цих хвилях, цілком кінетична.

Зауважимо, що при $\alpha=0$, тобто коли вісь камери паралельна осі, навколо якої вона обертається (саме при автобалансуванні) осьова складова сили Коріоліса відсутня і резонансні явища рідини неможливі.

Висновки

У роботі досліджується явище автобалансування роторів машин рідинними автобалансирами, які мають вигляд циліндричної камери, частково заповненої робочою рідиною. Надано фізичне пояснення роботи такого автобалансуючого пристрою для вертикального ротора, яке обґрунтовує експериментально відкрите явище самобалансування рідиною на дорезонансних і всіх інших режимах обертання ротора. Розроблене фізичне пояснення автоматичного балансування рідиною роторів з вертикальною віссю обертання відрізняється від існуючих положень врахуванням гідравлічних властивостей рідини і демпфування системи.

Також досліджено вплив коріолісових і відцентрових сил інерції, які виникають при обертанні і викликають своєрідні гравітаційні хвилі, що поширюються в нестисливій рідині.

Показано, що осьова складова сили інерції Коріоліса може викликати в потоці своєрідні резонансні явища, умови виникнення яких визначаються при зданому характері незбурюваного руху тільки розмірами камери і товщиною шару рідини в незбурюваному потоці і не залежать ні від інтенсивності обертання рідини, ні від її густини. У процесі автобалансування (коли $\alpha=0$) осьова складова сили Коріоліса відсутня і резонансні явища рідини неможливі. Радіальна складова сили інерції Коріоліса не призводить до змін в розташуванні і формі вільної поверхні рідини та й до збурення поля швидкостей, викликаючи лише збурення поля тисків, що не залежить від координат вільної поверхні. Ці результати необхідно враховувати під час конструювання та налагодження відповідних пристроїв.

Література

1. Никифоров А.Н. Состояние проблемы уравновешивания роторов / А.Н. Никифоров // Вестник научно-технического развития. – 2013. – № 4 (68). – С. 20–28.
2. Pat. US 9663889 B2. Republic of Korea. Laundry treating apparatus / Keunjoo Kim, Jinwoong Kim, Seungchul Park ; owner name: Lg Electronics Inc. [Електронний ресурс]. – заявл. 19.02.2015 ; опубл. 30.05.2017. Бюл. № US 14/626,420. – Режим доступу : <http://www.google.com/patents/US9663889> (may 30, 2017).
3. Pat. EP 3085827 A1. Republic of Korea. Balancing unit and laundry treatment apparatus / Keunjoo Kim, Jinwoong Kim, Seungchul Park ; owner name: Lg Electronics Inc. [Електронний ресурс]. – заявл. 11.02.2014 ; опубл. 26.05.2016. Бюл. № US EP20160165454. – Режим доступу : <http://www.google.com/patents/EP3085827A1?cl=en> (may 26, 2016).

