

ТИСК ПРУЖНОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО ШТАМПА НА ШАР З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ.

В статті у рамках лінеаризованої теорії пружності, розглянуто осесиметричну змішану задачу про тиск пружного циліндричного штампа на шар з початковими (залишковими) напруженнями. Дослідження виконано в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Ключові слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, перетворення Ханкеля, інтегральні рівняння типу Фредгольма, метод послідовних наближень.

Вступ. На сьогоднішній день підвищення надійності та довговічності інженерних споруджень і машин є одною з актуальних задач багатьох галузей промисловості, причому це вимагає жорсткого виконання умов міцності, надійності, економічної доцільності конструкції і одночасно низької їх матеріалоемності. А успішному розв'язуванню таких задач у великій мірі допомагають наукові дослідження в області механіки контактної взаємодії деформівних твердих тіл з початковими (залишковими) напруженнями. Тому їх розв'язок викликає великий інтерес і є особливо актуальним у наш час.

Незважаючи на існуючі досягнення у теорії контактної взаємодії пружних тіл, все ще залишаються не достатньо розроблені ряд моментів, серед яких – врахування впливу початкових (залишкових) напружень на закон розподілу тиску у тілах в місцях їх дотику. В цьому випадку, розрахунок важливих елементів конструкцій та їх створення, дозволить більш ефективно враховувати міцність матеріалів шляхом правильної оцінки запасів міцності та достатньо знижувати їх матеріаломісткість, зберігаючи у цілому потрібні функціональні характеристики.

Дослідження проблеми контактної взаємодії попередньо напружених тіл з'явилися в класичній теорії пружності порівняно недавно і в обмеженій кількості. Хоча задачі класичної теорії набули широкого спектру розвитку в нашій країні та за кордоном. Це пояснюється тим, що лінійна теорія пружності не враховує вплив початкових напружень. Але їх можна врахувати у межах лінеаризованої теорії пружності, що одночасно розвивалася двома напрямками: із врахуванням конкретної форми пружного потенціалу (В. М. Александров, С.М. Мхитарян та інші) [1]; та довільною структурою пружного потенціалу для теорії великих початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій для стисливих (нестисливих) тіл (академік НАН України О. М. Гузь, С. Ю. Бабич, В. Б. Рудницький) [2-5]. У загальному випадку жорстка постановка таких задач потребує залучення апарату нелінійної теорії пружності, але при досить великих початкових (залишкових) напруженнях можна обмежитися і її лінеаризованим варіантом. Цей підхід дозволяє отримати результати із зазвичай прийнятою у теорії пружності точністю та доводить доцільність дослідження даних задач.

Сучасний аналіз підходів до побудови теорій і основних результатів, що застосовуються по відношенню до тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл та тривимірної лінеаризованої теорії поширення пружних хвиль у тілах з початковими (залишковими) напруженнями викладений відповідно в узагальнюючих публікаціях [3-5] та статтях [6-7].

У даній роботі у рамках лінеаризованої теорії пружності [2] подано розв'язок осесиметричної просторової контактної задачі про тиск пружного циліндричного штампа на шар з початковими (залишковими) напруженнями для випадку рівних коренів рівняння [2, (2.12)]. Розглянуто випадки: 1) шар лежить на жорсткій основі без тертя; 2) шар закріплений із нею після виникнення там початкового деформованого стану. Дослідження виконані в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Текст. Припускається, що пружні потенціали – це двічі неперервно-диференційовні функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна. Дослідження проведені у координатах початкового деформованого стану \hat{y}_i , які пов'язані з лагранжевими координатами наступними співвідношеннями: $y_i = \lambda_i x_i$ ($i = \overline{1,3}$), де λ_i – коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового (залишкового) стану.

Крім того, дія штампа викликає в шарі мале збурення основного напруженого стану, для якого виконуються умови

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$$

Величини, що відносяться до пружного штампу, записуємо в прийнятих позначеннях теорії пружності, а величини, що пов'язані з попередньо напруженим шаром, у позначеннях [3-5].

Постановка задачі. Нехай пружний циліндричний штамп радіуса R і висотою H з початковими (залишковими) напруженнями втискається у пружний шар під дією сили P після виникнення там початкового деформованого стану. H_1 – товщина шару в початковому деформованому стані, яка пов'язана з товщиною H_2 у недеформованому стані відношенням $H_1 = \lambda_3 H_2$. Збурення під дією сили P , що прикладена до вільного торця циліндричного штампа, викликають його переміщення у напрямку осі Oy_3 на сталу величину ε . Вважатимемо, що поверхні поза областю контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил. У системі кругових циліндричних координат (r, θ, z_i) $i = \overline{1,2}$ такій постановці відповідають граничні умови

$$1) \text{ на торці пружного штампу } z_i = \frac{H}{v_i}, \text{ де } v_i = \sqrt{n_i}, \quad (i = \overline{1,2}):$$

$$u_3^{(1)} = -\varepsilon; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq r \leq R); \quad (1)$$

