

В [10] запропоновано довільний лагранжево-ейлеровий підхід в кінцево-елементній постановці для вирішення задач течії ньютонівської рідини при великих переміщеннях вільної поверхні.

Робіт, які застосовували МСЕ для розрахунку течій рідини з вільною поверхнею, вкрай мало. Це роботи [11], в яких при чисельній реалізації як варійовані функції використані компоненти тензора напружень і вектора швидкостей. Як приклади в цих роботах представлені процеси витікання рідини з зазору між плитами, витікання ньютонівської рідини з посудини, нахиленої до горизонту і розтікання циліндричного стовпа в'язкої рідини. Стаття [12] присвячена вирішенню осесиметричної задачі про витіканні рідини з круглої труби під дією сили тяжіння.

В даний час мало робіт із застосування методу скінчених елементів для дослідження технологічних процесів лиття полімерів під тиском. Відзначимо тут роботи [13], присвячені розрахунку інжекційного формування, при якому відбувається заповнення плоскої щілини, при цьому вільна поверхня зазнає великі зміни форми. З останніх вітчизняних робіт в цьому плані необхідно відзначити роботи [14], в яких вирішені завдання про повному заповненні прес-форм ньютонівською рідиною, причому з урахуванням кінетики її затвердіння.

В даній роботі наводиться математична формулювання завдання з позицій ейлерової і лагранжевої концепцій течії з тим же припущенням, що і при використанні методу МАС, що впливають із специфіки розглянутого повільного, ізотермічного плинку високов'язкої рідини, яке має місце при литті полімерних виробів легкої промисловості під тиском.

Варіаційний принцип для задачі течії ньютонівській рідини був сформульований в роботі [15]. Функціонал, що відповідає цьому принципу, має вигляд:

$$F(v, p) = \int_V (-pd_{ii} + \mu d_{ij}d_{ij} - g_i v_i) dV - \int_{S^*} r_i v_i dS^* \quad (1)$$

Тут параметрами, які варіюють, є вектор швидкості v з компонентами v_i і скалярна величина тиску p ; d_{ij} – компоненти тензора швидкостей деформації; μ – динамічна в'язкість рідини; g_i – компоненти вектора масових сил; V – об'єм, що займає рідина; S^* – частина поверхні, на якій задані зусилля r_i . Для випадку течії рідини з вільною від навантажень поверхнею інтеграл в рівнянні (1) зникає, тобто :

$$F(v, p) = \int_V (-pd_{ii} + \mu d_{ij}d_{ij} - g_i v_i) dV \quad (2)$$

Згідно з варіаційним принципом векторне поле швидкості і скалярне поле тиску задовольняє рівнянням (1), (2) і граничним умовам для швидкостей. Тоді функціонал (2) приймає стаціонарне значення в тому і тільки тому випадку, якщо v і p є рішенням крайової задачі течії нестисливої ньютонівської рідини з вільною поверхнею.

Розглянемо виведення матричних рівнянь МСЕ. Запишемо функціонал для суцільного середовища, розділеного на елементи, що зв'язані у вузлах:

$$F(v_i, p) = \sum_{n=1}^N \int_V \left(\{p^n\}^T \{d^n\} + \mu_n \{d^n\}^T \{d^n\} - \{v^n\}^T \{g^n\} \right) dV_n \quad (3)$$

Тут N – кількість елементів, V_n – об'єм n -го елемента; μ_n – в'язкість рідини в n -му елементі; індекс T означає транспонування.

Усередині кожного елемента скалярне поле тиску і векторне поле швидкості апроксимується алгебраїчними поліномами відносно просторових координат

$$\begin{aligned} \{v^n\} &= [e^n(x)] \{\alpha_1^n\}, \\ p^n &= [c^n(x)] \{\alpha_2^n\} \end{aligned} \quad (4)$$

Матриця $[e^n]$ і $[c^n]$ рядок містять алгебраїчні поліноми, а стовпці $\{\alpha_1^n\}$ і $\{\alpha_2^n\}$ – є узагальненими змінними.

