**XVI Міжнародна науковопрактична
конференція «Integration of scientific solutions
and methods into practice», 24-26 квітня 2023 р.,
Париж, Франція**

Фізико-математичні науки

Дослідження математичної моделі контакту двох попередньо напружених співвісних циліндрів з попередньо напруженим шаром

Ярецька Наталія Олександрівна,
к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри вищої
математики та комп'ютерних застосувань
Хмельницький національний університет
yaretskano@khmnu.edu.ua
Поплавський Денис Юрійович
ст. гр. КІ2-21-2, Хмельницький
національний університет
denys.poplavskiy21@gmail.com

Математичне моделювання та дослідження контактної взаємодії пружних твердих тіл, представлене досить актуальною проблемою. Враховуючи те, що одним із найбільш поширених на практиці способів передачі зовнішніх навантажень є контактна взаємодія, то актуальність даної проблеми очевидна і слідує з розвитку фундаментальних досліджень механіки твердого деформованого тіла та з прикладних галузей сучасної інженерії. Особливо широке застосування теорія контактних задач знаходить у машинобудуванні та будівництві, оскільки передача зусиль у вузлах і механізмах машин, а також колон будівель супроводжується контактом деталей в конструкціях між собою. Методи, що розвиваються в теорії контактних задач, дозволяють знайти розподіл контактних характеристик у місцях дотику тіл, вивчити концентрацію напруження та розробити критерії його зниження, а також досліджувати напружено-деформований стан у тілах тощо.

Проблематика задач, що стосується контакту пружних, в'язко пружних і пластичних тіл без початкових напружень, у даний час, висвітлена з широкого кола питань. Усі вони детально вивчені та висвітлені у багатьох працях монографічного та навчального характеру [1], а також відображені у багатьох публікаціях періодичних наукових видань.

Детальний огляд задач, що враховують початкові напруження представлені у роботах [2, 3]. Причому у перших роботах з контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями розглядаються або пружні потенціали конкретної структури [4], або задача ставиться в загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл з потенціалом довільної структури на основі лінеаризованої теорії пружності [2,3,5-7].

У даній роботі з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності представлена та досліджена математична модель вісесиметричного контакту ідентичних попередньо напружених співвісних циліндричних штампів з плоскою основою на шар з початковими напруженнями без урахування сил тертя для рівних коренів характеристичного рівняння [2, 3]. Дослідження виконано в загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Вважаємо, що початкові напружено-деформовані стани в штампах і шарі є однорідними і рівними. Усі величини, що відносяться до верхнього та нижнього циліндричного штампу позначаються верхнім індексом (1) та (2), відповідно. Величини, що відносяться до пружного шару позначаються без верхнього індексу. Аналогічна контактна задача у класичному випадку, тобто без початкових напружень розглянута в [1].

Припустимо, що початкові напружено-деформовані стани у ідентичних співвісних циліндрах та шарі рівні та однорідні, тобто виконуються умови:

$$y_k = \lambda_k x_k, \quad \lambda_k = const,$$

$$y_k = u_{0k} + x_k, \quad u_{0k} = \delta_{ik}(\lambda_k - 1)\frac{y_i}{\lambda_i}, \quad (k, i = 1,2,3)$$

де λ_k - коефіцієнти видовження вздовж координатних осей y_k, δ_{ik} - символи Кронекера.

Будемо розрізняти три стани тіл з початковими напруженнями: 1) природний, коли у ньому відсутні напруження; 2) початковий стан; 3) збурений стан. Усі величини третього стану складаються з суми відповідних величин другого стану та збурень. Вважаючи збурення набагато меншими за величини початкового стану, дослідження проводимо в рамках лінеаризованої теорії пружності [2,3].

Нехай у пружний шар з початковими напруженнями втискаються два ідентичних співвісних пружних циліндричних штампа з початковими напруженнями. Товщину шару після виникнення в ньому початкового напруженого стану будемо позначати через $2h = 2\lambda_1 h$, де λ_1 – коефіцієнти видовження, h - товщина шару у природному стані (при відсутності початкових напружень у шарі); $R^{(i)}, H^{(1)} (i = 1,2)$- радіус та висоти пружних циліндричних штампів, відповідно. Будемо вважати, що зовнішні навантаження прикладені тільки до вільних торців пружних штампів так, що їхні точки зміщуються в напрямку осі Oy_3 на сталі величини $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}$, відносно площини $y_3 = 0$, а поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішнього навантаження, дія сил тертя в зоні контакту відсутня (дотичні напруження дорівнюють нулю).

