

С. Ю. Бабич<sup>1</sup>, Н. О. Ярецька<sup>2</sup>, С. В. Дегтяр<sup>2</sup>

**КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПІВПРОСТОРІВ ТА ПРУЖНОГО ЦИЛІНДРА  
З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ**

<sup>1</sup> *Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,  
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ-57, Україна;  
e-mail: desc@inmech.kiev.ua*

<sup>2</sup> *Хмельницький національний університет,  
вул. Інститутська, 11, 29016, Хмельницький, Україна;  
e-mail: yaretskano@khmnu.edu.ua*

**Abstract.** The contact problem on an interaction of two prestressed half-spaces and an elastic cylindrical stamp with initial stresses is solved without taking into account the frictional forces and in the case of unequal roots of the characteristic equation. The solution is presented in a general form for the theory of large (finite) initial strains and two variants of the theory of small initial strains within the framework of the linearized theory of elasticity with an arbitrary structure of the elastic potential. To investigate the problem, some mathematical apparatus is used, such as the Hankel transform, dual integral equations, orthogonal polynomials, and other tools of the theory of contact problems of the linearized theory of elasticity. Numerical analysis is presented in the form of graphs for the Treloar potential.

**Key words:** the linearized theory of elasticity, initial (residual) stresses, contact problem, annular stamp, half-space.

**Вступ.**

Актуальною задачею сучасного машинобудування та будівництва споруд є підвищення довговічності, зносостійкості та надійності механізмів, машин та інженерних конструкцій. Широке коло наукових досліджень у межах механіки деформівного твердого тіла сприяє успішному її розв'язуванню. Від методів розрахунку передачі навантаження у деталях машин та конструкціях залежать ряд чинників, таких як: збільшення термінів експлуатації машин та споруд шляхом підвищення їх характеристик з експлуатації, зменшення їх ваги, зниження собівартості матеріалів та їх економічної сумісності.

У багатьох публікаціях періодичних наукових видань та працях навчального і монографічного характеру [1, 17, 19] досить детально вивчені питання, що стосуються контактних задач для пружних, пластичних та в'язко пружних тіл без дії на них початкових (залишкових, технологічних) напружень. Кількість таких публікацій доволі велика. Але запити сучасної інженерно-технічної практики висувають ряд задач, які потребують використання ускладнених неklasичних моделей. До таких моделей належать моделі, що враховують складні фізичні та механічні властивості тіл [8, 10, 11 – 15]. До факторів, які мають бути врахованими під час контактної взаємодії твердих деформівних тіл, відносять властивості, що пов'язані з мікромеханікою фрикційної взаємодії, а саме: поверхневі властивості матеріалу, тертя, жорсткість поверхні, тепловиділення, зносостійкість поверхні тіл тощо.

Крім перерахованих вище факторів важливим є фактор врахування початкових напружень. Незважаючи на те, що в останні десятиліття розвиток контактних задач

*ISSN0032–8243. Прикл. механіка, 2023, 59, № 4*

досягнув суттєвих успіхів, у механіці твердого деформівного тіла все ще залишається ряд проблем, які вимагають уваги наукової спільноти.

Оскільки початкові напруження присутні практично в усіх компонентах деталей машин та конструкцій, елементах будівель та споруд, то перерахуємо ряд дій, які сприяють їх виникненню: виробничі процеси виготовлення матеріалів, технологічні операції, складання конструкцій, геостатичні та геодинамічні сили земної кори, деформація мерзлих ґрунтів, зняття навантаження у пластичних тілах, а також процеси у кровоносних судинах живих істот.

Для компенсації контактних характеристик (особливо напружень), що виникають у процесі роботи в елементах конструкцій, доречно іноді навмисно створювати початкові (залишкові, технологічні) напруження. Це дає змогу підвищити міцність конструкцій та матеріалів з яких вони виготовлені. Необхідно також відзначити, що початкові напруження виникають як залишкові внаслідок попередньої технологічної обробки або процедури виготовлення.

У зв'язку із впровадженням нових штучних матеріалів у виробничий процес особливе зацікавлення викликає дослідження контактних задач для попередньо напружених тіл. Особливо, враховуючи, що ці матеріали можуть витримувати достатньо великі початкові деформації.

Проблема дослідження впливу початкових деформацій на напружено-деформований стан тіл, що перебувають у контакті, виникла в цілому ряді фундаментальних та прикладних наукових напрямків, таких як: механіка композитів, механіка матеріалів та елементів конструкцій, неруйнівних методах визначення навантажень, сейсмологія, біомеханіка, механіка гірських порід, геофізика тощо. Отже, необхідність у дослідженні впливу початкових напружень на контактну взаємодію тіл є важливим аспектом вивчення представлених проблем.

Для правильної оцінки запасів міцності матеріалів, також, необхідно більш ефективно враховувати початкові напруження. Їх необхідно враховувати при створенні матеріалів, з яких виготовляють конструкції, та під час розрахунку відповідальних елементів споруд та машин. Також, це дозволить суттєво знизити матеріаломісткість конструкцій, зберігши одночасно і фундаментальні характеристики матеріалів у цілому.

Спираючись на дослідження [18] якісних та кількісних характеристик підсилення несучих елементів конструкції пружними скінченними накладками (стрінгерами), можна побачити, що наявність початкових напружень, достатньо сильно впливає на міцнісні ресурси матеріалів цієї конструкції. Відзначимо, що розглянуті тіла у [18] є пружними, а контактна взаємодія між основами (тілами) відбувається після виникнення у них початкових напружень.

Історично для розв'язку контактних задач, що враховують початковий напружено-деформований стан, склалися два підходи, які розвивалися паралельно. Першим підходом був розв'язок контактних задач для тіл з пружними потенціалами конкретної структури, а другим підходом було дослідження задач для пружних тіл з початковими напруженнями при довільній структурі пружного потенціалу.

Однією із перших (стосовно першого напрямку) була опублікована праця Курашіге [16], в якій представлено розв'язок задачі для колової тріщини пружного нестисливого тіла з початковими напруженнями у випадку потенціалу Трелоара. До цього ж напрямку належать і наукові праці вітчизняних та зарубіжних вчених, таких як: Александров, Арутюнян [5] та їх учні [4], а також Далівал, Rokne, Rajit, Singh [9] та інші.

