МАШИНОЗНАВСТВО ТА ОБРОБКА МАТЕРІАЛІВ В МАШИНОБУДУВАННІ

УДК 624.13

В.В. КОВТУН, О.А. ДОРОФЄЄВ
Хмельницький національний університет

ВИКОРИСТАННЯ АПАРАТУ ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОСТІ ДЛЯ ОЦІНКИ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ДИСКРЕТНОГО СЕРЕДОВИЩА

В статті обґрунтовується можливість використання апарату теорії пластичності для оцінки напружено-деформованого стану дискретного середовища з урахуванням принципових відмінностей законів деформування пластичних і дискретних середовищ.

Ключові слова: дискретне середовище; внутрішнє кулонове тертя; дилатансія.

V.V. KOVTUN, O.A. DOROFEYEV
Khmelnytskiy National University

USING THE APPARATUS OF THE THEORY OF PLASTICITY FOR THE EVALUATION OF THE DEFLECTED MODE OF A DISCRETE MEDIUM

The possibility of using the theory of plasticity for the evaluation of the strained state of a discrete medium, taking into account the fundamental differences between the laws of plastic deformation and discrete media is proved in the article.

The most promising for this seems to be using plastic flow rheological models that take into account the specific features of discrete materials deformation such as the internal friction impact and dilatation.

There are three fundamental differences between discrete deformation of materials and plastic deformation of solids: the impact of internal Coulomb friction on the deformation process as in the extreme, and in untillimited states; dilatation and the significant impact on the nature of the material deformation which affects discrete type of stress-strain condition.

It was admitted that one of the possible reasons for failing the conditions of fields coaxiality characteristics can be discrepancy of structures in stress tensors and speed deformation. This assumption proves how to satisfy the condition of coaxiality characteristics in stress fields and speed deformation.

Keywords: discrete environment, internal Coulomb friction; dilatation.

Вступ

Дискретне середовище з позицій механіки деформівного тіла розглядається як область (континуум), що заповнена частинками твердого матеріалу: зернистого, сипкого, гранульованого, дисперсного і т.п. Частинки взаємодіють між собою через безліч довільно орієнтованих контактів, які не сприймають розтяжних зусиль. Таке середовище опирається зовнішнім силовим чи кінематичним збуренням тільки завдяки силам кулонівського тертя, що виникають в місцях контакту частинок, і які пропорційні нормальним притискним контактним зусиллям. Іншими словами, опір такого середовища дії зовнішніх навантажень створюється тільки силами внутрішнього сухого тертя.

На відміну від статики сипкого середовища, дискретне середовище вважається таким, що деформується. Його деформації відбуваються переважно за рахунок взаємного проковзування жорстких частинок.

Інженерні розрахунки, пов’язані з оцінкою взаємодії дискретного середовища і контактуючими з ним конструкціями, зводяться до аналізу напружено-деформованого стану середовища від дії зовнішніх силових чи кінематичних збурень. Ці розрахунки можуть бути здійснені тільки з використанням реологічної моделі дискретного середовища, яка описувала б його стан на усіх етапах деформування.

Аналіз відомих реологічних моделей механіки деформівних середовищ [1] показав, що найбільш перспективними щодо дискретного середовища можна вважати моделі теорії пластичності з особливими, характерними для дискретних матеріалів, умовами пластичності. Для впровадження таких моделей необхідно встановити характерні особливості законів деформування дискретних матеріалів і їх відповідність законам пластичного деформування твердих тіл, покладених в основу класичної теорії пластичності.

Постановка задачі досліджень

Метою описаних в статті досліджень є обґрунтування можливості використання апарату теорії пластичності для аналізу напружено-деформованого стану дискретного середовища.

Стан проблеми

Теорія пластичності є відносно новою гілкою механіки деформівного тіла. Вона розглядає стан твердих тіл, переважно металів, за межами пружного деформування. Визначальні співвідношення, що покладені в основу теорії пластичності, носять феноменологічний характер, тобто поєднують теоретичні положення механіки твердого деформівного тіла з експериментально встановленими законами пластичного деформування твердих тіл.