2) на границі пружного шару в області контакту $z_i = 0$:

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{33}^{(1)} = \tilde{Q}_{33}^{(2)} \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 \leq r \leq R); \quad (2)$$

3) на границі пружного шару поза областю контакту $z_i = 0$:

$$\tilde{Q}_{33}^{(2)} = 0 \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (R \leq r < \infty); \quad (3)$$

4) на боковій поверхні пружного штампу $r = R$:

$$\tilde{Q}_{rr}^{(1)} = 0; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq z_i \leq \frac{H}{v_i}). \quad (4)$$

На нижній поверхні шару, що лежить на жорсткій основі та закріпленого з основою, $z_i = -\frac{\lambda_3 H_2}{v_i} = -\frac{H_i}{v_i} \quad (i = \overline{1,2})$,

$$u_3^{(2)} = 0 \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 \leq r < \infty), \quad (5)$$

$$u_3^{(2)} = 0 \quad u_r^{(2)} = 0 \quad (0 \leq r < \infty). \quad (6)$$

де $z_i = \frac{y_3}{v_i}$, $(i = \overline{1,2})$ товщина шару в недеформованому стані; n_i – корені рівняння [2, (2.12)].

Випишемо, також умову рівноваги, що встановлює зв'язок між осіданням і рівнодіючої навантаження P :

$$P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho Q_{33}^{(2)}(0, \rho) d\rho \quad (7)$$

Вважаємо, що напруження і переміщення у шарі й півпросторі при $|y_3| \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ зменшуються, а на границі контактної взаємодії циліндра і шару – необмежені.

Розв'язки для циліндричного штамп. Для визначення напружено-деформівного стану осесиметричної статичної задачі у пружному циліндрі використовуємо лінеаризовані рівняння [3,4] з яких випливають вирази для компонент вектора переміщення і тензора напруження для стисливих тіл.

Тоді для рівних коренів $n_1 = n_2$ рівняння [2, (2.12)] компоненти вектора переміщення мають вигляд:

$$\begin{aligned} U_r^{(1)} = & -6C_0 r \left(\frac{1}{v_1} + 2z_1 \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k v_1 I_1(v_1 \gamma_k r) [(A_k + v_1 z_1 B_k) \gamma_k S_6(\gamma_k v_1 z_1) + \right. \\ & \left. + B_k S_1(\gamma_k v_1 z_1)] - \alpha_k J_1(\alpha_k r) \left[\frac{\alpha_k}{v_1} \left(S_4(\alpha_k z_1) + v_1 z_1 S_5(\alpha_k z_1) \right) - S_3(\alpha_k z_1) \right] \right\}, \\ U_3^{(1)} = & \frac{12m_1 C_0 z_1}{v_1} (1 + z_1) + \frac{1 - m_2}{v_1} [A_0 + 3C_0 (r^2 - 2z_1^2)] + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k I_0(\gamma_k v_1 r) [(A_k + z_1 B_k) m_1 \gamma_k v_1 S_1(\gamma_k v_1 z_1) + (1 - m_2) B_k S_6(\gamma_k v_1 z_1)] - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha_k}{v_1} J_0(\alpha_k r) [m_1 \alpha_k (S_2(\alpha_k z_1) + z_1 S_3(\alpha_k z_1)) + (m_2 - 1) v_1 S_5(\alpha_k z_1)] \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

З (8) отримаємо вирази для визначення складових вектора напруження у кругових циліндричних координатах і також для рівних коренів $n_1 = n_2$:

