Отже, в області $\Pi^2_{(0,T]}$ абсолютною мажорантою для ряду (9) є ряд

$$C + C\sum_{i=1}^{\infty}(LK(T))^i. \tag{10}$$

Якщо взяти $T = T_0$, де $LK(T_0) < 1$, то ряд (10) є збіжним, а це означає, що функціональний ряд (9) буде рівномірно збіжним в $\Pi^2_{(0,T]}$. Оскільки члени рівномірно збіжного ряду (9) є неперервними функціями в $\Pi^2_{(0,T]}$ то і його сума u є неперервною функцією в даній області.

Використовуючи методику з [2] і результати з [1], можна довести. $\Pi^2_{(0,T]}$:

1) u задовольняє інтегральне рівняння (7);

2) існують похідні $D^j_x u$, $j = 1, 2$, які неперервні і обмежені;

3) функція u є розв'язком задачі (1)-(3).

1. Пасічник Г.С., Івасишен С.Д. Деякі теореми типу Ліувілля для розв'язків одного класу параболічних рівнянь із зростаючими коефіцієнтами / Чернівецьк. ун-т.- Чернівці, 1996.- 29с.- Деп. в ДНТБ України 08.04.96.- N903- Ук96.

2. Baranski Feliks, Bajson Tadeusz. On the nonlinear diffusion problem // Zesh. nauk PKrakow. Podst. nauki techn.- 1982.- N18.- P.25-31.

УДК 517.91:532.2

М.П.Ленюк, Г.І.Міхалевська

Гібридні інтегральні перетворення Фур'є-Канторовича-Лєбєдєва на полярній осі [1]

(м.Чернівці)

Методом дельта-подібних послідовностей запроваджено скінченні гібридні інтегральні перетворення Фур'є-Канторовича-Лєбєдєва на полярній осі з точкою спряження.

Методом дельта образных последовательностей введены конечные гибридные интегральные преобразования Фурье-Канторовича-Лебедева на полярной оси с точкой сопряжения.

Бібліогр.: 5 назв.

Побудуємо методом дельта-подібних послідовностей інтегральні перетворення, породжені на множині

$$I_1^+ = \{r: \quad r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, \infty); \quad R_0 > 0\}$$

гібридним диференціальним оператором

$$\mathfrak{M}_\alpha = a_1^2\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\frac{d^2}{dr^2} + a_2^2\theta(r-R_1)B_\alpha.$$

Тут $a_j^2 > 0, \theta(x)$ - одинична функція Хевісайда,

$$B_\alpha = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1)r\frac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2, \quad \alpha \geq -\frac{1}{2}, \quad \lambda \in (0,\infty),$$

B_α - диференціальний оператор Бесселя 2-го порядку.

За дельта-подібну послідовність візьмемо ядро Коші - фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для сепаратної системи рівнянь теплопровідності, породженої оператором $\mathfrak{M}_\alpha$.

Розглянемо задачу побудови обмеженого в області

$$D_1^+ = \{(t,r) : t \in (0,\infty), r \in I_1^+\}$$

розв'язку сепаратної системи рівнянь теплопровідності параболічного й B-параболічного типу [1]

$$\left(\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma_1^2}{a_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)v_1(t,r) = 0, \quad t > 0, r \in (R_0, R_1),$$

$$\left(\frac{1}{a_2^2}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma_2^2}{a_2^2} - B_\alpha\right)v_2(t,r) = 0, \quad t > 0, r \in (R_1, \infty), \tag{1}$$

за початковими умовами

$$v_1|_{t=0} = g_1(r), \quad r \in (R_0, R_1); \quad v_2|_{t=0} = g_2(r), \quad r \in (R_1, \infty), \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0\right)v_1|_{r=R_0} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial r}|_{r=\infty} = 0, \tag{3}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^1\right)v_1 - \left(\alpha_{j2}^1\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^1\right)v_2\right]|_{r=R_1} = 0; \quad j = 1,2, \tag{4}$$

$$|\alpha_{11}^0| + |\beta_{11}^0| \neq 0, \quad c_{j1} = \alpha_{2j}^1\beta_{1j}^1 - \alpha_{1j}^1\beta_{2j}^1 \neq 0, c_{11}c_{21} > 0.$$

