

НАУКОВИЙ ВІСНИК
Ужгородського університету

ISSN 2616-7700 (print)
2708-9568 (online)



серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 39 № 2

2021

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 39 № 2

Ужгород 2021

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика» / редкол.: М. М. Маляр (гол. ред.) та інші. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2021. Т. 39, № 2. 176 с.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2)).

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маляр М. М., доктор техн. наук, професор (Україна).

Заст. головн. редактора — Сливка-Тилищак Г. І., доктор фіз.-мат. наук, доцент (Україна).

Відповідальний секретар — Андрашко Ю. В., канд. техн. наук (Україна).

Технічний секретар — Бортош М. Ю., канд. фіз.-мат. наук (Україна).

Члени редакційної колегії: Бовді В. А. — доктор філософії з математики, професор (ОАЕ), Бондаренко В. М. — доктор фіз.-мат. наук, професор (Україна), Гече Ф. Е. — доктор техн. наук, професор (Україна), Гуляницький Л. Ф. — доктор техн. наук, с.н.с., член-кор. НАНУ (Україна), Зайченко Ю. П. — доктор техн. наук, професор, академік АН ВШ (Україна), Кондрук Н. Е. — канд. техн. наук, доцент (Україна), Маринець К. В. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Нідерланди), Моклячук М. П. — доктор фіз.-мат. наук, професор, академік АН ВШ (Україна), Мулеса П. П. — канд. техн. наук, доцент (Україна), Поліщук В. В. — канд. техн. наук, доцент (Україна), Рейтій О. К. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Україна), Ронто А. М. — доктор фіз.-мат. наук, професор (Чехія), Семенова Н. В. — доктор фіз.-мат. наук, с.н.с. (Україна), Синявська О. О. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Україна), Снитюк В. Є. — доктор техн. наук, професор (Україна), Тилищак О. А. — доктор фіз.-мат. наук, доцент (Україна), Чупов С. В. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Україна), Шаркаді М. М. — канд. економ. наук, доцент (Україна), Щобак Н. М. — канд. фіз.-мат. наук, професор (Чехія).

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 11 від 16 листопада 2021 р.

Журнал включено в Перелік наукових фахових видань України (наказ МОН України №409 від 17.03.2020р.) Категорія: «Б». Спеціальності: 111 – Математика, 113 – Прикладна математика, 122 – Комп’ютерні науки, 124 – Системний аналіз та 126 – Інформаційні системи та технології.

Індексується в Index Copernicus. ICV 2020: 72.72.

Свідцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – ДВНЗ «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Адреса редакційної колегії: Україна, 88000 Ужгород, вул. Університетська, 14, ФМЦТ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

© М. М. Маляр,

Ю. В. Андрашко, упорядкування, 2021

© Ужгородський національний університет,
2021

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of
MATHEMATICS AND INFORMATICS

Volume 39 No 2

Uzhhorod 2021

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: M. Malyar (Chief edit.) and others. Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2021. Vol. 39, No 2. 176 p.
DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2)).

EDITORIAL

Chief Editor — M. Malyar, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine).

Deputy Chief Editor — G. Slyvka-Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine).

Responsible Secretary — Yu. Andrashko, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine).

Technical Secretary — M. Bortosh, Ph. D. (Phys.-Math.), Sen. lect. (Ukraine).

Members: V. Bovdi, Ph. D. (Math.), Prof. (UAE), V. Bondarenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Ukraine), F. Geche, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), L. Huliannykyi, Dr. Sci. (Tech.), S.R.O., Academics (Ukraine), Yu. Zaichenko, Dr. Sci. (Tech.), Prof., Academics (Ukraine), N. Kondruk, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), K. Marynets, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Netherlands), M. Mokliachuk, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Academics (Ukraine), P. Mulesa, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), V. Polishchuk, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), O. Reity, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), A. Ronto, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic), N. Semenova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), O. Syniavska, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), V. Snytyuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), A. Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), S. Chupov, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), M. Sharkadi, Ph. D. (Econom.), As. prof. (Ukraine), N. Shchobak, Ph. D. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic).

