УДК 517.91

Р.А. МАРЧУК, Ю.І. ШАЛАПКО
Хмельницький національний університет

РОЗРАХУНОК КІНЕМАТИКИ ТРЬОХ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗАНИХ ТІЛ ТА СИЛ ТЕРТЯ, ЩО ВИНИКАЮТЬ МІЖ НИМИ ТА РУХОМОЮ ОСНОВОЮ

В даній роботі приведена методика розрахунку руху конструкції із трьох тіл, які з'єднані пружними та гальмівними елементами Двоє із тіл можуть переміщуватись під дією сил тертя, що передаються рухомою основою Така модель може бути використана, зокрема, при дослідженні впливу сейсмічних коливань на окрему будівлю, дві маси якої моделюють фундамент, а третя – саму будівлю

Методика розрахунку кінематики описаної нижче конструкції та сил тертя при змінній швидкості основи пропонується тут вперше

На рис.1 зображена конструкція схема, що включає тіла 1, 2, 3, демпфери 5, 6 та пружні елементи 7, 8. Тіла 2, 3 знаходяться на основі 4, яка переміщується прямолінійно за законом $u(t)$ із відомою в кожен момент часу t швидкістю $u'(t)$ (величини $u(t), u'(t)$ можуть бути задані будь-яким з відомих способів без проведення інтерполяції).

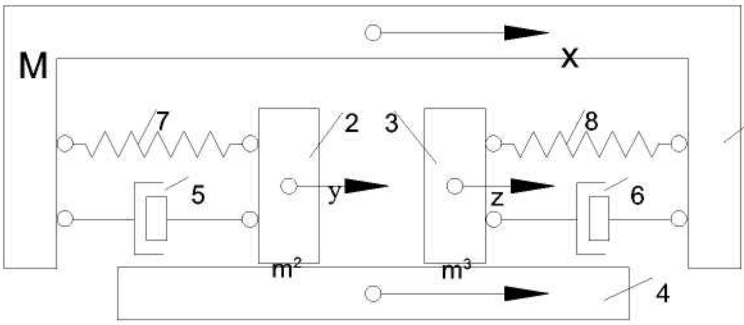

Рис.1. Схема з'єднань між трьома тілами та рухомою основою

Введемо наступні позначення: маси тіл 1, 2, 3 - M, m_2, m_3 відповідно, коефіцієнти демпферного гасіння демпферів 5, 6 позначимо μ_2, μ_3 , жорсткість пружних елементів 7, 8- δ_2, δ_3.

Виберемо вісь координат, яка співпадає з напрямком переміщення основи 4. Переміщення деталей 1, 2, 3 позначимо через x, y, z відповідно.

За другим законом Ньютона рух деталей конструкції можна описати наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} Mx'' = -\delta_2(x-y) - \delta_3(x-z) - \mu_2(x'-y') - \mu_3(x'-z'); \\ m_2 y'' = \delta_2(x-y) + \mu_2(x'-y') + F_{2T}; \\ m_3 z'' = \delta_3(x-z) + \mu_3(x'-z') + F_{3T}. \end{cases} \tag{1}$$

Тут F_{2T}, F_{3T} –сили тертя, що виникають між основою 4 та тілами 2, 3 відповідно. Очевидно, що ці сили, для яких відомі лише їх максимально допустимі значення $F_{2T}^{\max}, F_{3T}^{\max}$, будуть змінювати свою величину (а, можливо, і напрямок) в кожен момент часу t. Враховуючи, що запропонована нижче методика розрахунку полягає в тому, що весь досліджуваний годинний проміжок $[t_0, t_*]$ будемо дрібнити на дуже короткі проміжки $[t_{j-1}; t_j], (j = 1,2,...)$ однакової тривалості τ, то на кожному з таких проміжків сили F_{2T}, F_{3T} будемо вважати постійними.

Розв'язування системи (1) проведемо для одного з таких проміжків часу $[t_{j-1}; t_j]$ вважаючи сили F_{2T}, F_{3T} постійними.