У зображеннях за Лапласом [2] задачі (1)-(4) відповідає задача побудови обмеженого на множині I_1 розв'язку сепаратної системи звичайних лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_1^2\right)v_1^*(p,r) = -\tilde{g}_1(r), \quad r \in (R_0, R_1), \quad R_1 > 0,$$

$$(B_{\nu,\alpha} - \lambda^2)v_2^*(p,r) = -\bar{g}_2(r), \quad r \in (R_1, \infty), \tag{5}$$

за крайовими умовами

$$(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0)v_1^*(p,r)|_{r=R_0} = 0, \quad \frac{d}{dr} v_2^*(p,r)|_{r=\infty} = 0, \tag{6}$$

та умовами спряження

$$[(\alpha_{j1}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^1)v_1^* - (\alpha_{j2}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^1)v_2^*]|_{r=R_1} = 0; \quad j = 1, 2. \tag{7}$$

У формулах (5)-(7) беруть участь функції:

$$v_j^*(p,r) = \int\limits_0^\infty v_j(t,r)e^{-pt}dt; \quad \bar{g}_1(r) = a_1^{-2} g_1(r); \quad \bar{g}_2(r) = r^{-2} a_2^{-2} g_2(r),$$

$$q_j = a_j^{-1}(p + \gamma_j^2)^{1/2}, \quad j = 1, 2; \quad Re\, q_j > 0.$$

При цьому диференціальний оператор Бесселя

$$B_{\nu,\alpha} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha + 1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\nu^2 - \alpha^2}{r^2}, \quad \nu \equiv q_2; \quad Re\,\nu \equiv Re\, q_2 \geq \alpha \geq -\frac{1}{2}.$$

Розв'язок крайової задачі (5)-(7), побудований методом функцій Коші, має структуру [3]:

$$v_j^* = \int\limits_{R_0}^{R_1} H_{\nu,\alpha;j1}^*(p,r,\rho)\bar{g}_1(\rho)d\rho + \int\limits_{R_1}^{\infty} H_{\nu,\alpha;j2}^*(p,r,\rho)\bar{g}_2(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho; \quad j = 1, 2. \tag{8}$$

У формулах (8) беруть участь функції впливу:

$$H_{\nu,\alpha;11}^* = \frac{1}{q_1 \Delta_{\nu,\alpha}^*(p)} \begin{cases} \Phi_{11}^0(q_1R_0, q_1r)[U_{\nu,\alpha;22}^{12}(\lambda R_1)\Phi_{11}^1(q_1R_1, q_1\rho) - \\ \Phi_{11}^0(q_1R_0, q_1\rho)[U_{\nu,\alpha;22}^{12}(\lambda R_1)\Phi_{11}^1(q_1R_1, q_1r) - \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &-U_{\nu,\alpha;12}^{12}(\lambda R_1)\Phi_{21}^1(q_1R_1, q_1\rho)], \quad R_0 < r < \rho < R_1, \\ &-U_{\nu,\alpha;12}^{12}(\lambda R_1)\Phi_{21}^1(q_1R_1, q_1r)], \quad R_0 < \rho < r < R_1; \end{aligned}$$

$$H_{\nu,\alpha;12}^*(p,r,\rho) = -\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{K_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)}{\Delta_{\nu,\alpha}^*(p)}\Phi_{11}^0(q_1R_0, q_1r);$$

$$H_{\nu,\alpha;21}^*(p,r,\rho) = -\frac{c_{11}}{\Delta_{\nu,\alpha}^*(p)}K_{\nu,\alpha}(\lambda r)\Phi_{11}^0(q_1R_0, q_1\rho); \tag{9}$$

$$H_{\nu,\alpha;22}^*(p,r,\rho) = \frac{\lambda^{2\alpha}}{\Delta_{\nu,\alpha}^*(p)} \begin{cases} K_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)[\Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)[\Psi_{\nu,\alpha;22}^{1*}(\lambda R_1, \lambda r) - \\ K_{\nu,\alpha}(\lambda r)[\Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)[\Psi_{\nu,\alpha;22}^{1*}(\lambda R_1, \lambda\rho) - \end{cases}$$

$$-\Delta_{12}(q_1R_0, q_1R_1)[\Psi^{1*}_{\nu,\alpha;12}(\lambda R_1, \lambda r)], \quad R_1 < r < \rho < \infty,$$
$$-\Delta_{12}(q_1R_0, q_1R_1)[\Psi^{1*}_{\nu,\alpha;12}(\lambda R_1, \lambda \rho)], \quad R_1 < \rho < r < \infty.$$