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record No 11 dated by November 16, 2021.

The journal is included in the List of Scientific Professional Species of Ukraine (Order of the MES Of Ukraine No 409 by November 15, 2020). Category: "B". Specialty: 111 – Mathematics, 113 – Applied Mathematics, 122 – Computer Science, 124 – System Analysis, 126 – Information Systems and Technologies.

Indexed in the Index Copernicus. ICV 2020: 72.72.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.

Founder and Publisher: State University "Uzhhorod National University".

Published twice a year.

The collection of scientific articles has been published since 1994.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Address of publishing house: FMDT, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88000, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

Розділ 1: Математика і статистика

1. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Гордона зі степеневими нелінійностями	7
2. Бондаренко В. М., Стъопочкіна М. В. Про коефіцієнти транзитивності частково впорядкованих множин, що мають надсуперкритичний непримітивний MM -тип	22
3. Ілаш Н. Б., Самарук Н. М. Метод Єгоричева доведення комбінаторних тождествей з многочленами Нараяна	30
4. Ільєнко А. Б., Стаматієва В. В. Гранична теорема для точкових процесів, пов'язаних з узагальненою задачею про дні народження	38
5. Мамай Л. М. Про побудову наближених ізольованих розв'язків нелінійних інтегральних рівнянь зі степеневою нелінійністю	47
6. Мельник І. О., Коляда Р. В., Мельник О. М. Деякі властивості диференціальних, квазіпервинних та диференціально-первинних піднапівмодулів	60
7. Петечук В. М., Петечук Ю. В. Гомоморфізми лінійних груп, що містять нормальні підгрупи елементарних трансвекцій	68
8. Рамський А. О., Самарук Н. М., Поплавська О. А. Кратності ваг незвідних зображень алгебри Лі sl_3	81
9. Тегза А. М. Моделювання гауссового стаціонарного випадкового процесу з обмеженим спектром з заданими точністю і надійністю у рівномірній метриці	91
10. Щоголев С. А., Карапетров В. В. Критичний випадок в теорії матричних диференціальних рівнянь	100

Розділ 2: Інформатика, комп'ютерні науки та прикладна математика

1. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф. Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 3. Динамічні процеси у пружному двохшаровому півпросторі з початковими напруженнями при дії рухомих навантажень	116
2. Бойко Н. Аналіз парадигми Semi-supervised learning для класифікації мультимодальних даних	125
3. Гедєон А. О., Гапак О. М. Апаратна реалізація модулів хешування на базі алгоритмів CRC-32 і Adler-32	145
4. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. Базисна еквівалентність у класі універсальних булевих алгебр	152
5. Поліщук В. В., Келемен М., Млавець Ю. Ю., Тимошенко О. А., Келемен М. Мол. Концептуальна модель оцінювання рівня керованості процесами у складних системах враховуючи ризик-орієнтовані фактори	158

CONTENTS

Chapter 1: Mathematics and Statistics

1. <i>Bak S. M.</i> Standing waves in discrete Klein-Gordon type equations with power nonlinearities.....	7
2. <i>Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.</i> On transitivity coefficient of posets of MM -type to be oversupercritical non-primitive.....	22
3. <i>Ilyash N. B., Samaruk N. M.</i> Egorychev method for proving combinatorial identities involving Narayana polynomials.....	30
4. <i>Iliencko A. B., Stamatieva V. V.</i> A limit theorem for point processes associated with the generalized birthday problem.....	38
5. <i>Mamay L. M.</i> About the construction of approximate isolated solutions of nonlinear integral equations with power nonlinearity.....	47
6. <i>Melnyk I. O., Kolyada R. V., Melnyk O. M.</i> Some properties of differential, quasi-prime and differentially prime subsemimodules.....	60
7. <i>Petechuk V. M., Petechuk Y. V.</i> Homomorphisms of linear groups that contain normal subgroups of elementary transvections.....	68
8. <i>Ramskyyi A. O., Samaruk N. M., Poplavska O. A.</i> Weight multiplicities of irreducible representations of the Lie algebra sl_3	81
9. <i>Tegza A. M.</i> Simulation of a Gaussian stationary random process with a limited spectrum with a given accuracy and reliability in a uniform metric.....	91
10. <i>Shchogolev S. A., Karapetrov V. V.</i> Block separation of the system of the linear matrix differential equations.....	100