Підставляючи в рівняння (4) значення координат вузлів елемента і вирішуючи отримані системи рівнянь відносно $\{\alpha_1^n\}$ і $\{\alpha_2^n\}$ отримаємо зв'язок між узагальненими і фізичними змінними:

$$\begin{aligned} \{\alpha_1^n\} &= [\beta^n] \{v\}, \\ \{\alpha_2^n\} &= [\gamma^n] \{p\}, \end{aligned} \quad (5)$$

де стовпці $\{v\}$ і $\{p\}$ представляють собою значення компонент вектора швидкості v і тиску p у вузлах, а матриці перетворення $[\beta^n]$, $[\gamma^n]$ залежать тільки від координат вузлів.

Якщо тиск p постійний в межах кожного елемента, то

$$p_n = [0 \dots 1 \dots 0] \{p\} \quad (6)$$

Тут рядок містить нулі, крім n -го члена, тоді поле тиску має розриви на межах елементів.

Стовпець тензора швидкостей деформацій визначається співвідношенням:

$$\{d^n\} = [\alpha^n(x)] [\beta^n] \{v\} \quad (7)$$

де матриця $[\alpha^n(x)]$ отримана диференціюванням матриці $[d^n]$ за координатами відповідно до визначення тензора швидкостей. З фізичних міркувань ясно, що p і $\{d^n\}$ повинні бути функціями координат однакового ступеня, тому рядок $[c^n(x)]$ і матриця $[\alpha^n(x)]$ повинні містити поліноми однакового ступеня, а ступінь поліномів в матриці $[d^n(x)]$ повинна бути на одиницю вище.

З огляду на (4), (5) і (7) функціонал (3) запишеться в такому вигляді:

$$F(v_i, p) = [p]^T [A_1] [v] + [v]^T [A_2] [v] - [v]^T \{F\}. \quad (8)$$

де

$$[A_1] = - \sum_{n=1}^N [\gamma^n]^T \int_{V_n} [c^n] \{I\}^T [\alpha^n] dV_n [\beta^n], \quad (9)$$

$$[A_2] = \sum_{n=1}^N [\beta^n]^T \int_{V_n} [\alpha^n]^T \mu_n [\alpha^n] dV_n [\beta^n], \quad (10)$$

$$\{F\} = \sum_{n=1}^N [\beta^n]^T \int_{V_n} [d^n]^T \{g^n\} dV_n, \quad (11)$$

Тут $\{I\} = [111000]^T$ – матричний аналог символу Кронекера, а вектор $\{F\}$ представляє собою вектор навантаження, що включає масові сили.

Візьмемо першу варіацію функціонала (8) і прирівняємо її до нуля:

$$\delta F(v, p) = \{\delta p\}^T [A_1] \{v\} + \{\delta v\}^T ([A_1]^T \{p\} + 2[A_2] \{v\} - \{F\}) = 0. \quad (12)$$

Використовуючи незалежність варіацій, з рівняння (12) отримуємо систему матричних рівнянь:

$$\begin{cases} [A_1]^T \{p\} + 2[A_2] \{v\} = \{F\}, \\ [A_1] \{v\} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Для більшої наочності можна переписати систему (13) у такому вигляді:

$$\begin{bmatrix} 2[A_2] & [A_1]^T \\ [A_1] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Виконання граничних умов здійснюється перетворенням відповідних рядків матриці $[A]$ системи (14).

Вирішуючи цю систему рівнянь, можна отримати розподіл швидкості і тиску на даному часовому кроці. Процедура розрахунку течії нелінійно в'язкої рідини абсолютно аналогічна процедурі, описаній в роботі [1, 2] для методу маркерів і комірок. Так само будується ітераційний процес, в якому на кожному етапі проводиться розрахунок поля швидкості рідини з в'язкістю, що визначена за відомим реологічним законом, і значенням швидкостей з попереднього циклу. Ітерації тривають до тих пір, поки в усіх елементах не виконається умова рівності величин інтенсивностей швидкостей зсуву із заданим ступенем точності.