Розв'язок однорідної системи рівнянь (1), при $F_{2T} = F_{3T} = 0$ шукаємо у виді:

$$x_{од} = \xi e^{kt}; \quad y_{од} = \eta e^{kt}; \quad z_{од} = \gamma e^{kt}. \tag{2}$$

Підставивши співвідношення (2) у систему диференціальних рівнянь (1) одержимо однорідну систему лінійних рівнянь, яка матиме ненульовий розв'язок у випадку, коли її визначник дорівнюватиме нулю. З цієї умови одержуємо характеристичне рівняння:

$$k^2\left(k^4 + pk^3 + qk^2 + hk + s\right) = 0, \tag{3}$$

у якому

$$p = \lambda\left(M(m_2\mu_3 + m_3\mu_2) + m_2 m_3(\mu_2 + \mu_3)\right);$$

$$q = \lambda\left(M(m_2\delta_3 + m_3\delta_2 + \mu_2\mu_3) + m_2 m_3(\delta_2 + \delta_3) + \mu_2\mu_3(m_2 + m_3)\right);$$

$$h = \lambda M_0(\delta_2\mu_3 + \delta_3\mu_2); s = \lambda\delta_2\delta_3 M_0; \quad \lambda = (M m_2 m_3)^{-1}; M_0 = M + m_2 + m_3. \tag{4}$$

Корені характеристичного рівняння, згідно Феррарі [1] будуть наступні:

$$k_{1,2} = 0{,}25\left(\sqrt{p^2 + 4(\varepsilon - q)} - p \pm \sqrt{D_1}\right), при \quad D_1 \ge 0$$

$$k_{1,2} = 0{,}25\left(\sqrt{p^2 + 4(\varepsilon - q)} - p \pm i\sqrt{-D_1}\right) = \alpha_1 + i\beta_1, при \quad D_1 < 0$$

$$k_{3,4} = -0{,}25\left(p + \sqrt{p^2 + 4(\varepsilon - q)} \pm \sqrt{D_2}\right), при \quad D_2 \ge 0$$

$$k_{3,4} = -0{,}25\left(p + \sqrt{p^2 + 4(\varepsilon - q)} \pm \sqrt{-D_2}\right) = \alpha_2 \pm i\beta_2, при \quad D_2 < 0$$

$$k_5 = k_6 = 0. \tag{5}$$

$$D_1 = \begin{cases} 2p^2 - 4(\varepsilon + q) + 8\sqrt{\varepsilon^2 - 4s} - 2p\sqrt{p^2 + 4(\varepsilon - q)}, \text{ при } p\varepsilon > 2h \\ 2p^2 - 4(\varepsilon + q) - 8\sqrt{\varepsilon^2 - 4s} - 2p\sqrt{p^2 + 4(\varepsilon - q)}, \text{при } p\varepsilon < 2h \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{cases} 2p^2 - 4(\varepsilon + q) - 8\sqrt{\varepsilon^2 - 4s} + 2p\sqrt{p^2 + 4(\varepsilon - q)}, \text{ при } p\varepsilon > 2h \\ 2p^2 - 4(\varepsilon + q) + 8\sqrt{\varepsilon^2 - 4s} + 2p\sqrt{p^2 + 4(\varepsilon - q)}, \text{при } p\varepsilon < 2h \end{cases}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3}q + \sqrt[3]{-\frac{q_0}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q_0}{2} - \sqrt{Q}}, при\, Q > 0$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3}q + 2\sqrt{-\frac{p_0}{3}}\cos\frac{\alpha}{3}, \; при \; Q < 0$$

$$Q=\left(\frac{p_0}{3}\right)^3+\left(\frac{q_0}{2}\right)^2;\ \cos\alpha=-\frac{q_0}{2\sqrt{-\left(\frac{p_0}{3}\right)^3}};\ \ p_0=ph-\frac{q^2}{3}-4s;\ \ q_0=\frac{1}{3}qph-\frac{2}{27}q^3+\frac{8}{3}qs-p^2s-h^2.$$

Загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (1) на кожному годинному інтервалі $\left[t_{j-1};t_j\right],(j=1,2,...)$ буде складатись із загального розв'язку системи однорідних рівнянь та часткового розв'язку неоднорідних рівнянь (останній шукається у вигляді поліномів другого порядку). В залежності від знаків дискримінантів D_1,D_2 загальний розв'язок матиме вигляд:

1. $D_1>0;\ D_2>0.$

$$x=C_{1j}e^{k_1t}+C_{2j}e^{k_2t}+C_{3j}e^{k_3t}+C_{4j}e^{k_4t}+C_{5j}t+C_{6j}+a_jt^2;$$

$$y=C_{1j}f_2(k_1)e^{k_1t}+C_{2j}f_3(k_2)e^{k_2t}+C_{3j}f_2(k_3)e^{k_3t}+C_{4j}f_2(k_4)e^{k_4t}+C_{5j}t+C_{6j}+b_{2j}+a_jt^2;$$

$$z=C_{1j}f_3(k_1)e^{k_1t}+C_{2j}f_3(k_2)e^{k_2t}+C_{3j}f_3(k_3)e^{k_3t}+C_{4j}f_3(k_4)e^{k_4t}+C_{5j}t+C_{6j}+b_{3j}+a_jt^2. \quad (6.1)$$

2. $D_1>0;\ D_2<0.$

$$x=C_{1j}e^{k_1t}+C_{2j}e^{k_2t}+e^{\alpha_2t}\left(C_{3j}\cos\beta_2t+C_{4j}\sin\beta_2t\right)+C_{5j}t+C_{6j}+a_jt^2;$$

$$y=C_{1j}f_2(k_1)e^{k_1t}+C_{2j}f_2(k_2)e^{k_2t}+C_{3j}\varphi_1(\eta_2,t)e^{\alpha_2t}+C_{4j}\varphi_2(\eta_2,t)e^{\alpha_2t}+C_{5j}t+C_{6j}+b_{2j}+a_jt^2;$$

$$z=C_{1j}f_3(k_1)e^{k_1t}+C_{2j}f_3(k_2)e^{k_2t}+C_{3j}\varphi_1(\gamma_2,t)e^{\alpha_2t}+C_{4j}\varphi_2(\gamma_2,t)e^{\alpha_2t}+C_{5j}t+C_{6j}+b_{3j}+a_jt^2. \quad (6.2)$$

3. $D_1<0;\ D_2>0.$

$$x=e^{\alpha_1t}\left(C_{1j}\cos\beta_1t+C_{2j}\sin\beta_1t\right)+C_{3j}e^{k_3t}+C_{4j}e^{k_4t}+C_{5j}t+C_{6j}+a_jt^2;$$

$$y=C_{1j}\varphi_1(\eta_1,t)e^{\alpha_1t}+C_{2j}\varphi_2(\eta_1,t)e^{\alpha_1t}+C_{3j}f_2(k_3)e^{k_3t}+C_{4j}f_2(k_4)e^{k_4t}+C_{5j}t+C_{6j}+b_{2j}+a_jt^2;$$

$$z=C_{1j}\varphi_1(\gamma_1,t)e^{\alpha_1t}+C_{2j}\varphi_2(\gamma_1,t)e^{\alpha_1t}+C_{3j}f_3(k_3)e^{k_3t}+C_{4j}f_3(k_4)e^{k_4t}+C_{5j}t+C_{6j}+b_{3j}+a_jt^2. \quad (6.3)$$

4. $D_1<0;\ D_2<0.$

$$x=e^{\alpha_1t}\left(C_{1j}\cos\beta_1t+C_{2j}\sin\beta_1t\right)+e^{\alpha_2t}\left(C_{3j}\cos\beta_2t+C_{4j}\sin\beta_2t\right)+C_{5j}t+C_{6j}+a_jt^2;$$

$$y=C_{1j}\varphi_1(\eta_1,t)e^{\alpha_1t}+C_{2j}\varphi_2(\eta_1,t)e^{\alpha_1t}+C_{3j}\varphi_1(\eta_2,t)e^{\alpha_2t}+C_{4j}\varphi_2(\eta_2,t)e^{\alpha_2t}+C_{5j}t+C_{6j}+b_{2j}+a_jt^2;$$

$$z=C_{1j}\varphi_1(\gamma_1,t)e^{\alpha_1t}+C_{2j}\varphi_2(\gamma_1,t)e^{\alpha_1t}+C_{3j}\varphi_3(\gamma_2,t)e^{\alpha_2t}+C_{4j}\varphi_2(\gamma_2,t)e^{\alpha_2t}+C_{5j}t+C_{6j}+b_{3j}+a_jt^2. \quad (6.4)$$

