

ВІСЕСИМЕТРИЧНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПРУЖНОГО КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА ТА ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОГО ПІВПРОСТОРУ.

Ярецька Наталія Олександрівна,

к. ф.-м. н., доцент

Хмельницький національний університет

м. Хмельницький, Україна

massacran2@ukr.net

Вступ. Підвищення надійності і довговічності інженерних споруд і конструкцій є однією з найбільш актуальних завдань сучасного будівництва й машинобудування. Успішному вирішенню цієї проблеми в значній мірі сприяють широкі наукові дослідження в галузі механіки твердого тіла, що деформується, зокрема, при вивченні проблеми передачі навантаження в деталях машин та різноманітних будівельних конструкціях. Поява нових матеріалів, необхідність підвищення експлуатаційних якостей будівель та машин, зменшення їх ваги, збільшення термінів експлуатації, зниження вартості та досягнення економічної сумісності - все це залежить від методів розрахунку.

Стосовно проблем, що належать до контактних задач для пружних, в'язкопружних і пластичних тіл без початкових напружень в даний час отримані результати з широкого кола питань. Всі вони докладно вивчені в багатьох роботах монографічного та навчального характеру, а також відображені в численних публікаціях у періодичних виданнях. Але не дивлячись на істотні досягнення, кількість досліджень з контактної взаємодії попередньо напружених тіл є відносно невеликою. Контактна взаємодія жорстких і пружних штампів з попередньо напруженими тілами представлена у працях академіка НАН України Гузя О.М. та його учнів: Бабича С.Ю.,

Рудницького В. Б., Григоренко П. П., Глухова Ю. П., Дихтярука Н. Н., Примаченко О. В., а також і автора даної статті.

Мета роботи. У даній роботі ставиться за мету представити результат дослідження вісесиметричної контактної задачі про тиск пружного кільцевого штампа з початковими напруженнями на попередньо напружений півпростір без урахування сил тертя в межах лінеаризованої теорії пружності. Дослідження виконане в загальному вигляді для стислих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Матеріали та методи. Дослідження проведено в координатах початкового деформованого стану Oy_i , що пов'язані з лагранжевими координатами співвідношеннями $y_i = \lambda_i x_i$ ($i = \overline{1,3}$), де λ_i – коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану.

Прийнято, що початкові стани у півпросторі та штампі - однорідні та рівні, а пружні потенціали - двічі неперервно-диференційовані функції алгебраїчних інваріантів тензора деформації Гріна. Крім того, дія штампа викликає в півпросторі мале збурення основного напружено-деформованого стану, для якого виконуються умови $S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0$; $S_0^{33} = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$.

Нехай скінченний попередньо напружений кільцевий штамп з плоскою основою та висотою H , геометрична вісь симетрії якого збігається з віссю y_3 циліндричної системи координат (r, θ, y_3) , спрямована всередину півпростору (рис.1) і тисне на півпростір із силою P , після виникнення там початкового деформованого стану. R_1, R_2 – відповідно внутрішній і зовнішній радіуси штампа. Будемо вважати, що зовнішнє навантаження прикладене тільки до вільного торця пружного штампа. Під дією навантаження всі точки торця штампа переміщуються в напрямку осі симетрії y_3 на одну і ту ж величину ε . Будемо вважати, що поверхні поза області контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а в зоні контакту переміщення і напруження - неперервні.