Фундаментальні результати другого напрямку були одержані українським вченим, академіком НАН України проф. Гузем О.М [2, 3, 10, 13, 14]. Ним вперше було розв'язано ряд контактних задач для стисливих і нестисливих тіл одним із найбільш ефективних підходів для матеріалів з довільною формою пружного потенціалу та однорідними початковими напруженнями. Даний метод розв'язку оснований на теорії функції комплексної змінної для плоских задач і теорії потенціалу для просторових контактних задач. Подальшого розвитку теорія контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями (другий напрямок) отримала у працях його учнів: Рудницького,

Григоренка, Глухова, Назаренка, Діхтярука, Рамського, Примаченко, Матняка та, зокрема, авторів даної статті.

Серед численних праць монографічного та навчального характеру, оглядових статей та інших публікацій у вітчизняних і закордонних виданнях перерахованих вище українських авторів слід відзначити роботи [2, 3, 6, 7, 10, 18, 20].

На думку авторів статті перевага другого підходу над першим полягає в тому, що, наприклад, за першим підходом одна і та сама задача для попередньо напружених тіл розглядається одними авторами для потенціалу одного конкретного типу, а іншими авторами – для потенціалу іншого типу. Тоді, як другий підхід дозволяє розв'язати поставлену контактну задачу в єдиній загальній формі для стисливих (нестисливих) попередньо напружених тіл при довільній структурі пружного потенціалу. А необхідні графіки та числові результати для конкретних пружних потенціалів можуть бути отримані лише на завершальному етапі.

Тому у даній статті дослідження виконано у межах другого підходу, тобто у загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності. Запропоновано розв'язок контактної задачі для попередньо напружених ідентичних півпросторів та пружного циліндра з початковими напруженнями без врахування сил тертя для випадку нерівних коренів характеристичного рівняння [3].

Відзначимо, що усі величини, які відносяться до пружного циліндричного штамп, позначаються верхнім індексом «(3)», верхнього півпростору – «(1)», а нижнього півпростору – «(2)». Також зробимо припущення, що початкові напружено-деформовані стани у штампі та півпросторах однорідні та рівні. У класичному випадку (при відсутності початкових напружень) подібна контактна задача була розглянута у [1].

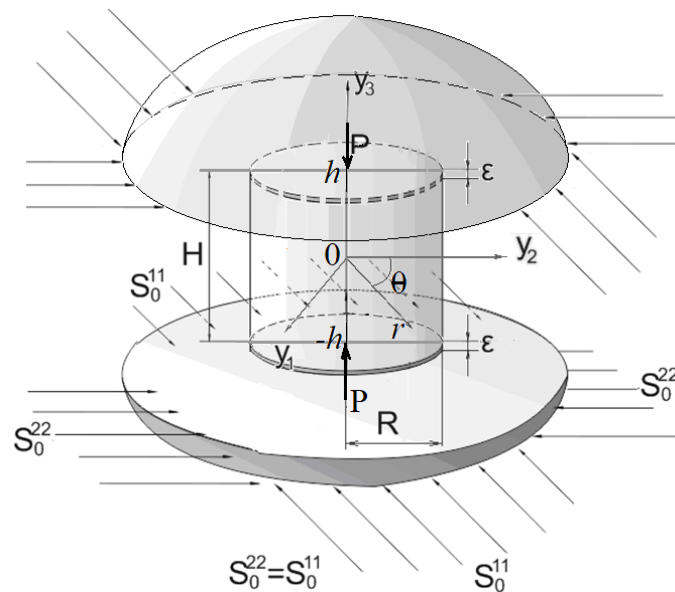


Рис. 1.

### §1. Постановка задачі та основні співвідношення.

Нехай скінченний пружний циліндричний штамп висотою  $H$  з початковими напруженнями (рис. 1), геометрична вісь симетрії якого співпадає з віссю  $y_3$  циліндричної системи координат  $(r, \theta, y_3)$ , стискається (розтягується) двома ідентичними по-

передньо напруженими півпросторами за допомогою осесиметричного навантаження, що зводиться до рівнодійної сили  $P$ . Зовнішнє навантаження прикладене таким чином, що точки не навантажених поверхонь обох попередньо напружених півпросторів та віддалених від області контакту півпросторів з пружним штампом, переміщуються відносно координатної площини  $y_3 = 0$  на величину  $\varepsilon$ . Величини:  $R$  – радіус циліндричного штамп,  $h = 0,5H$ .

Вважатимемо, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження – неперервні. Величини  $\lambda_i (i=1, 2, 3)$  – коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану, а  $S_0^{11}, S_0^{22}$  – компоненти симетричного тензора початкових напружень.

Також, у дослідженні будемо розглядати пружні ізотропні тіла (стисливі або нестисливі) з довільною формою пружного потенціалу. А у випадку ортотропних тіл будемо вважати, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають із напрямком осей координат у деформованому стані  $y_i (i=\overline{1,3})$ .

Скажімо, що початкові стани півпросторів та штамп – однорідні й для них виконуються співвідношення [3, 11]:

$$y_m = x_m + U_m^0; \quad U_m^0 = \delta_{mi} (\lambda_m - 1) \lambda_i^{-1} y_i \quad (i, m = \overline{1,3}),$$

де  $\delta_{mi}$  – символ Кронекера.

Тоді основне рівняння у переміщеннях [3, 11] для стисливих тіл має вигляд

$$L'_{m\alpha} U_\alpha = 0; \quad L'_{m\alpha} = \omega'_{ij\alpha\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta \quad (i, m, \alpha, \beta = \overline{1,3}), \quad (1.1)$$

а для нестисливих тіл має виконуватися умова нестисливості:

$$\begin{aligned} L'_{m\alpha} U_\alpha + q'_{\alpha m} \partial p' / \partial y_\alpha = 0; \quad L'_{m\alpha} &= \kappa'_{im\alpha\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta; \\ q'_{ij} \partial U_j / \partial y_i = 0; \quad q'_{ij} &= \lambda_i q_{ij} \quad (i, j, m, \alpha, \beta = \overline{1,3}). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Вирази для компонент тензора напружень для стисливих і нестисливих тіл при  $y_i = \text{const} (i=1, 2, 3)$  матимуть вигляд

$$Q'_{ij} = \begin{cases} \omega'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta} - \text{для стисливих тіл}; & \omega'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta}; \\ \kappa'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta} + q'_{ij} p - \text{для нестисливих тіл}; & \kappa'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \kappa_{ij\alpha\beta}, \end{cases}$$

де  $\omega'_{im\alpha\beta} = \omega'_{im\alpha\beta} (S_{11}^0, S_{22}^0, S_{33}^0)$ ,  $\kappa'_{im\alpha\beta} = \kappa'_{im\alpha\beta} (S_{11}^0, S_{22}^0, S_{33}^0)$  – складові тензора модулів пружності четвертого порядку.