У рівностях (9) прийняті позначення:

$$\Delta_{1j}(q_1R_0, q_1R_1) = V^{01}_{11}(q_1R_0)V^{12}_{j1}(q_1R_1) - V^{02}_{11}(q_1R_0)V^{11}_{j1}(q_1R_1); \quad j = 1, 2;$$
$$\Phi^k_{jk}(q_sR_k, q_sx) = V^{k2}_{jm}(q_sR_k)\, ch\, q_sx - V^{k1}_{jm}(q_sR_k)\, sh\, q_sx;$$
$$\Psi^{k*}_{\nu,\alpha;jm}(\lambda R_k, \lambda x) = U^{k1}_{\nu,\alpha;jm}(\lambda R_k)K_{\nu,\alpha}(\lambda x) - U^{k2}_{\nu,\alpha;jm}(\lambda R_k)I_{\nu,\alpha}(\lambda x);$$
$$\Delta^*_{\nu,\alpha}(p) \equiv U^{12}_{\nu,\alpha;12}(\lambda R_1)\Delta_{12}(q_1R_0, q_1R_1) - U^{12}_{\nu,\alpha;22}(\lambda R_1)\Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1);$$
$$V^{k1}_{jm}(q_sR_k) = \alpha^k_{jm}q_s\, sh\, q_sR_k + \beta^k_{jm}\, ch\, q_sR_k;$$
$$V^{k2}_{jm}(q_sR_k) = \alpha^k_{jm}q_s\, ch\, q_sR_k + \beta^k_{jm}\, sh\, q_sR_k;$$
$$U^{k2}_{\nu,\alpha;jm}(\lambda R_k) = (\alpha^k_{jm}\frac{\nu-\alpha}{R_k} + \beta^k_{jm})K_{\nu,\alpha}(\lambda R_k) - \alpha^k_{jm}\lambda^2R_kK_{\nu+1,\alpha+1}(\lambda R_k);$$
$$I_{\nu,\alpha}(x) = x^{-\alpha}I_\nu(x), \quad K_{\nu,\alpha}(x) = x^{-\alpha}K_\nu(x);$$

$I_\nu(x), K_\nu(x)$ - модифіковані функції Бесселя відповідно 1-го та 2-го роду [4].

Особливими точками функцій впливу є точки галуження $p = -\gamma_j^2 (j = 1, 2)$ та $p = \infty$. Внаслідок леми Жордана та теореми Коші [2] приходимо до формули повернення до оригіналів:

1) якщо $\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \equiv k_1^2 \geq 0$, то при $p = -(\beta^2 + \gamma_2^2)$

$$H_{\alpha;jk}(t, r, \rho) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Im\{H^*_{\nu,\alpha;jk}(e^{\pi i}(\beta^2 + \gamma_2^2), r, \rho)\}e^{-(\beta^2+\gamma_2^2)t}\beta d\beta,$$

$$(q_1 = i\bar{b}_1(\beta) = ia_1^{-1}b_1(\beta) = ia_1^{-1}(\beta^2 + k_1^2)^{1/2}, q_2 = i\bar{b}_2 = ia_2^{-1}\beta);$$

2) якщо $\gamma_1^2 - \gamma_2^2 \equiv k_2^2 \geq 0$, то при $p = -(\beta^2 + \gamma_2^2)$

$$H_{\alpha;jk}(t, r, \rho) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Im\{H^*_{\nu,\alpha;jk}(e^{\pi i}(\beta^2 + \gamma_1^2), r, \rho)\}e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)t}\beta d\beta,$$

$$(q_1 = i\bar{b}_1 = ia_1^{-1}\beta, q_2 = i\bar{b}_2 = ia_2^{-1}b_2 = ia_2^{-1}(\beta^2 + k_2^2)^{1/2}).$$

Визначимо функції:

$$v^{m1}_{jk}(\bar{b}_iR_m) = -\alpha^m_{jk}\bar{b}_i(\beta)\sin\bar{b}_i(\beta)R_m + \beta^m_{jk}\cos\bar{b}_i(\beta)R_m;$$
$$v^{m2}_{jk}(\bar{b}_iR_m) = \alpha^m_{jk}\bar{b}_i(\beta)\cos\bar{b}_i(\beta)R_m + \beta^m_{jk}\sin\bar{b}_i(\beta)R_m;$$

$$\varphi_{11}^{0}(\bar{b}_1 R_0, \bar{b}_1 r) = v_{11}^{01}(\bar{b}_1 R_0)\sin \bar{b}_1 r - v_{11}^{02}(\bar{b}_1 R_0)\cos \bar{b}_1 r;$$

$$D_\alpha(\lambda r, \bar{b}_2) = \pi^{-1}\, sh\, \bar{b}_2 \pi K_{i\bar{b}_2,\alpha}(\lambda r), \quad i^2 = -1;$$

$$X_{\alpha;jk}^{m2}(\lambda R_1, \bar{b}_2) = (\alpha_{jk}^{m}\frac{d}{dr} + \beta_{jk}^{m}) D_\alpha(\lambda r, \bar{b}_2)|_{r=R_1}.$$