Розглянемо детальніше особливості матричних рівнянь для плоского і осесиметричного випадків.

Нехай течія відбувається в площині декартової системи координат x, y . Вектор швидкості v має відповідні компоненти u і v . Розіб'ємо область течії на трикутні кінцеві елементи. Розглянемо трикутник з вузлами у вершинах i, j, k , всередині якого швидкості є лінійними функціями координат:

$$\{u^n\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = [e^n] \{\alpha\}. \quad (15)$$

Тут $\{\alpha\}$ виражається через значення вектора швидкості у вузлах:

$$\{\alpha\} = \begin{bmatrix} \beta_{1i} & 0 & \beta_{1j} & 0 & \beta_{1k} & 0 \\ 0 & \beta_{1i} & 0 & \beta_{1j} & 0 & \beta_{1k} \\ \beta_{2i} & 0 & \beta_{2j} & 0 & \beta_{2k} & 0 \\ 0 & \beta_{2i} & 0 & \beta_{2j} & 0 & \beta_{2k} \\ \beta_{3i} & 0 & \beta_{3j} & 0 & \beta_{3k} & 0 \\ 0 & \beta_{3i} & 0 & \beta_{3j} & 0 & \beta_{3k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

де $\beta_{1i} = \frac{1}{2\Delta_n}(x_i y_k - x_k y_j)$; $\beta_{2i} = \frac{1}{2\Delta_n}(y_j - y_k)$; $\beta_{3i} = \frac{1}{2\Delta_n}(x_k - x_j)$. Решту отримують циклічною перестановкою індексів.

Тут

$$\Delta_n = \frac{1}{2} [x_i(y_j - y_k) + x_j(y_k - y_i) + x_k(y_i - y_j)], \tag{17}$$

Δ_n – площа трикутного елемента, $\Delta_n > 0$, якщо вузли i, j, k розташовані проти годинникової стрілки.

Підставляючи (16) в (15), отримаємо:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}^n = [e^n] [\beta^n] \{v\} = [\beta^n] \{v\}. \tag{18}$$

Вираз для швидкостей деформацій отримаємо диференціюванням матриці за координатами x і y відповідно до визначення тензора швидкостей:

$$\begin{Bmatrix} d_{xx} \\ d_{yy} \\ \sqrt{2}d_{xy} \end{Bmatrix}^n = [\alpha^n] [\beta^n] \{v\} = [\beta^n] \{v\}. \tag{19}$$

де $[e^n] = \begin{bmatrix} \beta_{2i} & 0 & \beta_{2j} & 0 & \beta_{2k} & 0 \\ 0 & \beta_{3i} & 0 & \beta_{3j} & 0 & \beta_{3k} \\ \frac{\beta_{3i}}{\sqrt{2}} & \frac{\beta_{2i}}{\sqrt{2}} & \frac{\beta_{3j}}{\sqrt{2}} & \frac{\beta_{2j}}{\sqrt{2}} & \frac{\beta_{3k}}{\sqrt{2}} & \frac{\beta_{2k}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Компоненти матриці $[e^n]$ не залежать від координат, отже, швидкості деформації є постійними в межах елемента. Тому і тиск також постійний в межах елемента

$$p_n = [0 \dots 1 \dots 0] \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}, \tag{20}$$

де рядок містить усі нулі, крім n -го елемента.

Враховуючи позначення (18)–(20), з (9) випливає:

$$[A_1]^n = \int_{V_n} \{c^n\} \{J\}^T [e^n] dV_n = [[A_1^i] [A_1^j] [A_1^k]] = [\beta_{2i} \ \beta_{3i} \ \beta_{2j} \ \beta_{3j} \ \beta_{2k} \ \beta_{3k}] \Delta_n. \tag{21}$$

Матриця $[A_1]$ має розмірність $M \times 2N$, де M – кількість елементів, а N – кількість вузлів сітки.