Тут позначено:

$$a_j=\frac{F_{2T,j-1}+F_{3T,j-1}}{2M_0};\ F_{2T,j-1}=F_{2T}\Big|_{t=t_{j-1}};\ b_{2j}=\frac{F_{2T,j-1}(M+m_3)-F_{3T,j-1}m_2}{M_0\delta_2};\ F_{3T,j-1}=F_{3T}\Big|_{t=t_{j-1}};$$

$$b_{3j}=\frac{F_{3T,j-1}(M+m_2)-F_{2T,j-1}m_3}{M_0\delta_3}.\ \ f_i(k)=\frac{\delta_i+\mu_ik}{\delta_i+\mu_ik+m_ik^2};\ \ (i=2,3) \quad (7)$$

$$\varphi_1(\eta_i,t)=\eta_{i\partial}\cos\beta_it-\eta_{iy}\sin\beta_it;\ \ \varphi_2(\eta_i,t)=\eta_{iy}\cos\beta_it+\eta_{i\partial}\sin\beta_it;$$

$$\varphi_1(\gamma_i,t)=\gamma_{i\partial}\cos\beta_it-\gamma_{iy}\sin\beta_it;\ \ \varphi_2(\gamma_i,t)=\gamma_{i\partial}\sin\beta_it+\gamma_{iy}\cos\beta_it; \quad (8)$$

$$\eta_{i\partial}=\frac{(\delta_2+\mu_2\alpha_i)\left(m_2\alpha_i^2-m_2\beta_i^2+\delta_2+\mu_2\alpha_i\right)+\mu_2\beta_i^2(2m_2\alpha_i+\mu_2)}{\left(m_2\alpha_i^2-m_2\beta_i^2+\delta_2+\mu_2\alpha_i\right)^2+\beta_i^2(2m_2\alpha_i+\mu_2)^2};$$

$$\eta_{iy}=\frac{\mu_2\beta_i\left(m_2\alpha_i^2-m_2\beta_i^2+\delta_2+\mu_2\alpha_i\right)-\beta_i(\delta_2+\mu_2\alpha_i)(2m_2\alpha_i+\mu_2)}{\left(m_2\alpha_i^2-m_2\beta_i^2+\delta_2+\mu_2\alpha_i\right)^2+\beta_i^2(2m_2\alpha_i+\mu_2)^2};$$

$$\gamma_{i\partial}=\frac{(\delta_3+\mu_3\alpha_i)\left(m_3\alpha_i^2-m_3\beta_i^2+\delta_3+\mu_3\alpha_i\right)+\mu_3\beta_i^2(2m_3\alpha_i+\mu_3)}{\left(m_3\alpha_i^2-m_3\beta_i^2+\delta_3+\mu_3\alpha_i\right)^2+(2m_3\alpha_i+\mu_3)^2\beta_i^2};$$

$$\gamma_{iy} = \frac{\mu_3\beta_i\left(m_3\alpha_i^2 - m_3\beta_i^2 + \delta_3 + \mu_3\alpha_i\right) - \left(\delta_3 + \mu_3\alpha_i\right)\left(2m_3\alpha_i + \mu_3\right)\beta_i}{\left(m_3\alpha_i^2 - m_3\beta_i^2 + \delta_3 + \mu_3\alpha_i\right)^2 + \beta_i^2\left(2m_3\alpha_i + \mu_3\right)^2}; \qquad (9)$$

Швидкості тіл 1, 2, 3 легко знайти диференціюючи вирази (6) по часу t.

Постійні $C_{ij}\left(i=\overline{1,6}\right)$ знаходимо на кожному інтервалі з початкових умов, тобто із значень швидкостей і переміщень тіл 1, 2, 3 на початку кожного інтервалу, чи у кінці попереднього інтервалу. Система рівнянь для знаходження коефіцієнтів $C_{ij}\left(i=\overline{1,6}\right)$ на довільному інтервалі $\left[t_{j-1};t_j\right]$, в залежності від знаків дискримінантів D_1, D_2, матиме вигляд:

1. $D_1>0;\ D_2>0.$

$$\begin{cases}
C_{1j}e^{k_1t_{j-1}} + C_{2j}e^{k_2t_{j-1}} + C_{3j}e^{k_3t_{j-1}} + C_{4j}e^{k_4t_{j-1}} + C_{5j}t_{j-1} + C_{6j} + a_jt_{j-1}^2 = x_{j-1};\\
C_{1j}f_2(k_1)e^{k_1t_{j-1}} + C_{2j}f_2(k_2)e^{k_2t_{j-1}} + C_{3j}f_2(k_3)e^{k_3t_{j-1}} + C_{4j}f_2(k_4)e^{k_4t_{j-1}} + C_{5j}t_{j-1} +\\
+C_{6j} + b_{2j} + a_jt_{j-1}^2 = y_{j-1};\\
C_{1j}f_3(k_1)e^{k_1t_{j-1}} + C_{2j}f_3(k_2)e^{k_2t_{j-1}} + C_{3j}f_3(k_3)e^{k_3t_{j-1}} + C_{4j}f_3(k_4)e^{k_4t_{j-1}} + C_{5j}t_{j-1} +\\
+C_{6j} + b_{3j} + a_jt_{j-1}^2 = z_{j-1};\\
C_{1j}k_1e^{k_1t_{j-1}} + C_{2j}k_2e^{k_2t_{j-1}} + C_{3j}k_3e^{k_3t_{j-1}} + C_{4j}k_4e^{k_4t_{j-1}} + C_{5j} + 2a_jt_{j-1} = x'_{j-1};\\
C_{1j}f_2(k_1)k_1e^{k_1t_{j-1}} + C_{2j}f_2(k_2)k_2e^{k_2t_{j-1}} + C_{3j}f_2(k_3)k_3e^{k_3t_{j-1}} + C_{4j}f_2(k_4)k_4e^{k_4t_{j-1}} + C_{5j} + 2a_jt_{j-1} = y'_{j-1};\\
C_{1j}f_3(k_1)k_1e^{k_1t_{j-1}} + C_{2j}f_3(k_2)k_2e^{k_2t_{j-1}} + C_{3j}f_3(k_3)k_3e^{k_3t_{j-1}} + C_{4j}f_3(k_4)k_4e^{k_4t_{j-1}} + C_{5j} + 2a_jt_{j-1}^2 = z'_{j-1}.
\end{cases} \qquad (10.1)$$

2. $D_1>0;\ D_2<0.$

$$\begin{cases}
C_{1j}e^{k_1t_{j-1}} + C_{2j}e^{k_2t_{j-1}} + e^{\alpha_2t_{j-1}}\left(C_{3j}\cos\beta_2t_{j-1} + C_{4j}\sin\beta_2t_{j-1}\right) + C_{5j}t_{j-1} + C_{6j} + a_jt_{j-1}^2 = x_{j-1};\\
C_{1j}f_2(k_1)e^{k_1t_{j-1}} + C_{2j}f_2(k_2)e^{k_2t_{j-1}} + C_{3j}\varphi_1\left(\eta_2,t_{j-1}\right)e^{\alpha_2t_{j-1}} +\\
+C_{4j}\varphi_2\left(\eta_2,t_{j-1}\right)e^{\alpha_2t_{j-1}} + C_{5j}t_{j-1} + C_{6j} + b_{2j} + a_jt_{j-1}^2 = y_{j-1};\\
C_{1j}f_3(k_1)e^{k_1t_{j-1}} + C_{2j}f_3(k_2)e^{k_2t_{j-1}} + C_{3j}\varphi_1\left(\gamma_2,t_{j-1}\right)e^{\alpha_2t_{j-1}} +\\
+C_{4j}\varphi_2\left(\gamma_2,t_{j-1}\right)e^{\alpha_2t_{j-1}} + C_{5j}t_{j-1} + C_{6j} + b_{3j} + a_jt_{j-1}^2 = z_{j-1};\\
C_{1j}k_1e^{k_1t_{j-1}} + C_{2j}k_2e^{k_2t_{j-1}} + C_{3j}e^{\alpha_2t_{j-1}}\left(\alpha_2\cos\beta_2t_{j-1} - \beta_2\sin\beta_2t_{j-1}\right) +\\
+C_{4j}e^{\alpha_2t_{j-1}}\left(\alpha_2\sin\beta_2t_{j-1} + \beta_2\cos\beta_2t_{j-1}\right) + C_{5j} + 2a_jt_{j-1} = x'_{j-1};\\
C_{1j}f_2(k_1)k_1e^{k_1t_{j-1}} + C_{2j}f_2(k_2)k_2e^{k_2t_{j-1}} + C_{3j}e^{\alpha_2t_{j-1}}\left(\alpha_2\varphi_1\left(\eta_2t_{j-1}\right) +\right.\\
\left.+\varphi_1'\left(\eta_2,t_{j-1}\right)\right) + C_{4j}e^{\alpha_2t_{j-1}}\left(\alpha_2\varphi_2\left(\eta_2,t_{j-1}\right) + \varphi_2'\left(\eta_2,t_{j-1}\right)\right) + C_{5j} + 2a_jt_{j-1} = y'_{j-1};\\
C_{1j}f_3(k_1)k_1e^{k_1t_{j-1}} + C_{2j}f_3(k_2)k_2e^{k_2t_{j-1}} + C_{3j}e^{\alpha_2t_{j-1}}\left(\alpha_2\varphi_1\left(\gamma_2,t_{j-1}\right) +\right.\\
\left.+\varphi_1'\left(\gamma_2,t_{j-1}\right)\right) + C_{4j}e^{\alpha_2t_{j-1}}\left(\alpha_2\varphi_2\left(\gamma_2,t_{j-1}\right) + \varphi_2'\left(\gamma_2,t_{j-1}\right)\right) + C_{5j} + 2a_jt_{j-1} = z'_{j-1}.
\end{cases} \qquad (10.2)$$