$$\begin{aligned}
Q_{r3}^{(1)} = & d_0 \left\langle - (2d_1 + m_2 - 1) \frac{6C_0 r}{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^2 I_1(\gamma_k v_1 r) [(d_1 + m_1) \gamma_k v_1 (A_k + v_1 z_1 B_k) S_1(\gamma_k v_1 z_1) - (2d_1 + m_2 - 1) B_k S_6(\gamma_k v_1 z_1)] + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\alpha_k^2}{n_1} J_1(\alpha_k r) [\alpha_k (d_1 + m_1) (S_2(\alpha_k z_1) + z_1 v_1 S_3(\alpha_k z_1)) + (2d_1 + m_2 - 1) S_5(\alpha_k z_1)] \right\} \right\rangle, \\
Q_{rr}^{(1)} = & D_{44} \left\langle - 6C_0 \left[\frac{1}{v_1} (1 + \tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_1) + (3 + \tilde{c}_0 - 4\tilde{c}_1 + 2\tilde{c}_2) z_1 \right] - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k v_1 (\gamma_k v_1 I_0(\gamma_k v_1 r) [\gamma_k (\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1) (A_k + z_1 v_1 B_k) S_6(\gamma_k z_1 v_1) + (\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2) B_k S_1(\gamma_k z_1 v_1)] + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(1 - \tilde{c}_0) I_1(\gamma_k v_1 r)}{r} [\gamma_k S_6(\gamma_k z_1 v_1) (A_k + z_1 v_1 B_k) + B_k S_1(\gamma_k z_1 v_1)] \right\} - \right. \\
& \left. \alpha_k \left(\alpha_k J_0(\alpha_k r) \left[\frac{\alpha_k}{v_1} \{ \tilde{c}_0 S_4(\alpha_k z_1) - \tilde{c}_1 S_2(\alpha_k z_1) \} + (\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2) S_3(\alpha_k z_1) \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(1 - \tilde{c}_0) J_1(\alpha_k r)}{r} \left[\frac{\alpha_k}{v_1} S_4(\alpha_k z_1) + S_3(\alpha_k z_1) \right] \right) \right\} \right\rangle; \tag{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{33}^{(1)} = & C_{44} \left\langle 12C_0 \left[(1 + m_1) l_1 \left(\frac{1}{v_1} + z_1 \right) + (1 + m_2) l_2 z_1 \right] + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^2 v_1^2 I_0(\gamma_k v_1 r) [(1 + m_1) l_1 \gamma_k (A_k + v_1 z_1 B_k) S_6(\gamma_k v_1 z_1) + (1 + m_2) l_2 B_k S_1(\gamma_k v_1 z_1)] - \right. \right. \\
& \left. \left. - \alpha_k^2 J_0(\alpha_k r) \left[\frac{(1 + m_1) l_1 \alpha_k}{v_1} (S_4(\alpha_k z_1) + v_1 z_1 S_5(\alpha_k z_1)) + (1 + m_2) l_2 S_3(\alpha_k z_1) \right] \right\} \right\rangle, \\
Q_{3r}^{(1)} = & C_{44} \left\langle - \frac{6C_0 r (1 + m_2)}{v_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^2 v_1 I_1(\gamma_k v_1 r) [(1 + m_1) \gamma_k (A_k + v_1 z_1 B_k) S_1(\gamma_k v_1 z_1) - \right. \right. \\
& \left. \left. - (1 + m_2) B_k S_6(\gamma_k v_1 z_1)] + \frac{\alpha_k^2}{v_1} J_1(\alpha_k r) [\alpha_k (1 + m_1) (S_2(\alpha_k z_1) + v_1 z_1 S_3(\alpha_k z_1)) + (1 + m_2) S_5(\alpha_k z_1)] \right\} \right\rangle \tag{10}
\end{aligned}$$

Розв'язки для шару. Напружено-деформівний стан у пружному шарі з початковими напруженнями визначимо через гармонійні функції у вигляді інтегралів Ханкеля. Скажімо, що перетворення Ханкеля хоч і не дають можливості отримати точні розв'язки, але дозволять звести задачу до інтегральних рівнянь типу Фредгольма, що дозволять ефективніше використовувати метод послідовних наближень для $\lambda_1 > \lambda_{kr}$. Задовольнивши третю умову (2), другу - (3) і умови (5), (6), після ряду перетворень для випадку рівних коренів $n_1 = n_2$ рівняння [2, (2.12)] матимемо:

$$u_3^{(2)} = \frac{m_1 (s_1 - s_0)}{v_1} \left(\int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta \rho) d\eta - \int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} G(\eta h) J_0(\eta \rho) d\eta \right) \tag{11}$$

$$Q_{33}^{(2)} = \frac{2C_{44} (1 + m_1) l_1 (s - s_0)}{R} \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta; \quad Q_{3r}^{(2)} = 0$$

де $h = H_1 / R$; $\eta = \xi R$; $\rho = r / R$ – безрозмірні величини; $s_0 = \frac{1 + m_2}{1 + m_1}$; $s = s_0 \frac{l_2}{l_1}$; $s_1 = \frac{m_1 - 1}{m_1}$; $\varphi_1 = 2\eta \frac{h}{v_1}$;

$$G(\eta h) = 1 - \frac{1}{q_i(\eta h)}; \quad q_i(\eta h) = \begin{cases} \frac{(sh2\varphi_1 + 2\varphi_1 - s_0)}{ch2\varphi_1 - 1} \quad \text{їдè} \quad \text{òüâ}^3 \quad (5); \\ \frac{(1-s)(s_0 - s_1) + (1-s_1)(s_0 - s)sh^2\varphi_1 + \varphi_1^2}{\varphi_1 - (1-s_1)sh\varphi_1 ch\varphi_1} \quad \text{їдè} \quad \text{òüâ}^3 \quad (6); \end{cases} \tag{12}$$

у (12) q_1 відповідає умові (5), а q_2 - (6). А вирази (11) одержані в загальній формі для стисливих і нестисливих тіл та значення коефіцієнтів n_i , m_i , c_{44} , l_i подані у [2].