Для дослідження введемо лагранжеві координати (x_1, x_2, x_3), які в початковому стані співпадають з декартовими (y_1, y_2, y_3).

Даній постановці відповідають наступні граничні умови:

1) на торцях пружних штампів:

$$u_3^{(i)} = (-1)^i \varepsilon^{(i)}; \quad Q_{3r}^{(i)} = 0; \quad \forall\ r \in [0, R^{(i)}], \quad y_3 = (-1)^{i+1} h + (-1)^{i+1} H^{(i)}, \quad (i = \overline{1,2}) \tag{1}$$

2) на бічній поверхні пружних штампів:

$$Q_{rr}^{(i)} = 0; \quad Q_{3r}^{(i)} = 0; \quad \forall\ y_3 \in [0, H^{(i)}], \quad r = R^{(i)}, \quad (i = \overline{1,2}) \tag{2}$$

3) на межі пружного шару в області контакту:

$$U_3 = U_3^{(i)}; \quad Q_{33} = Q_{33}^{(i)}; \quad Q_{3r} = Q_{3r}^{(i)} \quad \forall\ r \in [0, R^{(i)}], \quad y_3 = (-1)^i h, \quad (i = \overline{1,2}) \tag{3}$$

4) на межі пружного шару поза областю контакту:

$$Q_{33} = Q_{3r} = 0, \ \forall\ r \in [r, +\infty], \ y_3 = \pm h \tag{4}$$

Умови рівноваги мають вигляд:

$$\int_0^{R^{(1)}} \rho [Q_{33}]_{y_3 = h} d\rho - \int_0^{R^{(2)}} \rho [Q_{33}]_{y_3 = -h} d\rho = 0 \tag{5}$$

А рівнодіюча зовнішніх сил визначаються рівністю:

$$P = -2\pi \int_0^{R^{(1)}} \rho [Q_{33}]_{y_3 = h} d\rho = -2\pi \int_0^{R^{(2)}} \rho [Q_{33}]_{y_3 = -h} d\rho \tag{6}$$

А для завершення постановки граничних умов, припустимо, що напруження і переміщення у шарі при віддалені від області контакту зменшуються, а на межі контакту шару та штампів – необмежені.

Для визначення напружено-деформованого стану в ідентичних пружних циліндричних штампах з початковими напруженнями використовуємо лінеаризовані рівняння [2, 3]. Загальний розв'язок якого має вигляд:

$$\tilde{\chi}^{(i)} = \tilde{\chi}_1^{(i)} + y_3 \tilde{\chi}_2^{(i)}, \ (i = \overline{1,2}).$$

де

$$\chi_1^{(i)} = (1 + y_3) \left\{ A_0^{(i)} \frac{y_3}{\sqrt{n_1}} + C_0^{(i)} \frac{y_3}{\sqrt{n_1}} \left(3r^2 - 2 \left(\frac{y_3}{\sqrt{n_1}} \right)^2 \right) \right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(A_k^{(i)} + y_3 B_k^{(i)} \right) I_0 \left(\gamma_k^{(i)} \sqrt{n_1} r \right) \cdot \overline{K}_1^{(i)} \left(\gamma_k^{(i)} y_3 \right) + J_0 \left(\alpha_k^{(i)} r \right) \left\{ \overline{K}_2^{(i)} \left(\alpha_k^{(i)} \frac{y_3}{\sqrt{n_1}} \right) + y_3 \overline{K}_3^{(i)} \left(\alpha_k^{(i)} \frac{y_3}{\sqrt{n_1}} \right) \right\} \right] \ (i = \overline{1,2})$$