Chapter 2: Informatics, Computer Science and Applied Mathematics

1. <i>Babych S. Yu., Glukhov Yu. P., Lazar V. F.</i> Dynamic processes in bodies (materials) with initial stresses. Part 3. Dynamic processes in an elastic two-layer half-space with initial stresses under the action of moving loads.....	116
2. <i>Boyko N.</i> Semi-supervised learning paradigm analysis for classification of multimodal data.....	125
3. <i>Hedeon A. O., Hapak O. M.</i> Hardware implementation of hashing modules based on algorithms CRC-32 and Adler-32.....	145
4. <i>Mych I. A., Nykolenko V. V., Vartsaba O. V.</i> Basic equivalence in class universal boolean algebras.....	152
5. <i>Polishchuk V. V., Kelemen M., Mlavets Yu. Yu., Tymoshenko O. A., Kelemen M. Jr.</i> Conceptual model for assessing the level of process control in complex systems considering risk-oriented factors.....	158

УДК 519.1

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).30-37](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).30-37)**Н. Б. Ілаш¹, Н. М. Самарук²**¹ Хмельницький політехнічний фаховий коледж національного університету «Львівська політехніка»,

викладач спеціальних дисциплін,

кандидат фізико-математичних наук

nadyailash@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3123-9642>² Хмельницький національний університет,

доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,

кандидат педагогічних наук, доцент

samaruk_nm@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4611-8528>

МЕТОД ЄГОРИЧЕВА ДОВЕДЕННЯ КОМБІНАТОРНИХ ТОТОЖНОСТЕЙ З МНОГОЧЛЕНАМИ НАРАЯНА

У цій публікації наведено нові доведення двох комбінаторних тотожностей. Часткові випадки цих тотожностей містять числа та многочлени Нараяна і використовуються, зокрема, у класичній теорії інваріантів та дискретній математиці. Одна із доведених нами тотожностей є узагальненням задачі Стенлі.

Хоча існує велика кількість методів генерування нових комбінаторних тотожностей, на жаль, не існує єдиного універсального методу, який дозволив би довести будь-яку комбінаторну тотожність. У сімдесятих роках минулого століття Георгієм Єгоричевим було розроблено декілька нових методів обчислення комбінаторних сум. У цій статті ми використовуємо один з методів Єгоричева – метод лишків (коефіцієнтів).

Ключові слова: комбінаторика, біноміальний коефіцієнт, комбінаторна тотожність, метод Єгоричева, многочлени Нараяна.

1. Вступ. Число Нараяна

$$N_{n,k} = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}, (1 \leq k \leq n)$$

використовується в багатьох комбінаторних задачах (див. [1], [2]).

Ми розглядаємо многочлен Нараяна

$$N_n(z) = \sum_{k=1}^n N_{n,k} z^{k-1}.$$

В деяких джерелах його називають асоційованим многочленом Нараяна (див. [3]).