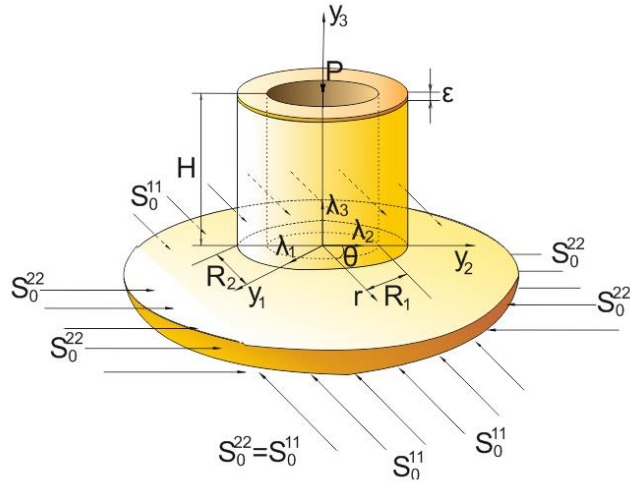


Рис. 1. Пружний кільцевий штамп з початковими напруженнями, що тисне на попередньо напружений півпростір.

Матеріали контактуючих тіл, будемо вважати ізотропним стисливими або нестисливими з довільною структурою пружного потенціалу. У випадку ортотропних матеріалів приймається, що пружно-еквівалентні напрямки збігаються з напрямками осей координат (y_1, y_2, y_3) .

У системі циліндричних координат (r, θ, z_i) , де $z_i = v_i^{-1} y_3$, $v_i = \sqrt{n_i}$, $(i=1,2)$, n_1, n_2 – корені характеристичного рівняння представленого у монографіях академіка НАН України Гузя О.М.. Такій постановці задачі відповідають граничні умови:

$$\begin{aligned}
 U_3^{(1)} &= -\varepsilon, \quad Q_{3r}^{(1)} = 0 \quad (R_1 < r < R_2), \\
 U_3^{(1)} &= U_3^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{33}^{(1)} = \tilde{Q}_{33}^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (R_1 < r < R_2), \\
 \tilde{Q}_{33}^{(2)} &= 0, \quad U_3^{(2)} = 0, \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 < r < R_1 \quad R_2 < r < \infty), \\
 \tilde{Q}_{rr}^{(1)} &= 0, \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq z_1 \leq H v_1^{-1}), \\
 \tilde{Q}_{rr}^{(1)} &= 0, \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq z_1 \leq H v_1^{-1}), \quad P = -2\pi \int_{R_1}^{R_2} r Q_{33}^{(2)}(0, r) dr
 \end{aligned} \tag{1}$$

В умовах (1) верхнім індексом «(1)» позначено величини, що відносяться до кільцевого штампа, а величини із верхнім індексом «(2)» – до півпростору.

Напружено-деформований стан у попередньо напруженому кільцевому штампі та півпросторі для стислих (нестисливих) тіл та рівних коренів характеристичного рівняння обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned}
 Q_{33}^{(1)} = & C_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 12 \tilde{C}_0^{(k)} \left[(1+m_1) l_1 (v_1^{-1} + z_1) + (1+m_2) l_2 z_1 \right] + \gamma_k^2 v_1^2 I_0(\gamma_k v_1 r) \left[(1+m_1) l_1 \gamma_k (\tilde{A}_k + \right. \right. \\
 & \left. \left. + v_1 z_1 \tilde{B}_k) \cos(\gamma_k v_1 z_1) + (1+m_2) l_2 \tilde{B}_k \sin(\gamma_k v_1 z_1) \right] - \right. \\
 & \left. - \alpha_k^2 J_0(\alpha_k r) \left[(1+m_1) l_1 \alpha_k v_1^{-1} (\tilde{S}_4(\alpha_k z_1) + v_1 z_1 \tilde{S}_5(\alpha_k z_1)) + (1+m_2) l_2 \tilde{S}_3(\alpha_k z_1) \right] \right\} N_k, \\
 Q_{33}^{(2)} = & \frac{\omega_3}{R_2 - R_1} \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta r) d\eta,
 \end{aligned} \tag{2}$$

де $C_{44}, \tilde{C}_0^{(k)}, m_1, m_2, l_1, l_2, \tilde{A}_k, \tilde{B}_k, \gamma_k, \omega_3$ – деякі коефіцієнти, що залежать від пружних характеристик матеріалу, коренів характеристичного рівняння та висоти штампа, N_k – невідомі величини, $F(\eta)$ – шукана функція, $J_\nu(x)$, $I_\nu(x)$ – функції Бесселя дійсного та уявного аргументу, відповідно.