При однорідних початкових напруженнях має місце умова:

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3. \quad (1.3)$$

Враховуючи (1.3), розв'язок рівнянь (1.1), (1.2) представимо через функцію  $\tilde{\chi}$ , яка у циліндричних координатах  $(r, \theta, y_3)$  задовольняє рівнянням

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + \tilde{\chi}_2; \quad \left( \Delta_1 + \xi_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \tilde{\chi}_1 = 0; \quad \left( \Delta_1 + \xi_3^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \tilde{\chi}_2 = 0, \quad (1.4)$$

де  $\Delta_1 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r$ .

Як було зазначено вище, у даній статті обмежимося випадком нерівних коренів ( $\xi_2^2 \neq \xi_3^2$ ) характеристичного рівняння, що відповідає рівнянням (1.4).

У системі колових циліндричних координат  $(r, \theta, z_i)$ , де  $z_i = v_i^{-1}y_3$ ;  $v_i = \sqrt{n_i}$  ( $i=1, 2$ );  $n_1 = \xi_2^2$ ;  $n_2 = \xi_3^2$  такій постановці відповідають граничні умови:

1) на торцях пружного штампa в області контакту  $z_i = \pm h/v_i$ , де  $v_i = \sqrt{n_i}$  ( $i=1, 2$ ):

$$u_3^{(i)} - u_3^{(3)} = \varepsilon; \quad Q_{33}^{(3)} = Q_{33}^{(i)}; \quad Q_{3r}^{(3)} = 0; \quad Q_{3r}^{(i)} = 0 \quad (0 \leq r \leq R), \quad (i=1, 2); \quad (1.5)$$

2) на межах пружних півпросторів поза ділянкою контакту  $z_i = \pm h/v_i$  ( $i=1, 2$ ):

$$Q_{33}^{(i)} = 0; \quad Q_{3r}^{(i)} = 0; \quad u_3^{(i)} = 0 \quad (r > R), \quad (i=1, 2); \quad (1.6)$$

3) на боковій поверхні пружного штампa  $r = R$ :

$$Q_{rr}^{(3)} = 0; \quad Q_{3r}^{(3)} = 0 \quad (|z_i| \leq h/v_i), \quad (i=1, 2). \quad (1.7)$$

Умова рівноваги, яка встановлює зв'язок між осіданням торців та рівнодійною навантаження  $P$ , має вигляд:

$$P = -2\pi \int_0^R r |Q_{33}^{(i)}| dr; \quad |Q_{33}^{(i)}| = |Q_{3r}^{(i)}|_{z_i = \pm h/v_i} \quad (i=1, 2). \quad (1.8)$$

Умова (1.8) завершує постановку просторової лінеаризованої задачі про контактну взаємодію попередньо напруженого скінченного циліндричного штампa із двома пружними півпросторами з початковими напруженнями.

Напружено-деформований стан у попередньо напружених півпросторах будемо визначати згідно лінеаризованих рівнянь [3]:

$$\begin{aligned} Q_{33}^{(i)}(\rho; \zeta_i) &= \frac{C_{44}(1+m_1)l_1}{R} \int_0^\infty F(\eta)(s_2 e^{\eta \zeta_2} - s_3 e^{\eta \zeta_1}) J_0(\eta \rho) d\eta; \\ Q_{3r}^{(i)}(\rho; \zeta_i) &= -\frac{C_{44}(1+m_1)}{v_1 R} \int_0^\infty F(\eta)(e^{\eta \zeta_2} - e^{\eta \zeta_1}) J_1(\eta \rho) d\eta; \\ U_3^{(i)}(\rho; \zeta_i) &= -\frac{m_1}{v_1} \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} (s_2 e^{\eta \zeta_2} - s_3 e^{\eta \zeta_1}) J_0(\eta \rho) d\eta; \\ U_r^{(i)}(\rho; \zeta_i) &= -\int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} (e^{\eta \zeta_2} - s_3 e^{\eta \zeta_1}) J_1(\eta \rho) d\eta, \end{aligned} \quad (1.9)$$

де

$$C_{44} = \begin{cases} w'_{1313}; \\ \kappa'_{1313}; \end{cases} \quad m_i = \begin{cases} \frac{\omega'_{1111} n_i - \omega'_{3113}}{\omega'_{1133} + \omega'_{1313}}; \\ \frac{\lambda_1 q_1 n_i}{\lambda_3 q_3}; \end{cases} \quad l_i = \begin{cases} \frac{\omega'_{1331} + \frac{\omega'_{1313} - \omega'_{1331}}{\omega'_{1313}} \frac{\omega'_{1133} + \omega'_{1313}}{\omega'_{1111} n_i + \omega'_{1133}}}{\kappa'_{1331} + \frac{\kappa'_{1313} - \kappa'_{1331}}{\kappa'_{1313}} \frac{\lambda_3 q_3}{\lambda_3 q_3 + \lambda_1 q_1 n_i}}; \end{cases}$$

$$\xi = \frac{z_i v_i}{R}; \quad \zeta_i = \frac{\xi}{v_i} = \frac{z_i}{R}; \quad \eta = \xi R \quad (i=1, 2); \quad s = s_0 l_2 l_1^{-1}; \quad s_0 = (1+m_2)(1+m_1)^{-1};$$

$$s_1 = (m_1 - 1)m_1^{-1}; \quad s_2 = (v_1 m_2)(v_2 m_1)^{-1}; \quad s_3 = s_0 v_1 v_2^{-1}.$$