Матриця $[A_2]^n$ визначається з рівняння (10):

$$[A_2]^n = \int_{V_n} [e^n]^T \mu_n [e^n] dV_n = \begin{bmatrix} [A_2^{ii}] & [A_2^{ij}] & [A_2^{ik}] \\ [A_2^{ji}] & [A_2^{jj}] & [A_2^{jk}] \\ [A_2^{ki}] & [A_2^{kj}] & [A_2^{kk}] \end{bmatrix}, \tag{22}$$

Матриця $[A_2]$ – квадратна матриця $2N \times 2N$. Ненульові елементи матриці $[A_2]$ знаходяться на перетині рядків $2r-1, 2r$ і $2s-1, 2s$ стовпців, де $r, s = i, j, k$. Блоки $[A_2^{rs}]$ мають вигляд

$$[A_2^{rs}] = \begin{bmatrix} \beta_{2r} \beta_{2s} + \frac{1}{2} \beta_{3r} \beta_{3s} & \frac{1}{2} \beta_{3r} \beta_{3s} \\ \frac{1}{2} \beta_{2r} \beta_{2s} & \beta_{2r} \beta_{2s} + \beta_{3r} \beta_{3s} \end{bmatrix} \Delta_n \mu_n. \tag{23}$$

Вектор-стовпець навантаження має такий вигляд:

$$\{F\} = \int_{V_n} [\beta^n] \{g^n\} dV_n = \frac{\Delta_n}{3} [F_x F_y \dots F_x F_y \dots F_x F_y]^T. \tag{24}$$

Розглянемо осесиметричну течію рідини. Будемо вважати вісь x радіусом. Компоненту швидкості в цьому напрямку позначимо u . Вісь симетрії направимо уздовж осі y , а відповідна компонента швидкості буде v . В якості кінцевого елемента в цьому випадку розглядається кільце, що утворене обертанням

трикутника навколо осі y . Для компонент швидкості u і v та компонент матриці $[\beta^n]$ справедливі співвідношення (15), (16) і (17).

Геометричні співвідношення, що зв'язують компоненти тензора швидкостей з компонентами вектора швидкості мають вигляд:

$$d_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad d_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad d_{\theta\theta} = \frac{u}{x}; \quad d_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (25)$$

Тоді стовпець швидкостей деформацій n -го елемента визначиться як

$$\begin{Bmatrix} d_{xx} \\ d_{yy} \\ d_{\theta\theta} \\ \sqrt{2}d_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ 1/x & 0 \\ 1/\sqrt{2} \partial/\partial y & 1/\sqrt{2} \partial/\partial x \end{bmatrix} [\beta^n] \{v\} = [e^n] \{v\}, \quad (26)$$

де компоненти матриці $[e^n]$ виражаються через компоненти матриці $[\beta^n]$ таким же чином, як і плоскому випадку.

Тиск визначається з рівняння (20), тільки стовпець $\{I\} = [1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$.

Обчислення матриць аналогічно плоскому випадку. Матриця $[A_1]^n$ має вигляд (21), а кожна її підматриця $[A_1]^s$ ($s = i, j, k$) визначається таким виразом:

$$[A_1]^s = [\beta_{1s} + 2\beta_{2s}x_0 + \beta_{3s}y_0 + \beta_{3s}x_0] \Delta_n, \quad (27)$$

де $x_0 = (x_i + x_j + x_k)/3$; $y_0 = (y_i + y_j + y_k)/3$ – координати центра тяжіння трикутника i, j, k .