Крім цього, розглянемо многочлен Нараяна типу B , що визначається наступним чином:

$$W_n(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 z^k.$$

Зокрема, застосування многочленів Нараяна та числа Нараяна у класичній теорії інваріантів наведені у [4], [5], [6], [7]. В [8] знайдено рекурентне співвідношення для многочленів Нараяна:

$$N_n(z) = (1-z)N_{n-1}(z) + z \sum_{i=0}^{n-1} N_i(z)N_{n-1-i}(z).$$

Породжуюча функція

$$G(z, t) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} N_n(z) t^i = \frac{1 - (1 - z)t - \sqrt{(1 - z)^2 t^2 - 2(1 + z)t + 1}}{2zt}$$

задовільняє функціональне рівняння (див. [9]):

$$ztG(z, t)^2 + (t + zt - 1)G(z, t) + t = 0.$$

Різні рекурентні співвідношення для многочленів Нараяна обох типів доведено у [10] та у [11].

У [12] Р. Стенлі пропонує ряд задач. Серед них задача 15: довести, що многочлен Нараяна типу В можна подати у вигляді

$$W_n(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{2n-k}{n} (z-1)^k.$$

В [13] доведено аналог цієї формули для многочленів Нараяна $N_n(z)$.

В [14] чисто комбінаторно доведена тотожність, що їх узагальнює. Доведення займає декілька сторінок. В розділі 3 ми наводимо коротке і елементарне доведення цієї тотожності, використовуючи метод Єгоричева. Основні положення цього методу наведено в розділі 2.

В [21] чисто комбінаторно доведено комбінаторну тотожність

$$\sum_{i=0}^{\min\{k,m\}} \binom{m}{i} \binom{m+2s}{i+s} \binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} = \binom{m+k+s}{m+s} \binom{m+k+2s}{m+s},$$

що є узагальненням відомої тотожності Лі Жень-чу. Доведення займає декілька сторінок. У розділі 4 ми пропонуємо простіше доведення, з використанням методу Єгоричева.

2. Метод Єгоричева обчислення комбінаторних сум. Розглянемо основні правила методу лишків (коефіцієнтів), розробленого Г. Єгоричевим у [15].

Нехай $A(w)$ і $B(w)$ – породжуючі функції для числових послідовностей $\{a_k\}$ та $\{b_k\}$, $k = 0, 1, \dots$. Множину тих числових рядів над полем K дійсних чи комплексних чисел, що містять скінченну кількість доданків з від'ємними степенями, позначимо через H . Введемо на H алгебру формальних степеневих рядів з операціями додавання, множення та взяття оберненого. Кільце R степеневих рядів виду

$$C(w) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w^k, c_1 \neq 0$$

над полем K має структуру алгебри Коші.

Означення 1 (див. [15]). *Нехай $C(w) \in H$. Лишком назвемо*

$$\mathit{res}C(w) = \mathit{res}_w C(w) = c_{-1},$$

де c_{-1} – коефіцієнт при w^{-1} ряду $C(w)$, що стоїть під знаком res .

З означення лишку \mathbf{res} та теорії аналітичних функцій впливають такі правила дій над лишками породжуючих функцій виду $A(w) = \sum_{k \geq 0} a_k w^k$.

Твердження 1 (див. [15]). *Правило зняття лишку*

$$\mathbf{res}_w A(w) w^{-k-1} = \mathbf{res}_w B(w) w^{-k-1}, k = 0, 1, \dots,$$

тоді і тільки тоді, коли

$$A(w) = B(w).$$

Твердження 2 (див. [15]). *Правило лінійності*

$$\alpha \mathbf{res}_w A(w) w^{-k-1} + \beta \mathbf{res}_w B(w) w^{-k-1} = \mathbf{res}_w (\alpha A(w) + \beta B(w)) w^{-k-1}.$$

Твердження 3 (див. [15]). *Правило заміни змінних*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{res}_w A(w) w^{-k-1} = A(z).$$

Твердження 4 (див. [15]). *Нехай α — довільне комплексне число, m — натуральне. Біноміальний коефіцієнт можна виразити через лишок з допомогою формули*

$$\binom{\alpha}{n} = \mathbf{res}_w (1+w)^\alpha w^{-n-1}.$$

Останнє співвідношення залишається справедливим і у випадку, коли $A(w)$ многочлен, а $z = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k w^k$, $a_{-m} \neq 0$, де m додатне число.