З цих рівнянь виразимо співвідношення для компонентів вектора переміщення та тензора напружень для стисливих і нестисливих тіл у випадку рівних коренів $n_1 = n_2$ визначального рівняння [2]:

$$U_r^{(i)}=-6C_0^{(i)}r\frac{1}{\sqrt{n_1}}(1+2y_3)-\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\gamma_k^{(i)}\sqrt{n_1}I_1\left(\gamma_k^{(i)}\sqrt{n_1}r\right)\cdot\left[\left(A_k^{(i)}+y_3B_k^{(i)}\right)\gamma_k\overline{K}_6^{(i)}\left(\gamma_k^{(i)}y_3\right)+B_k^{(i)}\overline{K}_1^{(i)}\left(\gamma_k^{(i)}y_3\right)\right]-$$

$$-\alpha_kJ_1\left(\alpha_k^{(i)}r\right)\left[\alpha_k^{(i)}\frac{1}{\sqrt{n_1}}\left[\overline{K}_4^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)}\frac{y_3}{\sqrt{n_1}}\right)+y_3\overline{K}_5^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)}\frac{y_3}{\sqrt{n_1}}\right)\right]-\overline{K}_3^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)}\frac{y_3}{\sqrt{n_1}}\right)\right]\Big\},\ (i=\overline{1,2})$$

$$U_3^{(i)}=12C_0^{(i)}m_1y_3\frac{1}{n_1\sqrt{n_1}}(1+y_3)+(1-m_2)\frac{1}{\sqrt{n_1}}\left[A_0^{(i)}+3C_0^{(i)}(r-2y_3^2\frac{1}{n_1})\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^{(i)}I_0\left(\gamma_k^{(i)}\sqrt{n_1}r\right)\cdot$$

$$\left[\left(A_k^{(i)}+y_3B_k^{(i)}\right)m_1\gamma_k^{(i)}\overline{K}_1^{(i)}\left(\gamma_k^{(i)}y_3\right)+(1-m_2)B_k^{(i)}\overline{K}_6^{(i)}\left(\gamma_k^{(i)}y_3\right)\right]-\alpha_k^{(i)}\frac{1}{n_1}J_0\left(\alpha_k^{(i)}r\right)\Big\{m_1\alpha_k^{(i)}\left[\overline{K}_2^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)}\frac{y_3}{\sqrt{n_1}}\right)+\right.$$

$$\left.+y_3\overline{K}_3^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)}\frac{y_3}{\sqrt{n_1}}\right)\right]+(1-m_2)\sqrt{n_1}\overline{K}_5^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)}\frac{y_3}{\sqrt{n_1}}\right)\Big\},\ (i=\overline{1,2})\qquad(7)$$

$$Q_{33}^{(i)}=C_{44}\Big\langle 12C_0^{(i)}\frac{1}{\sqrt{n_1}}\left[(1+m_1)l_1(1+y_3)+(1+m_2)l_2y_3\right]+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{(\gamma_k^{(i)})^2n_1I_0\left(\gamma_k^{(i)}\sqrt{n_1}r\right)\cdot\left[(1+m_1)l_1\gamma_k^{(i)}\left(A_k^{(i)}+y_3B_k^{(i)}\right)\overline{K}_6^{(i)}\left(\gamma_k^{(i)}y_3\right)+(1+m_2)l_2B_k^{(i)}\overline{K}_1^{(i)}\left(\gamma_k^{(i)}y_3\right)\right]-$$

$$-(\alpha_k^{(i)})^2J_0(\alpha_n^{(i)}r)\frac{1}{\sqrt{n_1}}\left[(1+m_1)l_1\alpha_k^{(i)}\left\{\overline{K}_4^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)}\frac{y_3}{\sqrt{n_1}}\right)+y_3\overline{K}_5^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)}\frac{y_3}{\sqrt{n_1}}\right)\right\}+\sqrt{n_1}(1+m_2)l_2\overline{K}_3^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)}\frac{y_3}{\sqrt{n_1}}\right)\right]\Big\}\Big\rangle$$

$$Q_{3r}^{(i)}=C_{44}\Big\langle-6C_0^{(i)}(1+m_2)\frac{r}{\sqrt{n_1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{(\gamma_k^{(i)})^2\sqrt{n_1}I_1\left(\gamma_k^{(i)}\sqrt{n_1}r\right)\cdot\left[(1+m_1)\gamma_k^{(i)}\left(A_k^{(i)}+y_3B_k^{(i)}\right)\overline{K}_2^{(i)}\left(\gamma_k^{(i)}y_3\right)-\right.$$