4. Pat. US 20120144598 A1. Republic of Korea. Laundry treating appliance with balancing system / Stephen D. Ostdiek., Vishal Verma ; owner name: Whirlpool Corporation [Електронний ресурс]. – заявл. 08.12.2010 ; опубл. 14.06.2012, Бюл. № US EP20160165454. – Режим доступу : <http://www.google.com/patents/US20120144598> (June 14, 2012).
5. Pat. No. 1,209,730 U. S. Automatic balancer for rotating bodies / Leblanc M. Application Filed July 23, 1912- Patented Dec. 26, 1916 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://www.google.com/patents/US1209730> (Dec. 26, 1916).
6. Thearle E.L. A new type of dynamic-balancing machine / E.L. Thearle. – Trans. ASME. – 54. – 1932. – P. 131–141.
7. Den Hartog J.P. Mechanical Vibrations. Dover Publications, Inc. [Orig. 4th Ed. by McGraw-Hill 1956], New York. – 1985.
8. Pat. No. 2,375,635 U. S. Domestic appliance / Dyer J.B. – Original Assignee Motors Liquidation Co – Priority date 1940-06-29; Grant 1945-05-08; Pub Number US2375635A [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://www.google.com/patents/US2375635> (May 08, 1945).
9. Kasahara M. Experiments of liquid motion in a whirling ring / M. Kasahara, S. Kaneko, K. Oshita, H. Ishii // In Proceedings of the Dynamics and Design Conference 2000, 5–8 August 2000, Tokyo, Japan. Japan Soc. Mech. Eng. P. 1–6.
10. Nakamura T. Study on the improvement of the fluid balancer of washing machines / T. Nakamura // In Proceedings of the 13th Asia-Pacific Vibrations Conference, 22–25 November 2009, University of Canterbury, New Zealand. – P. 1–8.
11. Bae, S. Dynamic analysis of an automatic washing machine with a hydraulic balancer / S. Bae, J. M. Lee, Y. J. Kang, J. S. Kang, J. R. Yun // J. Sound Vib. – 2002. – Vol. 257. – P. 3–18.
12. Jung C.H. A dynamic model and numerical study on the liquid balancer used in an automatic washing machine / C.H. Jung, C.S. Kim, Y.H. Choi // Journal of Mechanical Science and Technology. – 2008. – Vol. 22. – P. 1843–1852.
13. Majewski T. Fluid balancer for a washing machine / T. Majewski // In Proceedings of the XVI International Congress 2010. – P. 1–10. – (SOMIM – Society of Mechanical Engineers of Mexico).
14. Chen H.-W. Study on steady-state response of a vertical axis automatic washing machine with a hydraulic balancer using a new approach and a method for getting a smaller deflection angle / H.-W. Chen, Q. Zhang, S.-Y. Fan // J. Sound Vib. – 2011. – Vol. 330. – P. 2017–2030.
15. Urbiola-Soto L., Lopez-Parra M. Dynamic performance of the Leblanc balancer for automatic washing machines / L. Urbiola-Soto, M. Lopez-Parra // J. Vibr. Acoust. – 2011. – Vol. 133. – 041014-1-041014-8.
16. Bolotin V.V. Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability / Bolotin, V.V. – Pergamon Press, Oxford, UK, 1963.
17. Crandall S.H. Rotor dynamics / W. Kliemann // Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics / W. Kliemann, N. S. Namachivaya, editors. – CRC Press, Boca Raton, 1995. – P. 1–44.
18. Wolf Jr. Whirl dynamics of a rotor partially filled with liquid / Jr. Wolf // J. Appl. Mech. – 1968. – Vol. 35. – P. 676–682.
19. Hendricks S.L. Stability of a rotor partially filled with a viscous incompressible fluid / S.L. Hendricks, J.B. Morton // J. Appl. Mech. – 1979. – Vol. 46. – P. 913–918.
20. Holm-Christensen O. A note on rotor instability caused by liquid motions / O. Holm-Christensen, K. Traäger // J. Appl. Mech. – 1991. – Vol. 58. – P. 804–811.
21. Епишев Л.О. О динамической неустойчивости вращающегося ротора при неполном наливке жидкости / Л.О. Епишев // Научн. докл. высш. школы. Машиностроение и приборостроение. – 1959. – № 2. – С. 66–74.
22. Дерендяев Н.В. Об устойчивости стационарного вращения цилиндра, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью / Н.В. Дерендяев, В.М. Сандалов // Прикладная математика и механика. – 1982. – Т. 46, вып. 4. – С. 578–586.
23. Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов / Ф.М. Диментберг. – М. : Изд-во АН СССР, 1959. – 246 с.
24. Рубановский В.Н. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах / В.Н. Рубановский, В.А. Самсонов. – М. : Наука, 1988. – 304 с.
25. Гусаров А.А. Автобалансирующие устройства прямого действия / А.А. Гусаров. – М. : Наука, 2002. – 119 с.
26. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов и машин со многими степенями свободы / В.П. Нестеренко. – Томск : Изд-во Том.ун-та, 1985. – 85 с.
27. Дубовик В.А. Стационарное вращение неуравновешенного ротора с жидкостным автобалансирующим устройством при действии сил внешнего трения / В.А. Дубовик, Е.Н. Пашков // Известия Том. политехн. ун-та, 2006. – Т. 308, № 4. – С. 145–147.
28. Pashkov E. Evaluation of Gravitational Force Effect on Balancing Processes in Liquid-Type Autobalancing Devices / E. N. Pashkov, N. V. Martyushev, I. A. Masson // Advanced Materials Research : Scientific Journal. – 2014. – Vol. 1040 : High Technology: Research and Applications 2014 (HTRA 2014). – P. 642–649.