Алгебраїчний підхід до означення лишку розвинено у роботах [16] і [17].

Застосування даного методу дає можливість просто генерувати комбінаторні тотожності, зокрема, з числами Нараяна. Що буде продемонстровано нижче.

3. Доведення узагальненої задачі Стенлі. Застосовуючи метод Єгоричева, покажемо, що

Теорема 1 (див. [14]). *Для $n, q \geq 0, x \in \mathbb{C}$ справедлива тотожність*

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{2n+x+q-k-2}{n+q-1} (z-1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+x+q-2}{k+q-1} z^k.$$

Доведення. Виразимо біноміальні коефіцієнти у правій частині через лишки. Згідно твердження 4

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{2n+x+q-k-2}{n+q-1} (z-1)^k = \\ & = \mathbf{res}_{uv} \sum_{k=0}^n \frac{(1+v)^n (1+u)^{2n+x+q-2-k}}{v^{k+1} u^{n+q}} (z-1)^k = \\ & = \mathbf{res}_u \frac{(1+u)^{2n+q+x-2}}{u^{n+q}} \mathbf{res}_v \sum_{k=0}^n \left(\frac{z-1}{1+u} \right)^k \frac{(1+v)^n}{v^{k+1}} = \end{aligned}$$

Застосувавши правило заміни змінних, маємо

$$\begin{aligned} &= \operatorname{res}_u \frac{(1+u)^{2n+q+x-2}}{u^{n+q}} \left(1 + \frac{z-1}{1+u}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{res}_u \frac{(1+u)^{n+q+x-2}}{u^{k+q}} z^k = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+x+q-2}{k+q-1} z^k. \end{aligned}$$

Зазначимо, що при $x = q = 1$ ми довели задачу Стенлі:

Наслідок 1 (див. [12], [14]). *Многочлен Нараяна типу В можна подати у вигляді*

$$W_n(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{2n-k}{n} (z-1)^k.$$

При $q = 0, x = 2$ отримаємо аналогічний вираз для многочленів Нараяна.

Наслідок 2 (див. [13], [14], [18]). *Многочлен Нараяна можна подати у вигляді*

$$\begin{aligned} N_n(z) &= \frac{1}{z(n+1)} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \binom{2n-k}{n} (z-1)^k = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \binom{2n-k}{n} z^{n-k} (1-z)^k. \end{aligned}$$

Зауважимо, що останній вираз для многочлена Нараяна отримується завдяки тому, що многочлен $xN_n(x)$ є самовзаємним.

4. Доведення узагальнення тотожності Лі Жень-чу. Існує багато формул, які легко застосувати як до чисел Нараяна, так і для чисел виду $q_{n,k} = \binom{n}{k}^2$. Наприклад, згортка Вандермонда дає можливість легко знайти як суму $\sum_{k=1}^n N_{n,k}$, так і суму $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}^2$.

В [19], [20] Ріордан доводить рекурентні формули для чисел $r_{n,m} = N_{n,m+1}$

$$r_{n,m} = \sum_{i=0}^m r_{m,i} \binom{n+i}{2m},$$

або для чисел Нараяна

$$N_{n,m+1} = \sum_{i=0}^m N_{m,i+1} \binom{n+i}{2m},$$

$$q_{n,m} = \sum_{i=0}^m q_{m,i} \binom{n+i}{2m}.$$

Замінивши n на $m+k$ та i на $m-i$ в останній формулі, бачимо, що вона є іншим записом тотожності Лі Жень-чу. Використовуючи метод Єгоричева, доведемо що справедлива більш загальна формула.