Матриця $[A_2]^n$ має вигляд (22). Якщо ввести позначення:

$$J_1 = \int_{\Delta} \frac{1}{x} dx dy; \quad J_2 = \int_{\Delta} \frac{y}{x} dx dy; \quad J_3 = \int_{\Delta} \frac{y}{x} dx dy, \quad (28)$$

то її підматриці $[A_2]^{ts}$ ($t, s = i, j, k$) будуть визначатися таким виразом:

$$[A_2]^{ts} = \begin{bmatrix} \left(2\beta_{2t}\beta_{2s} + \frac{1}{2}\beta_{3t}\beta_{3s} \right) x_0 \Delta_n + \beta_{1t}\beta_{1s} J_1 + \beta_{3t}\beta_{3s} J_3 + (\beta_{2t}\beta_{1s} + \beta_{1t}\beta_{2s}) \Delta_n + \frac{1}{2}\beta_{3t}\beta_{2s} x_0 \Delta_n \\ + (\beta_{3t}\beta_{1s} + \beta_{1t}\beta_{3s}) J_2 + (\beta_{3t}\beta_{2s} + \beta_{2t}\beta_{3s}) y_0 \Delta_n \\ \frac{1}{2}\beta_{2t}\beta_{3s} x_0 \Delta_n \quad \left(\beta_{3t}\beta_{3s} + \frac{1}{2}\beta_{2t}\beta_{2s} \right) x_0 \Delta_n \end{bmatrix} \mu_n \quad (29)$$

Матриці $[A_1]$, $[A_2]$ і вектор навантаження $\{F\}$, що входять в рівняння (14), отримуються підсумовуванням відповідних матриць і векторів навантаження за елементами.

Реалізація методу скінченних елементів в представленому вигляді приводить до симетричної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих вузлових значень компонент вектора швидкості і тиску.

Матриця $[A]$ системи має стрічковий вид, тобто всі її ненульові коефіцієнти за межами стрічки дорівнюють нулю. Таким чином, $\alpha_{ij} = 0$, якщо $|i - j| > LSH$ і $\alpha_{k, k-LSH} \neq 0$ та $\alpha_{k, k+LSH} \neq 0$ хоча б для одного значення k . Тут LSH – півширина, а $2LSH + 1$ – ширина стрічки. Взагалі кажучи, нульові коефіцієнти можуть зустрічатися і всередині смуги.

Формування симетричної стрічкової матриці $[A]$ здійснюється таким чином. Область течії, що розглядається, покривається сіткою чотирикутних елементів, в межах кожного з яких тиск приймається постійним. Для отримання трикутної сітки всі чотирикутники діляться діагоналями на два елементи. Всередині утворених трикутників компоненти вектора швидкості є лінійними функціями координат і виражаються через вузлові значення швидкості.

У кожному вузлі нумеруються дві компоненти вектора швидкості і тиск, який відноситься до верхнього лівого кута чотирикутника. Складання матриці ведеться за елементами трикутної сітки.

Рішення результуючої системи лінійних рівнянь здійснюється методом Гаусса, що модифікований для симетричних стрічкових матриць.

На основі описаної методики створено комплекс програм методу скінченних елементів, що дозволяє моделювати плоскі і осесиметричні течії нелінійно в'язких рідин з вільною поверхнею в областях складної форми та обтікання полімерним матеріалом різноманітних перешкод. В комплекс входять програми, що дозволяють автоматично розбивати вихідну область на трикутні елементи, формувати матрицю кінцевих елементів з урахуванням граничних умов, вирішувати систему лінійних рівнянь, яка утворилася, використовуючи її стрічковий характер і симетричність. Результат досліджень представлений на рис. 1.