29. Блехман Л.И. Инерциальные возмущения полого вихря, заключенного в цилиндрический сосуд / Л.И. Блехман // *Механика жидкости и газа*. – 1978. – № 4. – С. 28–38.

30. Ландау Л.Д. Гидродинамика. Теоретическая физика : т. VI / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 3-е изд., перераб. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 736 с.

References

1. Nikiforov A.N. Sostoyanie problemy uravnoveshivaniya rotorov / A.N. Nikiforov // *Vestnik nauchno-tehnicheskogo razvitiya*. – 2013. – № 4 (68). – С. 20–28.
2. Pat. US 9663889 B2. Republic of Korea. Laundry treating apparatus / Keunjoo Kim, Jinwoong Kim, Seungchul Park ; owner name: Lg Electronics Inc. [Elektronnyi resurs]. – zaiavl. 19.02.2015 ; opubl. 30.05.2017. Biul. № US 14/626,420. – Rezhym dostupu : <http://www.google.com/patents/US9663889> (may 30, 2017).
3. Pat. EP 3085827 A1. Republic of Korea. Balancing unit and laundry treatment apparatus / Keunjoo Kim, Jinwoong Kim, Seungchul Park ; owner name: Lg Electronics Inc. [Elektronnyi resurs]. – zaiavl. 11.02.2014 ; opubl. 26.05.2016. Biul. № US EP20160165454. – Rezhym dostupu : <http://www.google.com/patents/EP3085827A1?cl=en> (may 26, 2016).
4. Pat. US 20120144598 A1. Republic of Korea. Laundry treating appliance with balancing system / Stephen D. Ostdiek., Vishal Verma ; owner name: Whirlpool Corporation [Elektronnyi resurs]. – zaiavl. 08.12.2010 ; opubl. 14.06.2012, Biul. № US EP20160165454. – Rezhym dostupu : <http://www.google.com/patents/US20120144598> (June 14, 2012).
5. Pat. No. 1,209,730 U. S. Automatic balancer for rotating bodies / Leblanc M. Application Filed July 23, 1912- Patented Dec. 26, 1916 [Elektronnyi resurs]. – Rezhym dostupu : <https://www.google.com/patents/US1209730> (Dec. 26, 1916).
6. Thearle E.L. A new type of dynamic-balancing machine / E.L. Thearle. – *Trans. ASME*. – 54. – 1932. – P. 131–141.
7. Den Hartog J.R. *Mechanical Vibrations*. Dover Publications, Inc. [Orig. 4th Ed. by McGraw-Hill 1956], New York. – 1985.
8. Pat. No. 2,375,635 U. S. Domestic appliance / Dyer J.B. – Original Assignee Motors Liquidation Co – Priority date 1940-06-29; Grant 1945-05-08; Pub Number US2375635A [Elektronnyi resurs]. – Rezhym dostupu : <https://www.google.com/patents/US2375635> (May 08, 1945).
9. Kasahara M. Experiments of liquid motion in a whirling ring / M. Kasahara, S. Kaneko, K. Oshita, H. Ishii // *In Proceedings of the Dynamics and Design Conference 2000, 5–8 August 2000, Tokyo, Japan. Japan Soc. Mech. Eng. R.* 1–6.
10. Nakamura T. Study on the improvement of the fluid balancer of washing machines / T. Nakamura // *In Proceedings of the 13th Asia-Pacific Vibrations Conference, 22–25 November 2009, University of Canterbury, New Zealand.* – R. 1–8.
11. Bae, S. Dynamic analysis of an automatic washing machine with a hydraulic balancer / S. Bae, J. M. Lee, Y. J. Kang, J. S. Kang, J. R. Yun // *J. Sound Vib.* – 2002. – Vol. 257. – P. 3–18.
12. Jung C.H. A dynamic model and numerical study on the liquid balancer used in an automatic washing machine / C.H. Jung, C.S. Kim, Y.H. Choi // *Journal of Mechanical Science and Technology*. – 2008. – Vol. 22. – P. 1843–1852.
13. Majewski T. Fluid balancer for a washing machine / T. Majewski // *In Proceedings of the XVI International Congress 2010.* – P. 1–10. – (SOMIM – Society of Mechanical Engineers of Mexico).