Теорема 2 (див. [21]). Для довільних цілих невід'ємних m, k, s справедлива тотожність:

$$\sum_{i=0}^{\min\{k,m\}} \binom{m}{i} \binom{m+2s}{i+s} \binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} = \binom{m+k+s}{m+s} \binom{m+k+2s}{m+s}.$$

Доведення. Зауважимо, що $\binom{m}{i} = 0$ при $i > m$ та при $i > 0$, також

$$\binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} = 0$$

при $i > k$, тому

$$\sum_{i>k} \binom{m}{i} \binom{m+2s}{i+s} \binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} = 0 = \sum_{i>m} \binom{m}{i} \binom{m+2s}{i+s} \binom{k-i+2m+2s}{2m+2s}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\min\{k,m\}} \binom{m}{i} \binom{m+2s}{i+s} \binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} = \\ & = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{m+2s}{i+s} \binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} = \\ & = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \binom{m+2s}{i+s} \binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} = \\ & = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} \binom{m+2s}{i+s} \binom{k-i+2m+2s}{2m+2s}. \end{aligned}$$

Використовуючи твердження 4, подамо біноміальні коефіцієнти через лішки:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} \binom{m+2s}{s+i} \binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{res}_u \frac{(1+u)^m}{u^{i+1}} \mathbf{res}_v \frac{(1+v)^{m+2s}}{v^{m-i+s+1}} \mathbf{res}_w \frac{(1+w)^{k-i+2m+2s}}{w^{2m+2s+1}} = \\ &= \mathbf{res}_{vw} \frac{(1+v)^{m+2s}}{v^{m+s+1}} \frac{(1+w)^{k+2m+2s}}{w^{2m+2s+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{v}{1+w} \right)^i \mathbf{res}_u \frac{(1+u)^m}{u^{i+1}}. \end{aligned}$$

Застосувавши правило заміни, отримаємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{v}{1+w} \right)^i \mathbf{res}_u \frac{(1+u)^m}{u^{i+1}} = \left(1 + \frac{v}{1+w} \right)^m = (1+v+w)^m (1+w)^{-m}.$$

Врахувавши також формулу бінома Ньютона та правило лінійності, маємо:

$$S = \mathbf{res}_{vw} (1+v+w)^m \frac{(1+v)^{m+2s}}{v^{m+s+1}} \frac{(1+w)^{k+m+2s}}{w^{2m+2s+1}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{res}_{vw} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (1+v)^i w^{m-i} \frac{(1+v)^{m+2s}}{v^{m+s+1}} \frac{(1+w)^{k+m+2s}}{w^{2m+2s+1}} = \\
&= \sum_{i=m}^{2m} \binom{m}{i-m} \mathbf{res}_w \frac{(1+w)^{k+m+2s}}{w^{i+2s+1}} \mathbf{res}_v \frac{(1+v)^{i+2s}}{v^{m+s+1}} = \\
&= \sum_{i=m}^{2m} \binom{m}{i-m} \binom{k+m+2s}{i+2s} \binom{i+2s}{s+i}.
\end{aligned}$$

Оскільки

$$\binom{n}{m} \binom{m}{p} = \binom{n}{p} \binom{n-p}{m-p},$$

то

$$S = \binom{m+k+2s}{m+s} \sum_{i=m}^{2m} \binom{m}{2m-i} \binom{k+s}{i-m+s} = \binom{m+k+s}{m+s} \sum_{i=0}^m \binom{m}{m-i} \binom{k+s}{s+1}.$$

Використавши згортку Вандермонда, отримаємо

$$\sum_{i=0}^m \binom{m}{m-i} \binom{k+s}{i+s} = \binom{m+k+s}{m+s}.$$

Що і доводить тотожність.

Зазначимо, що у випадку $s = 0$, отримаємо відому тотожність Лі Жень-чу: (або рекурсію для $q_{n,m}$)

$$\sum_{i=0}^m \binom{m}{i}^2 \binom{k+2m-i}{2m} = \binom{m+k}{k}^2.$$

А при $s = 1$ і $n = k - m$ – рекурсію для $N_{m,n}$, отриману Ріорданом, про яку йшлося на початку цього розділу.