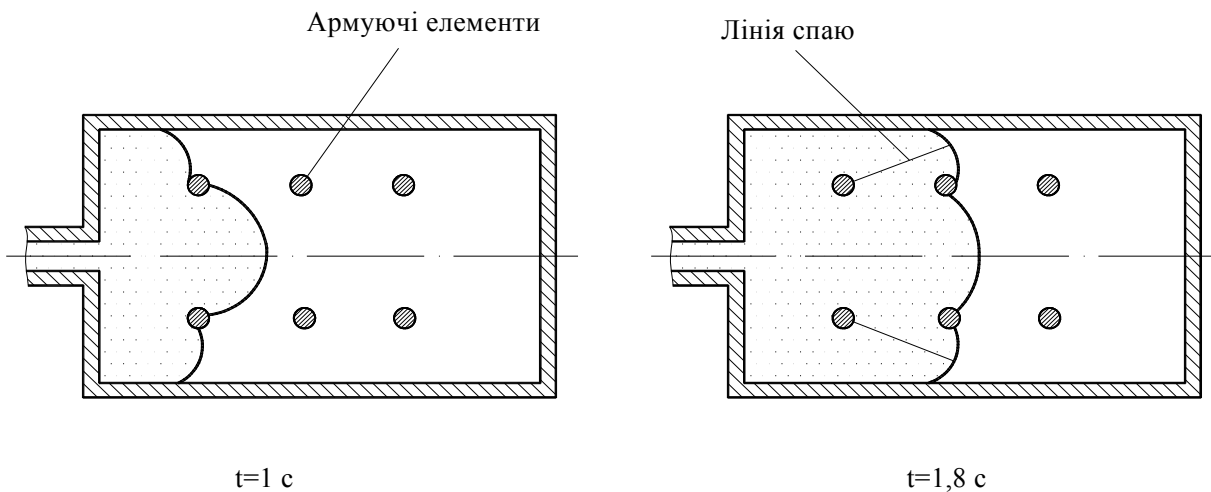


Рис. 1. Моделювання процесу заповнення полімером прес-форми з армуючими елементами

Як видно з рис. 1 в процесі заповнення полімером порожнини з армуючими елементами утворюються лінії спаїв, що знижують експлуатаційні властивості виробів. Якщо в процесі експлуатації на виріб будуть діяти розтягуючі навантаження вздовж осі, то слід визначити такі конструкційні параметри прес-форми і технологічні параметри процесу лиття, які забезпечили б орієнтацію спаїв вздовж дії навантажень розтягу, що можливо, якщо змоделювати процес заповнення порожнини прес-форми.

Висновки. Розроблена математична модель процесу заповнення прес-форми розплавом полімеру та виведені на основі даної моделі матричні рівняння для розв'язку їх методом скінчених елементів для плоского та осесиметричного випадків. Дана модель пов'яже геометричні параметри порожнини прес-форми, технологічні параметри процесу лиття під тиском, властивості матеріалу з одного боку та структуру полімерного виробу з іншого.

Отримані матричні рівняння тестувалися шляхом моделювання процесу заповнення полімером прес-форми з шістьма армуючими елементами. В результаті заповнення прес-форми був отриманий полімерний виріб, який містить лінії спаїв, що утворилися за армуючими елементами. Зазначені лінії спаїв орієнтовані під кутом до осі симетрії, а це означає, що експлуатаційні характеристики вздовж осі симетрії виробу з армуючими елементами будуть нижчими за експлуатаційні характеристики цього ж виробу, але без армуючих елементів. Тобто, покращуючи експлуатаційні показники поперек осі симетрії виробу шляхом додавання армуючих елементів, ми, тим самим, погіршили фізико-механічні показники вздовж осі симетрії виробу.

Підбираючи конструкційні параметри прес-форми та технологічні параметри процесу лиття під тиском можна домогтися орієнтації спаїв вздовж осі симетрії полімерного виробу, що забезпечить незмінність експлуатаційних властивостей вздовж осі симетрії виробу та покращення їх в поперечному до осі напрямку.