Тут  $F(\eta)$  – шукана функція;  $J_\nu(x)$  – функції Бесселя дійсного аргументу, які в області контакту ( $y_3 = \pm h$ ;  $z_i = \pm h / v_i$  ( $i = 1, 2$ )) набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned} Q_{33}^{(i)}\left(\rho; \pm \frac{h}{v_i R}\right) &= \frac{C_{44}(1+m_1)l_1(s-s_3)}{R} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\mu\rho) d\eta; \\ Q_{3r}^{(i)}\left(\rho; \pm \frac{h}{v_i R}\right) &= 0; \quad U_3^{(i)}\left(\rho; \pm \frac{h}{v_i R}\right) = -\frac{m_1(s_2-s_3)}{v_1} \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\mu\rho) d\eta; \\ U_r^{(i)}\left(\rho; \pm \frac{h}{v_i R}\right) &= (s_3-1) \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\mu\rho) d\eta. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Загальний розв'язок для визначення напружено-деформованого стану у циліндричному пружному штампі з початковими напруженнями у випадку нерівних коренів ( $\xi_2'^2 \neq \xi_3'^2$ ) характеристичного рівняння (1.4) приймемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi} &= 3C_0 r^2 (z_1 - z_2) - 2C_0 (z_1^3 + z_2^3) + \\ &+ \sum_{k=1}^\infty \left\{ [A_k I_0(\gamma_k v_1 r) S_1(\gamma_k v_1 z_1) + B_k I_0(\gamma_k v_2 r) S_1(\gamma_k v_2 z_2)] + \right. \\ &\left. + J_0(\alpha_k r) [S_2(\alpha_k z_1) + S_3(\alpha_k z_2)] \right\}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

де  $I_\nu(x)$  – функція Бесселя уявного аргументу;  $S_1 = C_k \sin(\gamma_k v_1 z_1) + D_k \cos(\gamma_k v_1 z_1)$ ;  $S_2 = E_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + F_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)$ ;  $S_3 = N_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + M_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)$ ;  $C_k, D_k, E_k, F_k, N_k, M_k, A_k, B_k$  – деякі сталі коефіцієнти;  $\alpha_k, \gamma_k$  – власні значення задачі (1.5) – (1.8).

Тоді напружено-деформований стан у попередньо напруженому циліндричному штампі для стисливих (нестисливих) тіл та нерівних коренів рівняння (1.4), із врахуванням граничних умов (1.5) – (1.8), представимо у вигляді

$$\begin{aligned} U_3^{(3)} &= \frac{\varepsilon\omega_2}{R} \left\langle -\frac{R}{\omega_2 h \theta_6} \left[ \frac{m_1 z_1}{n_1} + \frac{m_2 z_2}{n_2} \right] \chi_0 + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^\infty \frac{\mu_k}{n_1} \left\{ \gamma_k^2 \left[ \frac{s_0 m_1 I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_0(\gamma_k v_1 R \rho) \sin(\gamma_k v_1 z_1) - m_2 I_0(\gamma_k v_2 R \rho) \sin(\gamma_k v_2 z_2) \right] + \right. \\ &+ \frac{\mu_k^2}{R^2} J_0(\mu_k \rho) F_k^* \left[ \frac{m_1}{n_1} \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2) \left[ \operatorname{cth}\left(\frac{\mu_k h}{v_2 R}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_k h}{v_1 R}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_k h}{v_1 R}\right) \right]}{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) v_1 \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_k h}{v_1 R}\right) \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_k z_1}{R}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_k z_1}{R}\right) \right] + \\ &\left. \left. + \frac{m_2}{n_2} \frac{v_2 \left[ \operatorname{cth}\left(\frac{\mu_k h}{v_2 R}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_k h}{v_1 R}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_k h}{v_1 R}\right) \right]}{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_k h}{v_2 R}\right) \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_k z_2}{R}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_k z_2}{R}\right) \frac{n_2 \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_k h}{v_1 R}\right)}{n_1 s_0 \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_k h}{v_2 R}\right)} \right] \right\} \chi_k \right\rangle; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_r^{(3)} = & \varepsilon \left\langle \frac{r\theta_+}{2h\theta_6} \chi_0 - \frac{\omega_2}{Rn_1} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left\{ \gamma_k^2 \left[ \frac{s_0 v_1 I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_1(\gamma_k v_1 R \rho) \cos(\gamma_k v_1 z_1) - \right. \right. \\
& \left. \left. - v_2 I_1(\gamma_k v_2 R \rho) \cos(\gamma_k v_2 z_2) \right] + \right. \\
& + \frac{\mu_k^2}{R^2} J_1(\mu_k \rho) F_k^* \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2) \left[ \text{cth} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \text{ch} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) n_1 \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \text{ch} \left( \frac{\mu_k z_1}{R} \right) + \frac{1}{v_1} \text{sh} \left( \frac{\mu_k z_1}{R} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\left[ \text{cth} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \text{ch} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{\text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \text{ch} \left( \frac{\mu_k z_2}{R} \right) - \frac{v_2 \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right)}{n_1 s_0 \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right)} \text{sh} \left( \frac{\mu_k z_2}{R} \right) \right] \chi_k \right\rangle; \\
Q_{33}^{(3)} = & \varepsilon C_{44} (1 + m_1) J_1 \left\langle - \frac{\chi_0}{h\theta_6} \left[ \frac{1}{v_1} + \frac{s}{v_2} \right] + \frac{\omega_2}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left\{ \gamma_k^3 \left[ \frac{s_0 I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_0(\gamma_k v_1 R \rho) \cos(\gamma_k v_1 z_1) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{s n_2}{n_1} I_0(\gamma_k v_2 R \rho) \cos(\gamma_k v_2 z_2) \right] + \right. \\
& + \frac{\mu_k^3}{R^3 n_1} J_0(\mu_k \rho) F_k^* \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2) \left[ \text{cth} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \text{ch} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) n_1 \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \text{ch} \left( \frac{\mu_k z_1}{R} \right) + \right. \\
& + \frac{\text{sh} \left( \frac{\mu_k z_1}{R} \right)}{v_1} + \frac{\left[ \text{cth} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \text{ch} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{\text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \text{ch} \left( \frac{\mu_k z_2}{R} \right) - \\
& \left. \left. - \frac{s v_2 \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right)}{n_1 s_0 \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right)} \text{sh} \left( \frac{\mu_k z_2}{R} \right) \right] \chi_k \right\rangle; \\
Q_{3r}^{(3)} = & C_{44} (1 + m_1) \frac{\varepsilon \omega_2}{R v_1} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left\{ \gamma_k^3 s_0 \left[ \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_1(\gamma_k v_1 R \rho) \sin(\gamma_k v_1 z_1) - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{v_2}{v_1} I_1(\gamma_k v_2 R \rho) \sin(\gamma_k v_2 z_2) \Big] - \\
& -\frac{\mu_k^3}{R^3} J_1(\mu_k \rho) F_k^* \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2) \left[ \text{cth} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \text{ch} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) n_1 \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \text{sh} \left( \frac{\mu_k z_1}{R} \right) + \frac{1}{v_1} \text{ch} \left( \frac{\mu_k z_1}{R} \right) \right] + \\
& + \frac{s_0 v_1 \left[ \text{cth} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \text{ch} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{v_2 \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \text{sh} \left( \frac{\mu_k z_2}{R} \right) - \frac{\text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right)}{v_1 \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right)} \text{ch} \left( \frac{\mu_k z_2}{R} \right) \Big] \Big\} \chi_k; \\
& Q_{rr}^{(3)} = \varepsilon D_{44} \left\langle -\frac{\theta_7 \chi_0}{2h\theta_6} + \frac{\omega_2}{R} \times \right. \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left\{ \gamma_k^3 \left[ \frac{n_2}{n_1} G_k(2; R\rho) \cos(\gamma_k v_2 z_2) - \frac{s_0 I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} G_k(1; R\rho) \cos(\gamma_k v_1 z_1) \right] + \right. \\
& + \frac{\mu_k^2}{R^2 n_1} F_k^* \left( \frac{\tilde{c}_0 - 1}{R\rho} J_1(\mu_k \rho) \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2) \left[ \text{cth} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \text{ch} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) n_1 \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \text{ch} \left( \frac{\mu_k z_1}{R} \right) + \right. \\
& + \frac{\text{sh} \left( \frac{\mu_k z_1}{R} \right)}{v_1} + \frac{\left[ \text{cth} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \text{ch} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{\text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \text{ch} \left( \frac{\mu_k z_2}{R} \right) - \frac{v_2 \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right)}{n_1 s_0 \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right)} \text{sh} \left( \frac{\mu_k z_2}{R} \right) \Big] + \\
& + \frac{\mu_k}{R} J_0(\mu_k \rho) \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2) \left[ \text{cth} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \text{ch} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{n_1 \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \text{ch} \left( \frac{\mu_k z_1}{R} \right) + \right. \\
& + \frac{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) \text{sh} \left( \frac{\mu_k z_1}{R} \right) + \frac{(\tilde{c}_2 - \tilde{c}_0) \left[ \text{cth} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \text{ch} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{\text{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \Big] \Big] \Big\} \chi_k \Big\rangle. \\
& \left( \omega_2 = \frac{v_1^3}{m_1 (s_3 - s_2)}; \tilde{c}_0 = \begin{cases} \omega'_{1111} \omega'_{1122}{}^{-1}; \\ \lambda_1 q_1 (\lambda_3 q_3)^{-1} (\kappa'_{1133} + \kappa'_{1313}) \kappa'_{1122}{}^{-1}; \end{cases} \right.
\end{aligned}$$