При $q_j = i\bar{b}_j(\beta)$ маємо, що

$$\Delta_{\nu,\alpha}^{*}(p) = \pi i (sh\, \bar{b}_2 \pi)^{-1}\{X_{\alpha;12}^{12}(\lambda R_1, \bar{b}_2(\beta))\delta_{12}(\bar{b}_1(\beta)R_0, \bar{b}_1(\beta)R_1) -$$

$$-X_{\alpha;22}^{12}(\lambda R_1, \bar{b}_2(\beta))\delta_{11}(\bar{b}_1(\beta)R_0, \bar{b}_1(\beta)R_1)\} \equiv \pi i (sh\, \bar{b}_2\pi)^{-1}\delta_\alpha(\beta),$$

$$\delta_{1j}(\bar{b}_1 R_0, \bar{b}_1 R_1) = v_{11}^{01}(\bar{b}_1 R_0) v_{j1}^{12}(\bar{b}_1 R_1) - v_{11}^{02}(\bar{b}_1 R_0) v_{j1}^{11}(\bar{b}_1 R_1).$$

Оскільки $\delta_\alpha(\beta)$ - аналітична функція, то корені трансцендентного рівняння $\delta_\alpha(\beta) = 0$ утворюють дискретний спектр $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ [5].

Це дозволяє обчислити оригінали функцій впливу за узагальненою теоремою розвинення [2]:

$$H_\alpha(t, r, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n^2 + \gamma_2^2)t} \frac{V_{\alpha,j}(r, \beta_n) V_{\alpha,k}(r, \beta_n)}{\|V_\alpha(r, \beta_n)\|^2} \sigma_k a_k^2; \quad j, k = 1, 2. \qquad (10)$$

У формулі (10) беруть участь функції:

$$V_{\alpha;1}(r, \beta_n) = X_{\alpha;12}^{12}(\lambda R_1, \bar{b}_{2n})\varphi_{11}^{0}(\bar{b}_{1n} R_0, \bar{b}_{1n} r); \quad \sigma_1 = \frac{c_{11}}{c_{21}} \frac{R_1^{2\alpha+1}}{a_1^2};$$

$$V_{\alpha;2}(r, \beta_n) = \delta_{11}(\bar{b}_{1n} R_0, \bar{b}_{1n} R_1) D_\alpha(\lambda r, \bar{b}_{2n}); \quad \sigma_2 = a_2^{-2};$$

$$V_\alpha(r, \beta_n) = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r) V_{\alpha;1}(r, \beta_n) + \theta(r - R_1) V_{\alpha;2}(r, \beta_n);$$

$$\sigma(r) = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)\sigma_1 + \theta(r - R_1) r^{2\alpha - 1}\sigma_2.$$

Квадрат норми власної функції $V_\alpha(r, \beta_n)$ обчислюється за формулою:

$$\|V_\alpha\|^2 = \int_{R_0}^{\infty} [V_\alpha]^2 \sigma(r) dr = \int_{R_0}^{R_1} [V_{\alpha;1}(r, \beta_n)]^2 \sigma_1 dr +$$

$$+ \int_{R_1}^{\infty} [V_{\alpha;2}(r, \beta_n)]^2 \sigma_2 r^{2\alpha-1} dr = \frac{R_1^{2\alpha+1}\, sh\, \bar{b}_{2n}\pi}{\pi \bar{b}_{2n}} \delta_{11}(\bar{b}_{1n} R_0, \bar{b}_{1n} R_1) X_{\alpha;12}^{12}(\lambda R_1, \bar{b}_{2n}) \times$$

$$\times [\frac{1}{i}\frac{d}{dp}\Delta_{\nu,\alpha}^{*}(p)]|_{p=p_n}; \qquad (11)$$

$$\bar{b}_{jn} = a_j^{-1}(\beta_n^2 + k_j^2)^{1/2}; \quad p_n = -(\beta_n^2 + \gamma_2^2).$$