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. Основним результатом даного дослідження є нові доведення двох комбінаторних формул, поданих у теоремах 1 та 2. Для доведення використано метод Єгоричева, що дозволяє легко обчислювати багато видів комбінаторних сум.

Список використаної літератури

1. Rodica S. Combinatorial statistics on noncrossing partitions. *J. Combin. Theory Ser. A.* 1994. Vol 66, № 2. P. 270–301.
2. Kreveras G. Sur les partitions non cro isées d'un cycle. *Descrete Math.* 1972. Vol 1, № 4. P. 333–350.
3. Toufik M., Yidong S. Identities involving Narayana polynomials and Catalan numbers. *Descrete Math.* 2009. Vol. 309, № 12. P. 4079–4088.
4. Stanley R. Invariants of finite groups and their applications to combinatorics *Bull. Amer. Math. Soc.* 1979. № 1. P. 475–511.
5. Bedratyuk L. The MAPLE package for calculating Poincaré series *arXiv.* 2011. [Електронний ресурс]
URL: <https://arxiv.org/abs/1006.5372> (дата звернення: 15.02.2019).
6. Plash N. B. Poincaré series for the algebras of joint invariants and covariants of n quadratic forms *Carpathian Math. Publ.* 2017. Vol. 9, № 1. P. 57–62.

7. Ilash N. B. Hilbert polynomials of the algebras of SL_2 -invariants. *Carpathian Math. Publ.* 2018. Vol. 10, № 2. P. 303–312.
8. Lassalle M. Narayana polynomials and Hall-Littlewood symmetric functions. *Adv. in Appl. Math.* 2012. Vol. 49, № 3. P. 239–262.
9. Zeilberger D. Six etudes in generating functions. *Int. J. Comput. Math.* 1989. Vol. 29, № 2–4. P. 201–215.
10. Alexeev N., Tikhomirov A. Singular Values Distribution of Squares of Elliptic Random Matrices and type B Narayana Polynomials. *J. Theoret. Probab.* 2017. Vol. 30, № 3. P. 1170–1190.
11. Sulanke R. A. The Narayana distribution. Special issue on lattice path combinatorics and applications. *J. Statist. Plann. Inference.* 2002. Vol. 101, № 1–2. P. 311–326.
12. Stanley R. P. Bijective proof problems, version of 18 August 2009.
URL: <http://www-math.mit.edu/~rstan/> (дата звернення: 01.11.2021).
13. Mansour T. Dyck Paths and partial Bell polynomials. *Australas. J. Combin.* 2008. Vol. 42. P. 285–297.
14. Chen R. X. F., Reidys C. M. Narayana polynomials and some generalizations. *arXiv.* 2015. [Електронний ресурс]
URL: <https://arxiv.org/abs/1411.2530v3> (дата звернення: 15.02.2019).
15. Егорычев Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. *Новосибирск: Наука*, 1977. 285 с.
16. Huang I-C. Applications of residues to combinatorial identities. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1997. Vol. 125, № 4. P. 1011–1017.
17. Huang I-C. Pseudofunctors on modules with zero dimensional support. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1995. xii+53 p.
18. Chen W. Y. C., Pang S. X. M. On the combinatorics of the Pfaff identity. *Discrete Math.* 2009. Vol. 309. P. 2190–2196.
19. Riordan J. *Combinatorial Identities*. NY : *Huntington*, 1979. 256 p.
20. Graham R. L., Riordan J. The Solution of a Certain Recurrence. *The American Mathematical Monthly.* 1966. Vol. 73, № 6. P. 604–608.
21. Székely L. Common origin of cubic binomial identities; a generalization of Surányi's proof on Le Jen Shoo's formula *J. Combin. Theory Ser. A.* 1985. Vol. 40. P. 171–174.

Ilash N. B., Samaruk N. M. Egorychev method for proving combinatorial identities involving Narayana polynomials.