$$\tilde{c}_i = \begin{cases} \lambda_3 \omega'_{1133} m_i \omega'^{-1}_{1122} n_i^{-1}; \\ (\kappa'_{1133} m_i - \kappa'_{3113}) \kappa'^{-1}_{1122} n_i^{-1} \quad (i = \overline{1, 2}); \end{cases}$$

$$D_{44} = \begin{cases} \omega'_{1122}; \\ \kappa'_{1122}; \end{cases} \quad G_k(i; R) = (\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1) I_0(\gamma_k v_i r) + \frac{1 - \tilde{c}_0}{\gamma_k v_i r} I_1(\gamma_k v_i r);$$

$$\theta_6 = m_1 v_1^{-3} + m_2 v_2^{-3}; \quad \theta_+ = v_1^{-1} + v_2^{-2};$$

$$F_k^* = (1 + \alpha_k^3) \gamma_k^3 \left[ \frac{n_1 \tilde{A}_k^* G_k(1; R) \left( \gamma_k v_1 \sin(\gamma_k h) \cos\left(\frac{h}{v_1}\right) - \cos(\gamma_k h) \sin\left(\frac{h}{v_1}\right) \right) + \frac{n_2 G_k(2; R)}{1 - \gamma_k^2 v_2^2} \times \right. \\ \left. \times \left( \gamma_k v_2 \sin(\gamma_k h) \cos\left(\frac{h}{v_2}\right) - \cos(\gamma_k h) \sin\left(\frac{h}{v_2}\right) \right) \right] / \left( \alpha_k^3 J_0(\alpha_k R) \left[ \frac{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0}{v_1} E_k^* \left( \alpha_k \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_k h}{v_1}\right) \cos\left(\frac{h}{v_1}\right) + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha_k h}{v_1}\right) \sin\left(\frac{h}{v_1}\right) \right) \right] + \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_0}{v_2} N_k^* \left( \alpha_k \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_k h}{v_2}\right) \cos\left(\frac{h}{v_2}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha_k h}{v_2}\right) \sin\left(\frac{h}{v_2}\right) \right) \right];$$

$$N_k^* = \frac{v_2 \left[ \operatorname{cth}\left(\frac{\alpha_k h}{v_2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_k h}{v_1}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha_k h}{v_1}\right) \right]}{n_1 \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_k h}{v_2}\right) \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]};$$

$$E_k^* = \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2) \left[ \operatorname{cth}\left(\frac{\alpha_k h}{v_2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_k h}{v_1}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha_k h}{v_1}\right) \right]}{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) v_1 \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_k h}{v_1}\right) \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]};$$

$$\theta_7 = (1 + \tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_1) v_1^{-1} + (1 + \tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_2) v_2^{-1}; \quad \tilde{A}_k^* = \frac{s_0 I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} \Bigg);$$

де  $\chi_k$  – шукані сталі.