Повертаючись у формулах (8) до оригіналу, одержуємо розв'язок задачі (1)-(4)

$$v_j(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n^2+\gamma_2^2)t} \frac{V_{\alpha;j}(r,\beta_n)}{\|V_\alpha(r,\beta_n)\|^2}[\int_{R_0}^{R_1} g_1(\rho)V_{\alpha;1}(\rho,\beta_n)\sigma_1 d\rho +$$

$$+\int_{R_1}^{\infty} g_2(\rho)V_{\alpha;2}(\rho,\beta_n)\sigma_2\rho^{2\alpha-1}d\rho], \quad j=1,2. \tag{12}$$

Внаслідок початкових умов (2) маємо інтегральні зображення:

$$g_1(r) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_0}^{R_1} g_1(\rho)V_{\alpha;1}(\rho,\beta_n)\sigma_1 d\rho \frac{V_{\alpha;1}(r,\beta_n)}{\|V_\alpha(r,\beta_n)\|^2}, \tag{13}$$

$$g_2(r) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_1}^{\infty} g_2(\rho)V_{\alpha;2}(\rho,\beta_n)\sigma_2\rho^{2\alpha-1} d\rho \frac{V_{\alpha;2}(r,\beta_n)}{\|V_\alpha(r,\beta_n)\|^2}. \tag{14}$$

Інтегральні зображення (13),(14) є рядом Фур'є для вектор-функції $g(r) = \{g_1(r), g_2(r)\}$ за узагальнено-ортогональною системою власних вектор-функцій $\{V_\alpha(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_0}^{\infty} g(\rho)V_\alpha(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho \frac{V_\alpha(r,\beta_n)}{\|V_\alpha(r,\beta_n)\|^2}. \tag{15}$$

Ряд Фур'є (15) породжує пряме

$$H_{\alpha,1}[g(r)] = \int_{R_0}^{\infty} g(r)V_\alpha(r,\beta_n)\sigma(r)dr \equiv g_n \tag{16}$$

та обернене

$$H_{\alpha;1}^{-1}[g_n] = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{V_\alpha(r,\beta_n)}{\|V_\alpha(r,\beta_n)\|^2} \equiv g(r) \tag{17}$$

скінченні гібридні інтегральні перетворення Фур'є-Канторовича-Лєбєдєва на множині I_1^+.

При цьому справджується теорема Стєклова й теорема про основну тотожність [5].

Теорема (Стєклова). *Двічі неперервно диференційована на множині I_1^+ вектор-функція $g(r)$, яка задовольняє крайові умови (6) та умови спряження (7), розкладається в абсолютно й рівномірно збіжний ряд Фур'є (15).*

Теорема (про основну тотожність). *Якщо вектор-функція $g(r)$ двічі неперервно диференційована на множині I_1^+, задовольняє умови спряження (7) та крайові умови*

$$(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0) g_1(r)|_{r=R_0} = g_{10}, \quad \lim_{r\to\infty} r^{2\alpha+1}(\frac{dg_2}{dr}V_{\alpha;2} - g_2\frac{dV_{\alpha;2}}{dr}) = 0, \qquad (18)$$

то справджується основна тотожність інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора $\mathfrak{M}_\alpha$:

$$H_{\alpha;1}[\mathfrak{M}_\alpha[g(r)]] = -\beta_n^2 g_n - \sigma_1 a_1^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_{\alpha;1}(R_0,\beta_n) g_{10} -$$

$$-k_1^2 \int\limits_{R_0}^{R_1} g_1(r) V_{\alpha;1}(r,\beta_n)\sigma_1 dr - k_2^2 \int\limits_{R_1}^{\infty} g_2(r) V_{\alpha;2}(r,\beta_n)\sigma_2 r^{2\alpha-1} dr. \qquad (19)$$

Тотожність (19) дає можливість за відомою логічною схемою застосувати запроваджені гібридні інтегральні перетворення до розв'язання відповідних задач математичної фізики неоднорідних структур.

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.- М.:Наука, 1972.- 735 с.

2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного.- М.:Наука, 1973.- 736с.

3. Ленюк М.П., Литовченко В.А. Вычисление несобственных интегралов методом гибридного интегрального преобразования (Фурье, Бесселя).- Черновцы:Черновиц. ун-т, 1990.- 88с.

4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.- М.:Наука, 1971.- 1108с.

5. Ленюк М.П., Мороз В.В. Скінченні гібридні інтегральні перетворення.- Київ, 1997.- 42с.- (Препр. / НАН України. Ін-т математики; 97.7).