3. $D_1<0;\ D_2>0.$

$$\left\{\begin{aligned}
&e^{\alpha_1 t_{j-1}}\left(C_{1j}\cos\beta_1 t_{j-1}+C_{2j}\sin\beta_1 t_{j-1}\right)+C_{3j}e^{k_3 t_{j-1}}+C_{4j}e^{k_4 t_{j-1}}+C_{5j}t_{j-1}+C_{6j}+a_j t_{j-1}^2=x_{j-1};\\
&C_{1j}\varphi_1(\eta_1,t_{j-1})e^{\alpha_1 t_{j-1}}+C_{2j}\varphi_2(\eta_1,t_{j-1})e^{\alpha_1 t_{j-1}}+C_{3j}f_2(k_3)e^{k_3 t_{j-1}}+\\
&+C_{4j}f_2(k_4)e^{k_4 t_{j-1}}+C_{5j}t_{j-1}+C_{6j}+b_{2j}+a_j t_{j-1}^2=y_{j-1};\\
&C_{1j}\varphi_1(\gamma_1,t_{j-1})e^{\alpha_1 t_{j-1}}+C_{2j}\varphi_2(\gamma_1,t_{j-1})e^{\alpha_1 t}+C_{3j}f_3(k_3)e^{k_3 t_{j-1}}+\\
&+C_{4j}f_3(k_4)e^{k_4 t_{j-1}}+C_{5j}t_{j-1}+C_{6j}+b_{3j}+a_j t_{j-1}^2=z_{j-1};\\
&C_{1j}e^{\alpha_1 t_{j-1}}\left(\alpha_1\cos\beta_1 t_{j-1}-\beta_1\sin\beta_1 t_{j-1}\right)+C_{2j}e^{\alpha_1 t_{j-1}}\left(\alpha_1\sin\beta_1 t_{j-1}+\right.\\
&\left.+\beta_1\cos\beta_1 t_{j-1}\right)+C_{3j}k_3e^{k_3 t_{j-1}}+C_{4j}k_4e^{k_4 t_{j-1}}+C_{5j}+2a_j t_{j-1}=x'_{j-1};\\
&C_{1j}e^{\alpha_1 t_{j-1}}\left(\alpha_1\varphi_1(\eta_1,t_{j-1})+\varphi'_1(\eta_1,t_{j-1})\right)+C_{2j}e^{\alpha_1 t_{j-1}}\left(\alpha_1\varphi_2(\eta_1,t_{j-1})+\right.\\
&\left.+\varphi_2(\eta_1,t_{j-1})\right)+C_{3j}f_2(k_3)k_3e^{k_3 t_{j-1}}+C_{4j}f_2(k_4)k_4e^{k_4 t_{j-1}}+C_{5j}+2a_j t_{j-1}=y'_{j-1};\\
&C_{1j}\left(\alpha_1\varphi_1(\gamma_1,t_{j-1})+\varphi'_1(\gamma_1,t_{j-1})\right)+C_{2j}\left(\alpha_1\varphi_2(\gamma_1,t_{j-1})+\varphi'_2(\gamma_1,t_{j-1})\right)+\\
&+C_{3j}f_3(k_3)k_3e^{k_3 t_{j-1}}+C_{4j}f_3(k_4)k_4e^{k_4 t_{j-1}}+C_{5j}+2a_j t_{j-1}=z'_{j-1}.
\end{aligned}\right. \qquad (10.3)$$