Метод розв'язування. Використовуючи розв'язки для циліндра (8) - (10) і задовольняючи четвертій умові (2), другій умові (1), першій умові (4), знаходимо власні значення задачі (1) - (6):

$$\gamma_k = \frac{\pi k}{H}, \quad \alpha_k = \frac{\mu_k}{R}, \quad (k \in Z) \quad (13)$$

Не зупиняючись на викладках, скажемо, що з перших умов (2) і (3) невідома функція $F(\eta)$ визначається в результаті зведення задачі до парних інтегральних рівнянь типу Фредгольма із застосуванням методу послідовних наближень в результаті чого, розв'язок представлено у вигляді рядів через нескінченну систему констант. Ці константи визначаються з системи регулярних лінійних алгебраїчних рівнянь виду:

$$\alpha_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{kn} \chi_n = d_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (14)$$

Визначивши невідомі константи χ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) з системи (14), можна обчислити силу P , переміщення і напруження у штампі та шарі по формулам (7) – (11).

Висновки. В результаті дослідження розв'язок представлено у вигляді рядів через нескінченну систему констант, які визначаються з системи (14), причому її коефіцієнти залежать від величин, що визначають структуру пружного потенціалу, висоти пружного штампа H і ширини попередньо напруженого шару H_1 , а вільні члени залежать тільки від коренів характеристичних рівнянь (13).

Таким чином, в даній роботі отримані аналітичні залежності, що відображають вплив початкових напружень на напружено-деформований стан системи пружний циліндр - шар з початковими (залишковими) напруженнями. Цей вплив є суттєвим як для стисливих, так і нестисливих тіл та повинен враховуватися при розрахунках на міцність деталей машин і конструкцій.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Александров В.М.**, Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. - М.: Наука, Гл.ред. физ.-мат. лит., 1983. – 488с.
2. **Гузь А. Н.** Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. - Киев: Наук. думка, 1983. – 286 с.
3. **Guz A.N.**, Rudnitsky V.B. Contact problems for elastic bodies with initial (residual) stresses. Khmelnytsky: Publish Private Entrepreneur Melnyk A. A., 2004. – 682 p
4. **Guz A.N.**, Rudnitsky V.B. Fundamentals of the contact interaction theory of elastic bodies with initial (residual) stresses. Khmelnytsky, Publish Private Entrepreneur Melnyk A. A., 2006. – 700 p.
5. **N. A. Yaretska** Contact interaction of resilient and cylindrical dies with initial (residual) tension. // Czasopismo techniczne: ztsyt 3/2008 (ROK 105). – Wydawnictwo politechniki w Krakowie – Mechanika, z.3-M/2008. – с. 213-216.
6. **V. B. Rudnitsky**, N. O. Yaretska Contact interaction of resilient die and cylindrical die with initial (residual) tension. // Вісник Хмельницького національного університету. Науковий журнал: Технічні науки. – Хмельницький: ХНУ, 5.2007, – с. 136-137.

Хмельницький національний
Університет, м. Хмельницький,
Україна

Н. А. Ярецкая

ДАВЛЕНИЕ УПРУГОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ШТАМПА НА СЛОЙ С НАЧАЛЬНЫМИ (ОСТАТОЧНЫМИ) НАПРЯЖЕНИЯМИ.

В статье в рамках линеаризованной теории упругости представлена осесимметрическая смешанная задача о давлении упругого цилиндрического штампа на слой с начальными (остаточными) напряжениями. Исследования представлены в общем виде для теории больших начальных деформаций и различных вариантов теории малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала для.

Ключевые слова: линеаризованная теория упругости, начальные (остаточные) напряжения, преобразования Ханкеля, интегральные уравнения типа Фредгольма, метод последовательных приближений.

N. A. Yaretska

PRESSES OF CYLINDRICAL DIE ONTO A RESILIENT DIE WITH INITIAL (RESIDUAL) TENSION

The article deals with the *coaxial* mixed type task of measuring pressure of an elastic cylinder die upon a layer with initial stresses within the framework of linear elasticity theory. In general, the research was carried out for the theory of great initial (ultimate) deformations and different variants of the theory of small initial deformations with arbitrary structure of elastic potential.

Keywords: the linear elasticity theory, initial (residual) tension, the way of Henkel integrals, the task to Fredholm equations, the method of consecutive approximations.