$$-(1+m_2)B_k^{(i)}\overline{K}_6^{(i)}\left(\gamma_k^{(i)}y_3\right)+\frac{(\alpha_k^{(i)})^2}{n_1}J_1\left(\alpha_k^{(i)}r\right)\left[\overline{K}_2^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)}\frac{y_3}{\sqrt{n_1}}\right)+y_3\overline{K}_3^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)}\frac{y_3}{\sqrt{n_1}}\right)\right]+$$

$$\left.+\sqrt{n_1}(1+m_2)\overline{K}_5^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)}\frac{y_3}{\sqrt{n_1}}\right)\right]\Big\}\Big\rangle\quad(i=\overline{1,2})$$

де $\overline{K}_1^{(i)}(x)=C_k^{(i)}\sin(x)+D_k^{(i)}\cos(x)$, $\overline{K}_2^{(i)}(x)=E_k^{(i)}sh(x)+F_k^{(i)}ch(x)$, $(i=\overline{1,2})$,

$\overline{K}_3^{(i)}(x)=N_k^{(i)}sh(x)+M_k^{(i)}ch(x)$, $\overline{K}_4^{(i)}(x)=E_k^{(i)}ch(x)+F_k^{(i)}ch(x)$, $(i=\overline{1,2})$,

$\overline{K}_5^{(i)}(x)=N_k^{(i)}ch(x)+M_k^{(i)}sh(x)$, $\overline{K}_6^{(i)}(x)=C_k^{(i)}\cos(x)+D_k^{(i)}\sin(x)$, $(i=\overline{1,2})$,

$J_\nu(x)$, $I_\nu(x)$ – функції Бесселя дійсного та уявного аргументу, відповідно; значення $D_{44},C_{44},l_1,l_2,m_1,m_2,s_0$ визначаються із [2, 3] та визначають початковий напружений стан у контактуючих пружних тілах.

Невідомі коефіцієнти $A_0^{(i)}$, $C_0^{(i)}$, $B_k^{(i)}$, $C_k^{(i)}$, $D_k^{(i)}$, $E_k^{(i)}$, $F_k^{(i)}$, $N_k^{(i)}$, $M_k^{(i)}$ $(i=\overline{1,2})$ будемо визначати, спираючись на значення наступних інтегралів:

$$\int_0^1x^3J_0(\lambda_1x)dx=\frac{2}{\lambda_1^2}J_0(\lambda_1),\ \int_0^1xI_0(\lambda_1x)dx=\int_0^1xJ_0(\lambda_1x)dx=0,\ \int_0^1xJ_0(\lambda_1x)I_0(\lambda_2x)dx=\frac{\lambda_2I_1(\lambda_2)J_0(\lambda_1)}{\lambda_1^2+\lambda_2^2},$$

$$\int_0^1 x^2 J_0(\lambda_1 x) I_0(\lambda_2 x) dx = \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2} J_0(\lambda_1)\left(I_0(\lambda_2) - \frac{2\lambda_2 I_1(\lambda_2)}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\right), \ \int_0^1 x J_0(\lambda_1 x) I_0(\lambda_2 x) dx = \begin{cases} 0, \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ 0.5 J_0^2(\lambda_1), \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

Враховуючи розв'язок для штампа (7) та задовольняючи граничні умови (1) – (6), знаходимо власні значення задачі (1) – (6) для $n_1 = n_2$::

$$\gamma_k^{(i)} = \frac{2\pi k}{H^{(i)}} \ , \ (i = \overline{1,2}; k = 0,1,2,...) \tag{8}$$

Для пружного шару компоненти напружено-деформованого стану будемо визначати через гармонійні функції і за допомогою інтегралів Хенкеля:

$$U_3 = \theta_3 \left[\int_0^\infty f(\xi)\xi^{-1} J_0(\xi\rho) d\xi - \int_0^\infty f(\xi)\xi^{-1} F\left(\xi h^{(i)}\right) J_0(\xi\rho) d\xi \right], \quad Q_{33} = \theta_1 \int_0^\infty f(\xi) J_0(\xi\rho) d\xi,$$

де $\theta_1 = c_{44} l_1 (1 + m_1)\tilde{k}$, $h^{(i)} = \dfrac{h}{R^{(i)}}$, $\theta_3 = \dfrac{m_1(s_1 - s_0)}{\sqrt{n_1}}$, $\tilde{k} = s_0 - s_1$, $f(\xi) = \dfrac{\xi^3 B_2}{\left(R^{(i)}\right)^3 (1 - F(\xi))}$.