Література

1. Синюк О.М. Метод маркерів і комірок у задачах руху рідин з вільною поверхнею / О.М. Синюк, Б.М. Злотенко, М.С. Скиба // Вісник Технологічного університету Поділля. – 1999. – № 6. – С. 142–144.
2. Сынюк О.Н. Конечно-разностный метод исследования процесса заполнения прямоугольной пресс-формы путем визуализации потока расплава / О.Н. Сынюк, Б.Н. Злотенко, Н.Е. Скиба // Вісник Киевского государственного университета технологий и дизайна. – 2000. – № 2. – С. 48–53.
3. Ikegawa M. Finite element method applied to analysis of flow over a spillway crest / M. Ikegawa, K. Washizu // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1973. – Vol. 6. – № 2. – P. 179–189.
4. Bathe K. Some experieces using finite element methods for fluid flow problems / K. Bathe, V. Sonnard, P. Domigan // Finite Elements in Water Resources, Proceedings 4 th of International Conferences. – 1982. – P. 3–16.
5. Finlayson B. A. Mathematical modelling of polymer flows / B. A. Finlayson, N. Y. Tuna // Proc. 4th Int. Symposium on Finite Element and Flow Problems. – 1984. – P. 363–370.
6. Washizu K. Some applications of finite elements techniques to nonlinear free surface fluid flow problems / K. Washizu // The American Institute of Aeronautics and Astronautics. – 1985. – Vol. 34. – P. 3–15.
7. Shen E. I. A finite element study of low Reynolds number two-phase flow in-cylindrical tubes / E. I. Shen, K. S. Udell // American Society of Mechanical Engineers. – 1985. – Vol. 52. – № 2. – P. 253–256.
8. Cuvelier C. A time dependent free boundary governed by the Navier-Stokes equations / C. Cuvelier // Lecture Notes in Physics, 9 th International Journal for Numerical Methods in Fluids. – 1985. – Vol. 218. – P. 170–174.
9. Thompson E. Use of pseudo-concentrations to follow creeping viscous flows during transien analysis / E. Thompson // International Journal for Numerical Methods in Fluids. – 1986. – Vol. 6. – № 10. – P. 749–761.

10. Gendre P. Free-surface flow with large displacement by finite elements / P. Gendre, M. Hittinger, P. Ravier // Hydraulic Engineering Software, Proc. 2 th Int. Conf. – 1986. – P. 51–58.
11. Госмен А. Д. Численные методы исследования течений вязкой жидкости / А. Д. Госмен, В. М. Пан, А. К. Ранчел, Д. Б. Сполдинг – М. : Мир, 1972. – 324 с.
12. Березин И. К. Методы расчета течений со свободными границами / И. К. Березин, Г. В. Левина // Реологические свойства полимерных систем. – Свердловск, 1979. – С. 20–28.
13. Chen B. S. Numerical simulation and experimental investigation mold filling with melt solidification / B. S. Chen, W. H. Liu // Polymer engineering and science. – 1989. – Vol. 29. – № 15. – P. 1039–1050.
14. Липанов А. М. Численное моделирование ползущих течений неньютоновских жидкостей со свободной поверхностью / А. М. Липанов, М. Ю. Альес, Ю. Н. Константинов // РАН – Математическое моделирование. – 1993. – Т. 5. – № 7 – С. 3–9.
15. Няшин Ю. И. Вариационная формулировка нестационарной задачи течения линейно-вязкой среды / Ю. И. Няшин, Р. М. Подгаец, Н. М. Дедюкин // Гидродинамические и прочностные характеристики машин и конструкций : сб. научных трудов ППИ. – Пермь, 1972. – С. 68–72.

Рецензія/Peer review : 28.1.2017 р.

Надрукована/Printed : 18.2.2017 р.
Рецензент: д.т.н., проф. Скиба М.Є.

За зміст повідомлень редакція відповідальності не несе

Повні вимоги до оформлення рукопису
<http://vestnik.ho.com.ua/rules/>

Рекомендовано до друку рішенням вченої ради Хмельницького національного університету,
протокол протокол № 9 від 31.01.2017 р.

Підп. до друку 31.01.2017 р. Ум.друк.арк. 36,51 Обл.-вид.арк. 34,74
Формат 30x42/4, папір офсетний. Друк різнографією.
Наклад 100, зам. № _____

Тиражування здійснено з оригінал-макету, виготовленого
редакцією журналу “Вісник Хмельницького національного університету”
редакційно-видавничим центром Хмельницького національного університету
29016, м. Хмельницький, вул. Інститутська, 7/1. тел (0382) 72-83-63