Для нерівних коренів характеристичного рівняння напружено-деформований стан штампа та півпростору визначають аналогічно до праць академіка НАН України Гузя О.М. та його учнів.

Результати та обговорення. Використовуючи розв’язки попередньо напруженого кільцевого штампа (2) та граничні умови (1), знаходимо власні значення задачі для випадку рівних коренів характеристичного рівняння:

$$\gamma_k = \frac{\pi(2k+1)}{H}, \quad \alpha_k = \frac{\mu_k}{R} \quad (J_1(\mu_k) = 0).$$

Задовільнення граничних умов (1) приводить поставлену задачу до парних інтегральних рівнянь, які зводяться до інтегрального рівняння Фредгольма II роду. У результаті, розв’язки поставленої задачі представлені у вигляді нескінченних рядів, коефіцієнти яких визначаються з нескінченної квазірегулярної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau_{kn} N_n = \beta_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \tag{3}$$

де β_k, τ_{kn} – коефіцієнти системи, що залежать від структури пружного потенціалу, висоти кільцевого штампа та коренів характеристичного рівняння.

Визначивши невідомі величини N_i ($i = 0,1,2, \dots$) із системи (3), можна обчислити переміщення і напруження як у пружному кільцевому штампі, так і в пружному півпросторі.

В роботі проведено чисельний розв'язок системи (3) методом редукції для гармонічного потенціала при таких значеннях параметрів: $R_1 = 1$ см, $R_2 = 2$ см, $\varepsilon = 10^{-5}$, $\lambda_1 = 0.7; 0.8; 0.9; 1; 1.1; 1.2; 1.3$, де $0 \leq \rho \leq 1$, $\rho = (r - R_1)(R_2 - R_1)^{-1}$. Алгоритм розв'язку реалізовано у вигляді програми в пакеті Maple 17.

На рис. 2 у безрозмірних координатах представлений розподіл нормального контактного напруження $\frac{1}{\rho} Q_{33}^{(1)}$ під пружним кільцевим штампом у зоні контакту.

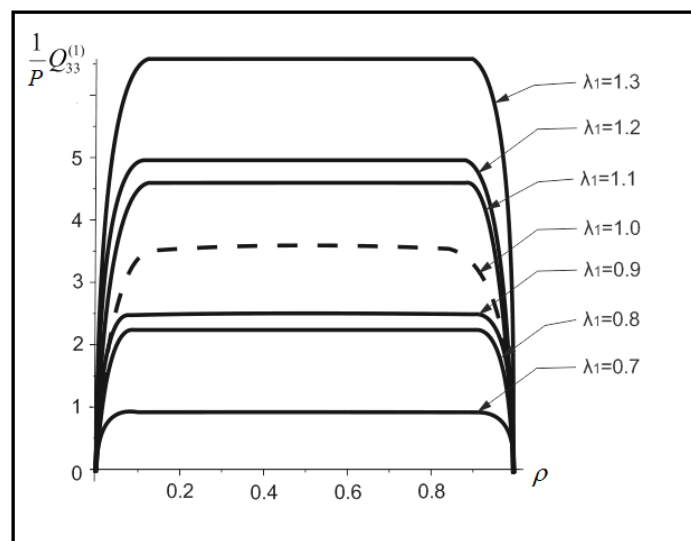


Рис. 2. Нормальні контактні напруження

Висновки. На підставі чисельного аналізу можна стверджувати, що при постійному зовнішньому навантаженні початкові напруження істотно впливають на основні контактні характеристики взаємодії тіл. Крім цього, вплив початкових напружень полягає в тому, що початкові напруження у півпросторі приводять у випадку стиску до зменшення напружень, а при розтягу – до їх збільшення.