## §2. Метод розв'язку.

Використовуючи розв'язок для циліндричного штампа (1.12) та задовольняючи третій умові (1.5) та другій умові (1.7), знаходимо власні значення задачі Штурма – Ліувілля для  $n_1 \neq n_2$ :

$$\gamma_k = \frac{\pi k}{h}; \quad \alpha_k = \frac{\mu_k}{R} \quad (J_1(\alpha_k R) = 0). \quad (2.1)$$

З перших граничних умов (1.5) – (1.6) визначимо невідому функцію  $F(\eta)$  для (1.11) з подвійних інтегральних рівнянь:

$$\int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta \rho) d\eta = q(\rho), \quad 0 < \rho < 1; \quad \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0, \quad \rho > 1 \quad (2.2)$$

$$\left( q(\rho) = \varepsilon \left\langle (1 - \chi_0) \frac{\omega_2}{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k J_0(\mu_k \rho) F_k^* \left[ \frac{m_1}{n_1} \left( E_k^* \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) + \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right) + \frac{m_2}{n_2} \left( N_k^* \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{R v_2} \right) + M_k^* \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k h}{R v_2} \right) \right) \right] \chi_k \right\rangle \right).$$

Розв'язок системи (2.2), знайдемо відповідно до формули [3]:

$$F(\eta) = \frac{2\eta}{\pi} \left[ \cos \eta \int_0^1 \frac{y f(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy + \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} du \int_0^1 \eta y \sin(\eta y) f(yu) dy \right].$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{F(\eta)}{\eta} &= \frac{2\varepsilon}{\pi} \left( (1 - \chi_0) \frac{\omega_2}{n_1} \psi(\eta, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{R} F_k^* \left[ \frac{m_1}{n_1} \left( E_k^* \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) + \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right) + \frac{m_2}{n_2} \left( N_k^* \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{R v_2} \right) + M_k^* \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k h}{R v_2} \right) \right) \right] \chi_k \psi(\eta, \mu_k) \right) \\ &\left( \psi(\eta, \mu_k) = \frac{\eta \sin \eta \cos \mu_k - \mu_k \sin \mu_k \cos \eta}{\eta^2 - \mu_k^2}, \quad \psi(\eta, 0) = \frac{\sin \eta}{\eta} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для визначення сталих коефіцієнтів  $C_k, D_k, E_k, F_k, N_k, M_k, A_k, B_k$  та функції  $F(\eta)$  було введено нові змінні:

$$\int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta \rho) d\eta = -\frac{\varepsilon R(v_2 + v_1 s)}{2v_1 v_2 h (s - s_3) \theta_6} \chi_0; \quad \chi_k = -\frac{R n_1}{\varepsilon \mu_n \omega_2} \tilde{B}_k. \quad (2.4)$$

З другої умови (1.5) отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta &= \frac{R}{s - s_3} \left\langle \frac{\varepsilon}{h \theta_6} \left[ \frac{1}{v_1} + \frac{s}{v_2} \right] \chi_0 + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^3 \cos(\gamma_k h) [\tilde{A}_k^* n_1 I_0(\gamma_k v_1 R \rho) + s n_2 I_0(\gamma_k v_2 R \rho)] - \frac{\mu_k^4 \varepsilon \omega_2}{R^4 n_1} J_0(\mu_k \rho) \times \right. \\ &\times \left. \left[ \frac{1}{v_1} \left( E_k^* \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k h}{R v_1} \right) + \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{R v_1} \right) \right) + \frac{s}{v_2} \left( N_k^* \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k h}{R v_2} \right) + M_k^* \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{R v_2} \right) \right) \right] F_k^* \right\} \chi_k \left. \right\rangle \\ &\left( M_k^* = -n_2 \operatorname{sh} \left( \frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \left( n_1 s_0 \operatorname{sh} \left( \frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \right)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Проінтегруємо рівність (2.3) по  $\rho J_0(\mu_n \rho) d\rho$

$$\int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta d\rho =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R}{s-s_3} \left\langle \frac{\varepsilon J_1(\mu_n)}{h\theta_6 \mu_n} \left[ \frac{1}{v_1} + \frac{s}{v_2} \right] \chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^3 \cos(\gamma_k h) J_0(\mu_k) \left[ \frac{\tilde{A}_k^* \gamma_k v_1^3 R I_1(\gamma_k v_1 R)}{\mu_n^2 + \gamma_k^2 n_1 R^2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{s \gamma_k v_2^3 R I_1(\gamma_k v_2 R)}{\mu_n^2 + \gamma_k^2 n_2 R^2} \right] + \frac{\mu_k^4 \varepsilon \omega_2}{2R^4 n_1} J_0^2(\mu_k) \right\} \times \\
&\quad \times \left[ \frac{1}{v_1} \left( E_k^* \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k h}{Rv_1} \right) + \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{Rv_1} \right) \right) + \frac{s}{v_2} \left( N_k^* \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k h}{Rv_2} \right) + M_k^* \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{Rv_2} \right) \right) \right] F_k^* \chi_k \Bigg\rangle
\end{aligned}$$

та врахуємо інтеграли

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \psi(\eta, \mu_k) J_1(\eta) d\eta &= \int_0^1 \rho J_0(\mu_k \rho) \int_0^{\infty} \eta J_0(\eta \rho) d\eta d\rho = \psi(0, \mu_k); \quad \int_0^{\infty} \psi(\eta, 0) J_1(\eta) d\eta = 1; \\
\int_0^{\infty} \eta \psi(\eta, \mu_k) \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) J_0(\eta \rho) d\rho d\eta &= \psi(\mu_n, \mu_k).
\end{aligned}$$

Отримаємо нескінченну систему для знаходження невідомих  $\chi_0, \chi_k$ , що входять до (1.2), (1.9), (1.10), (2.2) та (2.3):