14. Chen H.-W. Study on steady-state response of a vertical axis automatic washing machine with a hydraulic balancer using a new approach and a method for getting a smaller deflection angle / H.-W. Chen, Q. Zhang, S.-Y. Fan // *J. Sound Vib.* – 2011. – Vol. 330. – P. 2017–2030.
15. Urbiola-Soto L., Lopez-Parra M. Dynamic performance of the Leblanc balancer for automatic washing machines / L. Urbiola-Soto, M. Lopez-Parra // *J. Vibr. Acoust.* – 2011. – Vol. 133. – 041014-1-041014-8.
16. Bolotin V.V. *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability* / Bolotin, V.V. – Pergamon Press, Oxford, UK, 1963.
17. Crandall S.H. Rotor dynamics / W. Kliemann // *Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics* / W. Kliemann, N. S. Namachivaya, editors. – CRC Press, Boca Raton, 1995. – P. 1–44.
18. Wolf Jr. Whirl dynamics of a rotor partially filled with liquid / Jr. Wolf // *J. Appl. Mech.* – 1968. – Vol. 35. – P. 676–682.
19. Hendricks S.L. Stability of a rotor partially filled with a viscous incompressible fluid / S.L. Hendricks, J.B. Morton // *J. Appl. Mech.* – 1979. – Vol. 46. – P. 913–918.
20. Holm-Christensen O. A note on rotor instability caused by liquid motions / O. Holm-Christensen, K. Traäger // *J. Appl. Mech.* – 1991. – Vol. 58. – P. 804–811.
21. Epishev L.O. O dinamicheskoy neustoychivosti vraschayuschegosya rotora pri nepolnom nalive jidkosti / L.O. Epishev // *Nauchn. dokl. vyssh. shkoly. Mashinostroenie i priborostroenie*. – 1959. – № 2. – S. 66–74.
22. Derendyaev N.V. Ob ustoychivosti statsionarnogo vrascheniya tsilindra, chastichno zapolnennogo vyazkoy nesjimaemoy jidkostyu / N.V. Derendyaev, V.M. Sandalov // *Prikladnaya matematika i mehanika*. – 1982. – T. 46, vyp. 4. – S. 578–586.
23. Dimentberg F.M. Izgibnyie kolebaniya vraschayuschihvalov / F.M. Dimentberg. – M. : Izd-vo AN SSSR, 1959. – 246 s.
24. Rubanovskiy V.N. Ustoychivost statsionarnykh dvizheniy v primerakh i zadachah / V.N. Rubanovskiy, V.A. Samsonov. – M. : Nauka, 1988. – 304 s.
25. Gusarov A.A. Avtobalansiruyushchie ustroystva pryamogo deystviya / A.A. Gusarov. – M. : Nauka, 2002. – 119 s.
26. Nesterenko V.P. Avtomaticheskaya balansirovka rotorov i mashin so mnogimi stepenyami svobody / V.P. Nesterenko. – Tomsk : Izd-vo Tom.un-ta, 1985. – 85 s.
27. Dubovik V.A. Statsionarnoe vraschenie neuravnovesennogo rotora s jidkostnyim avtobalansiruyushchim ustroystvom pri deystvii sil vneshnego treniya / V.A. Dubovik, E.N. Pashkov // *Izvestiya Tom. politehn. un-ta*, 2006. – T. 308, № 4. – S. 145–147.
28. Pashkov E. Evaluation of Gravitational Force Effect on Balancing Processes in Liquid-Type Autobalancing Devices / E. N. Pashkov, N. V. Martyshev, I. A. Masson // *Advanced Materials Research : Scientific Journal*. – 2014. – Vol. 1040 : High Technology: Research and Applications 2014 (HTRA 2014). – P. 642–649.
29. Blehman L.I. Inertsialnye vozmuscheniya pologo vihrya, zaklyuchennogo v tsilindricheskii sosud / L.I. Blehman // *Mehanika jidkosti i gaza*. – 1978. – № 4. – S. 28–38.
30. Landau L.D. *Gidrodinamika. Teoreticheskaya fizika* : t. VI / L.D. Landau, E.M. Lifshits. – 3-e izd., pererab. – M. : Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1986. – 736 s.

Рецензія/Peer review : 06.03.2018 р.

Надрукована/Printed : 22.05.2018 р.
Рецензент: д.т.н., проф. Ройзман В.П.