Вид функції $F(\xi)$ визначимо із граничних умов (1) - (6):

$$F\left(\xi h^{(i)}\right) = \frac{\frac{1}{\tilde{k}} \frac{2h^{(i)}\xi}{\sqrt{n_1}} - e^{-\frac{2h^{(i)}\xi}{\sqrt{n_1}}} + 1}{sh\left(\frac{2h^{(i)}\xi}{\sqrt{n_1}}\right)} G\left(\frac{2h^{(i)}\xi}{\sqrt{n_1}}\right), \ \left(i = \overline{1,2}\right), \quad G\left(\frac{2h^{(i)}\xi}{\sqrt{n_1}}\right) = \left(1 + \frac{2\xi h^{(i)}}{\sqrt{n_1}\tilde{k} sh\left(\frac{2h^{(i)}\xi}{\sqrt{n_1}}\right)}\right)^{-1}, \ \left(i = \overline{1,2}\right)$$

Далі з умов неперервності напружень та переміщень у зоні контакту та поза нею (3), задача зводиться до системи парних інтегральних рівнянь. Після чого за допомогою формул звернення отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма II роду відносно $F(\xi)$. Розв'язок якого будемо шукати методом послідовних наближень [2]. Відмітимо, що процес послідовних наближень збіжний при $h > 1$ та $\lambda_1 > \lambda_{kp}$, враховуючи дослідження проведені в [3].

Використовуючи граничні умови на торці пружних штампів та ортогональність бесселевих функцій отримаємо умови для нерівних коренів визначального рівняння [2], з яких отримаємо нескінченну квазірегулярну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\vartheta_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{kn} \chi_n = \varpi_k \quad (k = 0,1,2,..) \tag{9}$$

де χ_i (i=0,1,2,..) – шукані сталі через які виражаються компоненти напружень і переміщень пружних контактуючих тіл з початковими напруженнями.

Визначивши невідомі сталі χ_i $(i = 0,1,2,..)$ з (9), можна обчислити силу P, переміщення і напруження у пружних штампах та шарі з початковими напруженнями.

Для реалізації розв'язку було розроблено алгоритм числового обчислення компонентів напружено - деформованого стану контактуючих тіл з початковими напруженнями.

Числова реалізація методу дала змогу графічно відобразити вплив початкових напружень на закон розподілу контактних характеристик попередньо напружених тіл для гармонічного потенціалу.

Отже, було виявлено, що початкові напруження при стиску призводять до зменшення сили напружень, а при розтягу – до їх збільшення. Для переміщень – навпаки. Отже, вплив початкових напружень є суттєвим для контактуючих тіл і має враховуватися при розрахунках на міцність у деталях конструкцій.

Список літератури

1. Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов: Вища шк. 1981. 136 с.

2. Yaretska N. O. Mathematical model and solution of spatial contact problem for prestressed cylindrical punch and elastic layer./ Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences**:** Collective monograph. - Riga, Latvia : “Baltija Publishing”, 2022. – Pp. 261-295. (300 с.) https://doi.org/10.30525/978-9934-26-200-5-10

3. *Guz A.N*. On General List of References to the Monograph “Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics”. // International Applied Mechanics. – 2022. – **58**, №1. – Pp. 1-29. https://doi.org/10.1007/s10778-022-01131-8

4. *Kurashige M.* Circular crack problem for initially stressed neo-Hookean solid // ZAMM. - 1969. - **49**, №8.- Pp. 671-678

5. Babych, S.Y., Yarets’ka, N.O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *Int Appl Mech.* 2021. Vol. 57. №3. P. 297-305. https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7

6. Yaretskaya N. A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses /N.A. Yaretskaya// International Applied Mechanics. – July 2014. – Volume 50, Issue 4. – pp. 378 –388. https://doi.org/10.1007/s10778-014-0641-y.

7. Yaretskaya N. F. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses /N.F. Yaretskaya// International Applied Mechanics. – October, 2018. – Volume 54, Issue 5. – pp. 539 –543.