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_{kn} \chi_n &= \tilde{\beta}_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad \left( \tilde{\alpha}_0 = \varepsilon \left( \frac{R(v_2 + s)}{2hv_1 v_2 \theta_6 (s - s_3)} - \frac{2\omega_2}{\pi n_1} \right); \tilde{\alpha}_{00} = 0; \right. \\
\tilde{\alpha}_{k0} &= \frac{2\varepsilon \omega_2}{\pi n_1} \psi(0, \mu_k); \quad \tilde{\beta}_0 = -\frac{2\varepsilon \omega_2}{\pi n_1}; \quad \tilde{\beta}_k = -\frac{2\varepsilon \omega_2}{\pi n_1} \psi(0, \mu_k); \quad \left. (2.5) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_k &= \sum_{k=1}^{\infty} F_k^* \frac{\mu_k}{R} \left[ \frac{m_1}{n_1} \left( \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k h}{Rv_1} \right) + E_k^* \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{Rv_1} \right) \right) + \frac{m_2}{n_2} \left( N_k^* \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{Rv_2} \right) + M_k^* \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k h}{Rv_2} \right) \right) \right] \psi(0, \mu_k); \\
\tilde{\alpha}_{0n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \gamma_n^4 \cos(\gamma_n h) R J_0(\mu_n) \left[ \frac{\tilde{A}_n^* v_1^3 I_1(\gamma_n v_1 R)}{\mu_n^2 + \gamma_n^2 n_1 R^2} + \frac{s v_2^3 I_1(\gamma_n v_2 R)}{\mu_n^2 + \gamma_n^2 n_2 R^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu_n^4 \varepsilon \omega_2}{2R^4 n_1} J_0^2(\mu_n) \left[ \frac{1}{v_1} \left( E_n^* \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_n h}{Rv_1} \right) + \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_n h}{Rv_1} \right) \right) + \frac{s}{v_2} \left( N_n^* \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_n h}{Rv_2} \right) + M_n^* \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_n h}{Rv_2} \right) \right) \right] F_n^* \right\}; \\
\tilde{\alpha}_{kn} &= -\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F_n^* \frac{\mu_n}{R} \psi(\mu_k, \mu_n) \times \right. \\
&\quad \left. \times \left[ \frac{m_1}{n_1} \left( E_n^* \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_n h}{Rv_1} \right) + \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_n h}{Rv_1} \right) \right) + \frac{m_2}{n_2} \left( N_n^* \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_n h}{Rv_2} \right) + M_n^* \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_n h}{Rv_2} \right) \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Відзначимо, що коефіцієнти системи залежать від величин, що визначають структуру пружного потенціалу та висоту пружного штампa  $H$ .

Використавши умову рівноваги (1.8), встановимо зв'язок між осіданням та рівнодіючою навантаження  $P$  у вигляді

$$P = \frac{\pi \varepsilon R^2 C_{44} (1 + m_1) l_1 (v_2 + s v_1)}{v_2 v_1 h \theta_6}.$$

Визначивши невідомі сталі  $\chi_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2.5), обчислимо компоненти переміщень та напружень як у пружних півпросторах, так і у пружному штампі за формулами (1.10) та (1.12). Розв'язки представлені у вигляді рядів через нескінченну систему констант  $\chi_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ).

### §3. Числові результати.

Числовий аналіз представлений для потенціалу Трелоара (тіла неогуківського типу) при наступних параметрах:  $R=2\text{м}$ ;  $H=20\text{м}$ ;  $h=10\text{м}$ ;  $\varepsilon=10^{-6}\text{м}$ ;  $E=3,92\text{МПа}$ ;  $\lambda_1=0,7; 0,8; 0,9; 1; 1,1; 1,2$ . Алгоритм чисельного розв'язку базується на методі редукції та реалізований у вигляді програми в пакеті Maple.

Розподіл нормальних напружень  $Q_{33}^{(3)}/P$  у зоні контакту (при  $z_i = h/v_i$ ) та вздовж пружного циліндра представлені на рис. 2 та 3, відповідно.

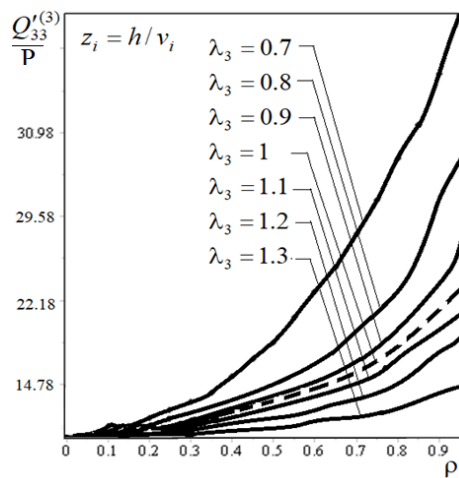


Рис. 2

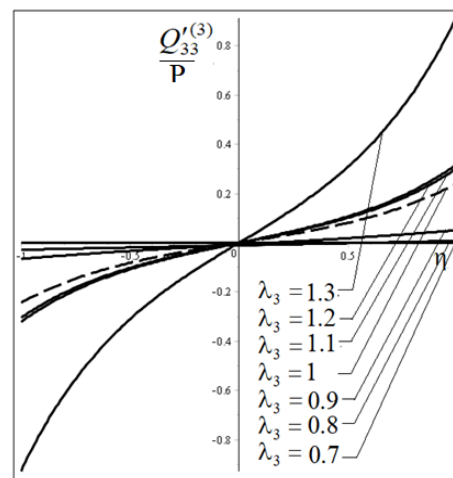


Рис. 3

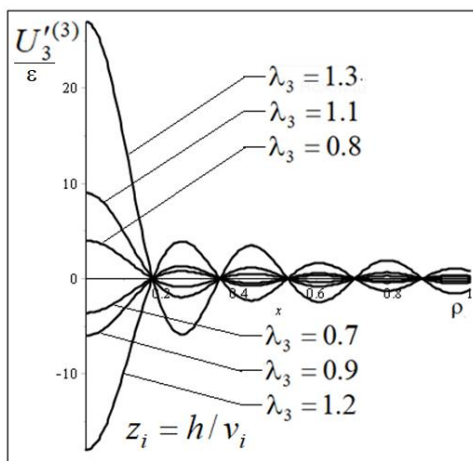


Рис. 4

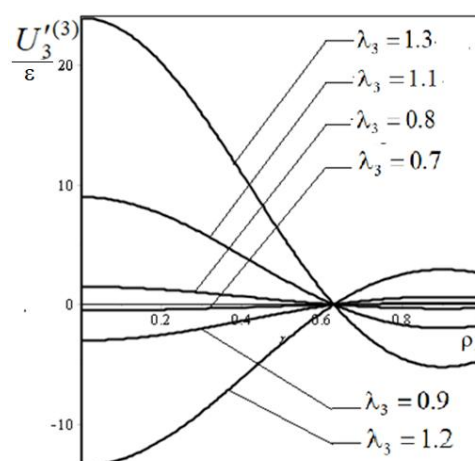


Рис. 5

Графіки для переміщень  $U_3^{(3)}/\varepsilon$  в зоні контакту (при  $z_i = h/v_i$ ) та вздовж поперечного перерізу пружного циліндра (при  $z_i = 0$ ) зображено на рис. 4 та 5, відповідно. Маємо зауважити, що на рис. 2 – 5 усі величини представлені у безрозмірних координатах.