We give new proofs of two combinatorial identities. Partial cases of the identities contain Narayana number and Narayana polynomials. They are used, in particular, in classical invariant theory and discrete mathematics. One of these identities is a generalization of Stanley's problem.

There are a large number of methods for proving combinatorial identities. However, there is no universal method that would prove any combinatorial identity.

In the seventies of the last century, Georgy Yegorychev developed several new methods for calculating combinatorial sums. In this article we use one of Yegorychev methods – the method of coefficients.

Keywords: combinatorics, binomial coefficient, combinatorial identity, Egorychev method, Narayana polynomials.

References

1. Rodica, S.(1994). Combinatorial statistics on noncrossing partitions. *J. Combin. Theory Ser. A*, 6(2), 270-301.
2. Kreveras, G. (1972). Sur les partitions non croisées d'un cycle. *Discrete Math.*, 1(4), 333-350.
3. Toufik, M. & Yidong, S. (2009). Identities involving Narayana polynomials and Catalan numbers. *Discrete Math.*, 309(12), 4079-4088.
4. Stanley, R. (1979). Invariants of finite groups and their applications to combinatorics. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1, 475-511.
5. Bedratyuk, L. (2011). The MAPLE package for calculating Poincaré series *arXiv*. Retrieved at: <https://arxiv.org/abs/1006.5372>.

6. Ilaş, N. B. (2017). Poincaré series for the algebras of joint invariants and covariants of n quadratic forms. *Carpathian Math. Publ.*, 9(1), 57-62.
7. Ilaş, N. B. (2018). Hilbert polynomials of the algebras of SL_2 -invariants. *Carpathian Math. Publ.*, 10(2), 303-312.
8. Lassalle, M. (2012). Narayana polynomials and Hall-Littlewood symmetric functions. *Adv. in Appl. Math.*, 49(3-5), 239-262.
9. Zeilberger, D. (1989). Six etudes in generating functions. *Int. J. Comput. Math.*, 29, 201-215.
10. Alexeev, N. & Tikhomirov, A. (2017). Singular Values Distribution of Squares of Elliptic Random Matrices and type B Narayana Polynomials. *J. Theoret. Probab.*, 30(3), 1170-1190.
11. Sulanke, R. A. (2002). The Narayana distribution. Special issue on lattice path combinatorics and applications (Vienna, 1998). *J. Statist. Plann. Inference*, 101(1-2), 311-326.
12. Stanley, R. P. Bijective proof problems, version of 18 August 2009.
Retrieved at: <http://www-math.mit.edu/~rstan/>.
13. Mansour, T. (2008). Dyck Paths and partial Bell polynomials. *Australasian Journal Of Combinatorics*, 42, 285-297.
14. Chen R. X. F. & Reidys, C. M. (2015). Narayana polynomials and some generalizations. *arXiv*, Retrieved at: <https://arxiv.org/abs/1411.2530v3> (15.02.2019).
15. Egorychev, G. P. (1977). Integralhoe predstavlenie i vychislenie kombinatornykh summ. *Novosibirsk: Nauka* [in Russian].
16. Huang, I-C. (1997). Applications of residues to combinatorial identities. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 125(4), 1011-1017.
17. Huang, I-C. (1995). Pseudofunctors on modules with zero dimensional support. *Memoirs of the American Mathematical Society*, xii+53.
18. Chen, W.Y.C. & Pang, S.X.M. (2009). On the combinatorics of the Pfaff identity, *Discrete Mathematics*, 309(8), 2190-2196.
19. Riordan, J. (1979). *Combinatorial Identities*. NY : *Huntington*.
20. Graham, R. L. & Riordan, R. (1966). The Solution of a Certain Recurrence. *The American Mathematical Monthly*, 73(6), 604-608.
21. Székely, L. (1985). Common origin of cubic binomial identities; a generalization of Surányi's proof on Le Jen Shoo's formula. *Journal of combinatorial theory*, 40, 171-174.

Одержано 31.10.2021