4. $D_1<0;\ D_2<0.$

$$\left\{\begin{aligned}
&e^{\alpha_1 t_{j-1}}\left(C_{1j}\cos\beta_1 t_{j-1}+C_{2j}\sin\beta_1 t_{j-1}\right)+e^{\alpha_2 t_{j-1}}\left(C_{3j}\cos\beta_2 t_{j-1}+\right.\\
&\left.+C_{4j}\sin\beta_2 t_{j-1}\right)+C_{5j}t_{j-1}+C_{6j}+a_j t_{j-1}^2=x_{j-1};\\
&C_{1j}\varphi_1(\eta_1,t_{j-1})e^{\alpha_1 t_{j-1}}+C_{2j}\varphi_2(\eta_1,t_{j-1})e^{\alpha_1 t_{j-1}}+C_{3j}\varphi_1(\eta_2,t_{j-1})e^{\alpha_2 t_{j-1}}+\\
&+C_{4j}\varphi_2(\eta_2,t_{j-1})e^{\alpha_2 t_{j-1}}+C_{5j}t_{j-1}+C_{6j}+b_{2j}+a_j t_{j-1}^2=y_{j-1};\\
&C_{1j}\varphi_1(\gamma_1,t_{j-1})e^{\alpha_1 t_{j-1}}-C_{2j}\varphi_2(\gamma_1,t_{j-1})e^{\alpha_1 t_{j-1}}+C_{3j}\varphi_1(\gamma_2,t_{j-1})e^{\alpha_2 t_{j-1}}+\\
&+C_{4j}\varphi_2(\gamma_2,t_{j-1})e^{\alpha_2 t_{j-1}}+C_{5j}t_{j-1}+C_{6j}+b_{3j}+a_j t_{j-1}^2=z_{j-1};\\
&C_{1j}e^{\alpha_1 t_{j-1}}\left(\alpha_1\cos\beta_1 t_{j-1}-\beta_1\sin\beta_1 t_{j-1}\right)+C_{2j}e^{\alpha_1 t_{j-1}}\left(\alpha_1\sin\beta_1 t_{j-1}+\right.\\
&\left.+\beta_1\cos\beta_1 t_{j-1}\right)+C_{3j}e^{\alpha_2 t_{j-1}}\left(\alpha_2\cos\beta_2 t_{j-1}-\beta_2\sin\beta_2 t_{j-1}\right)+\\
&+C_{4j}e^{\alpha_2 t_{j-1}}\left(\alpha_2\sin\beta_2 t_{j-1}+\beta_2\cos\beta_2 t_{j-1}\right)+C_{5j}+2a_j t_{j-1}=x'_{j-1};\\
&C_{1j}e^{\alpha_1 t_{j-1}}\left(\alpha_1\varphi_1(\eta_1,t_{j-1})+\varphi'_1(\eta_1,t_{j-1})\right)+C_{2j}e^{\alpha_1 t_{j-1}}\left(\alpha_1\varphi_2(\eta_1,t_{j-1})+\right.\\
&\left.+\varphi'_2(\eta_1,t_{j-1})\right)+C_{3j}e^{\alpha_2 t_{j-1}}\left(\alpha_2\varphi_1(\eta_2,t_{j-1})+\varphi'_1(\eta_2,t_{j-1})\right)+\\
&+C_{4j}e^{\alpha_2 t_{j-1}}\left(\alpha_2\varphi_2(\eta_2,t_{j-1})+\varphi'_2(\eta_2,t_{j-1})\right)+C_{5j}+2a_j t_{j-1}=y'_{j-1};\\
&C_{1j}e^{\alpha_1 t_{j-1}}\left(\alpha_1\varphi_1(\gamma_1,t_{j-1})+\varphi'_1(\gamma_1,t_{j-1})\right)+C_{2j}e^{\alpha_1 t_{j-1}}\left(\alpha_1\varphi_2(\gamma_1,t_{j-1})+\right.\\
&\left.+\varphi'_2(\gamma_1,t_{j-1})\right)+C_{3j}e^{\alpha_2 t_{j-1}}\left(\alpha_2\varphi_1(\gamma_2,t_{j-1})+\varphi'_1(\gamma_2,t_{j-1})\right)+\\
&+C_{4j}e^{\alpha_2 t_{j-1}}\left(\alpha_2\varphi_2(\gamma_2,t_{j-1})+\varphi'_2(\gamma_2,t_{j-1})\right)+C_{5j}+2a_j t_{j-1}=z'_{j-1}.
\end{aligned}\right. \qquad (10.4)$$