Також, на рис. 2 та 3 пунктирна крива відповідає контакту без початкових напружень ( $\lambda_1 = 1$ ), а суцільна – з початковими напруженнями. Причому, у випадку відсутності початкових напружень ( $\lambda_1 = 1$ ) графік розподілу контактних напружень відповідає відомим розв'язкам контактної задачі про тиск двох півпросторів на циліндр [1].

Дискретна залежність числового значення рівнодійної навантаження  $P$  від коефіцієнта видовження  $\lambda_1$  представлена на рис. 6.

### Висновок.

На основі числового аналізу можна зробити висновок, що початкові напруження суттєво впливають на основні характеристики напружено-деформованого стану тіл, що контактують. Крім того, вплив початкових напружень на розподіл контактних характеристик пружних півпросторів та пружного циліндра полягає у тому, що:

1) у випадку стиску ( $\lambda_1 < 1$ ) початкові напруження у циліндрі призводять в зоні контакту до збільшення, а у випадку розтягу ( $\lambda_1 > 1$ ) – до зменшення контактних напружень;

2) з рис. 3 можна побачити, що чим ближче до центрального поперечного перерізу циліндричного штампа, тим швидше нормальні напруження  $Q_{33}^{(3)}/P$  прямують до нуля;

3) з рис. 4 та 5 бачимо, що переміщення  $U_3^{(3)}/\varepsilon$  приймають значно більші значення ближче до осі циліндричного штампа, ніж до його бічної поверхні;

4) з рис. 6 можна зробити висновок, що значення рівнодійної навантаження  $P$  зменшуються із збільшенням коефіцієнта видовження  $\lambda_1$ , тобто при розтязі ( $\lambda_1 > 1$ ) сила  $P$  приймає більші значення, ніж при стиску ( $\lambda_1 < 1$ ).

Таким чином, можна відзначити значний вплив початкових напружень на контактну взаємодію двох пружних півпросторів та пружного циліндричного штампа. Отримані результати можуть бути використані у розрахунках конструкцій та деталей на міцність.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Наукова та науково-технічна діяльність наукових установ Національної академії наук України» (КПКВК 6541030).

**РЕЗЮМЕ.** Отримано розв'язок контактної задачі про взаємодію двох попередньо напружених півпросторів з пружним циліндричним штампом з початковими напруженнями без врахування сил тертя у випадку нерівних коренів характеристичного рівняння. Дослідження проведено в загальному вигляді для теорії великих початкових (кінцевих) деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій в рамках лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу. В дослідженні задачі використано перетворення Ханкеля, парні інтегральні рівняння, ортогональні поліноми та інші методи теорії контактних задач лінеаризованої теорії пружності. Числовий аналіз представлено для потенціалу Трелоара у вигляді графіків.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактна задача, циліндричний штамп, півпростір.

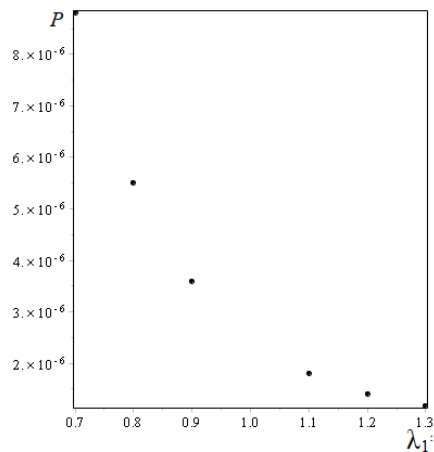


Рис. 6

1. Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости – Львов: Вища школа, 1981. – 136 с.
2. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Saarbrücken: LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. – 468 с.
3. Гузь А.Н., Рудницкий В.Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. – Хмельницкий: Вид. ПП Мельник, 2006. – 710 с.
4. Филиппова Л.М. Пространственная контактная задача для предварительно напряженного упругого тела // Прикл. математика и механика. – 1978. – **42**, № 6. – С. 1080 – 1084.
5. Aleksandrov V.M., Arutyunyan N.Ky. Contact problems for prestressed deformed bodies. // Sov. Appl. Mech. – 1984. – **20**, N 3. – P. 209 – 215.
6. Babych S.Yu., Glukhov Y.P. On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses. // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 1. – P. 43 – 52.
7. Babych S.Yu., Yarets'ka N.O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 3. – P. 297 – 305.
8. Bagno O.M. Effect of Finite Initial Strains on the Wave Process in the System of an Incompressible Half-Space and an Ideal Liquid Layer // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 6. – P. 644 – 654.
9. Dhaliwal R.S., Singh B.M., Rokne J.G. Axisymmetric contact and crack problems for a initially stressed Neo-Hookean elastic layer // Int. J. Eng. Sci. – 1980. – **18**, N 1. – P. 169 – 179.
10. Guz A.N. Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics. – Cham: Springer, 2021. – 366 p.
11. Guz A.N., Bagno A.M. Influence of Prestresses on Normal Waves in an Elastic Compressible Half-Space Interacting with a Layer of a Compressible Ideal Fluid // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 6. – P. 585 – 595.
12. Guz A.N., Bagno A.M. Influence of Prestresses on Quasi-Lamb Modes in Hydroelastic Waveguides // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 1. – P. 1 – 12.
13. Guz A.N. Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review). III // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 4. – P. 343 – 415.
14. Guz A.N. On General List of References to the Monograph “Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics” // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58**, N 1. – P. 1 – 29.
15. Kaminsky A.O., Kurchakov E.E. Tensor-Nonlinear Constitutive Equations for an Elastic Body with Primary Anisotropy // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58**, N 2. – P. 154 – 159.
16. Kurashige M. Circular crack problem for initially stressed neo-Hookean solid // ZAMM. – 1969. – **49**, N 8. – P. 671 – 678.
17. Muravskii G.B. Response of an elastic half-space with power-law nonhomogeneity to static loads.// Arch Appl Mech. – 2008. – **78**. – P. 965–987.
18. Rudnitskii V.B., Dikhtyaruk N.N. Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 2. – P. 149 – 155.
19. Semenyuk N.P., Zhukova N.B. Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 1. – P. 40 – 53.
20. Yaretskaya N. A. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 5. – P. 539 – 543.

Надійшла 16.09.2022

Затверджена до друку 28.03.2023