Тут позначено:

$x_{j-1}=x(t_{j-1});\ y_{j-1}=y(t_{j-1});\ z_{j-1}=z(t_{j-1});\ x'_{j-1}=x'(t_{j-1});\ y'_{j-1}=y'(t_{j-1});\ z'_{j-1}=z'(t_{j-1});$

$\varphi'_1(\eta_\iota,t)=-\eta_{\iota д}\beta_\iota\sin\beta_\iota t-\eta_{\iota y}\beta_\iota\cos\beta_\iota t;\ \varphi'_1(\gamma_\iota,t)=-\gamma_{\iota д}\beta_\iota\sin\beta_\iota t-\gamma_{\iota y}\beta_\iota\cos\beta_\iota t;$

$\varphi'_2(\eta_\iota,t)=\eta_{\iota д}\beta_\iota\cos\beta_\iota t-\eta_{\iota y}\beta_\iota\sin\beta_\iota t;\ \varphi'_2(\gamma_\iota,t)=\gamma_{\iota д}\beta_\iota\cos\beta_\iota t-\gamma_{\iota y}\beta_\iota\sin\beta_\iota t.$

Вказівки до програмування

1. Ввід вхідних даних: початкових значень: $x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$; фізичних параметрів конструкції: $M, m_2, m_3, \delta_2, \delta_3, \mu_2, \mu_3, u(t)$; інтервал часу τ та максимальний час t_*, до якого проводиться розрахунок.

2. Обчислюємо корені характеристичного рівняння k_1, k_2, k_3, k_4, якщо вони дійсні, або, у випадку комплексних коренів – $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ за формулами (5).

3. Організовуємо цикл по часу за формулою: $t_j = \tau\, j \quad (j = 1, 2, ...)$

4. Знаходимо значення $u(t_j), u'(t_j)$, $(j = 1, 2, ...)$.

5. Силам тертя F_{2T}, F_{3T} присвоюємо максимальні значення, які вони можуть приймати при відповідних відносних швидкостях деталей 2, 3:

$$F_{2T} = F_{2T}^{(\max)}; F_{3T} = F_{3T}^{(\max)}$$

6. Розв'язуємо лінійну систему рівнянь (10) відносно невідомих коефіцієнтів $C_{ij}\ (i = \overline{1,6})$.

7. Знаходимо розв'язки $x_j = x(t_j), y_j = y(t_j), z_j = z(t_j)$ із виразів (6), в які необхідно підставити одержані коефіцієнти C_{ij}.

8. Знаходимо швидкості деталей x'_j, y'_j, z'_j із виразів (6), диференціюючи їх по часу.

9. Робимо перевірку на проковзування деталей 2 і 3 по основі 4. Для цього порівнюємо швидкості y'_{j-1}, y'_j та z'_{j-1}, z'_j із швидкістю основи u'_{j-1}, u'_j. При проковзуванні деталей 2 і 3 по основі одержані розв'язки для переміщень та швидкостей будуть правильні. Після цього переходимо до виконання п. 11.

При відсутності проковзування хоча б між однією деталлю та основою переходимо до виконання наступного пункту 10

10. Уточнюємо сили тертя для деталей, які не проковзують по основі. Для цього поступово зменшуємо за абсолютною величиною ці сили (або одну з них, якщо інша деталь ковзає). З цією метою повторно виконуємо п.п. 6, 7, 8 до того моменту, коли швидкості деталей 2,3 дорівнюватимуть швидкості основи. Після цього переходимо до виконання наступного пункту.

11. Видаємо на друк (чи в пам'ять ЕОМ) значення $x_j, x'_j, y_j, y'_j z_j, z'_j, F_{2Tj}, F_{3Tj}$.

12. Перевіряємо умову

$$t_j < t_* \tag{a}$$

При її виконанні повертаємось до початку циклу п.3. При невиконанні умови (а) виходимо на кінець програми.

Література

1. Справочник по математике (для научных работныков и инженеров). Г.Корн, Т.Корн / Издательство "НАУКА". – Москва, 1973. – 832 с. с илл.

Надійшла 05.08.2005 р.