У формулюванні задач теорії пластичності використовуються три групи рівнянь: статичні диференціальні рівняння, які забезпечують виконання умови рівноваги; геометричні рівняння нерозривності, що відображають умову суцільності середовища; а також фізичні рівняння залежності напруженого і деформованого станів, які описують експериментально встановлені закони деформування твердих тіл за межами пружності.

Для обґрунтування можливості використання апарату теорії пластичності щодо дискретних матеріалів зіставимо вихідні положення теорії пластичності з особливостями деформування дискретних матеріалів.

1. В усіх теоріях механіки твердого деформівного тіла приймається фундаментальне припущення, що матеріал незалежно від його кристалічної чи молекулярної структури вважається суцільним і однорідним. Гіпотеза про суцільність використовується в моделях механіки ґрунтів та зернистих матеріалів, які по суті є макродискретними матеріалами, за умови що характерний розмір частинок матеріалу на порядок менший характерних розмірів розрахункової області. Вказана умова обґрунтовує можливість прийняти гіпотезу квазісуцільності щодо дискретного середовища. Це дозволяє перейти від розгляду зусиль та взаємних переміщень в контактах суміжних частинок до атрибутів суцільного середовища – напружень та деформацій в кожній точці розрахункової області і безпосередньо використовувати рівняння рівноваги і нерозривності в формі, що прийнята в теорії пластичності, при побудові реологічної моделі дискретного середовища.

2. Зіставимо природу залишкових (пластичних) деформацій металів і дискретних матеріалів. Пластичне деформування металів відбувається за рахунок зсувів макрокристалів. Опір цим зсувам чинять граничні дотичні напруження, що виникають по площинках зсуву. Аналогічно цьому залишкові деформації дискретних матеріалів виникають у результаті взаємного проковзування не зв'язаних між собою макрочастинок. Опір таким деформаціям чинять тільки сили внутрішнього сухого тертя. Вони асоціюються з граничними дотичними напруженнями, які згідно закону Амонтона – Кулона залежать від нормальних стискуючих напружень.

Отже, природа пластичних деформацій металів і деформацій проковзування дискретного середовища аналогічна. Це ще раз свідчить про принципову можливість використання апарату теорії пластичності для описання напружено-деформованого стану дискретного середовища.

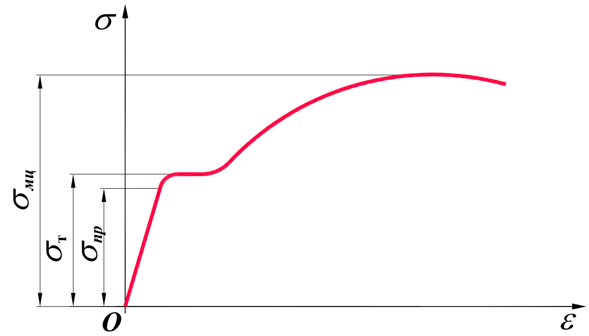


Рис. 1. Діаграма деформування маловуглецевої сталі

3. Для формування рівнянь третьої групи – фізичних рівнянь, в теорії пластичності передбачається встановлення законів пластичного деформування конкретних матеріалів за результатами спеціальних випробувань їх зразків. Враховуючи надзвичайну складність випробувань зразків в умовах довільного складного напруженого стану, закони пластичного деформування найчастіше досліджуються за результатами випробувань зразків матеріалу в умовах простого лінійного стану (на осьовий розтяг або чистий зсув), а результати згідно гіпотези Людвіга (про існування єдиної кривої деформування для усіх видів напруженого стану) переносяться на будь-який складний напружений стан. Такий підхід можна проілюструвати на прикладі класичного матеріалу – маловуглецевої сталі. Діаграма деформування зразка сталі у випадку його осьового розтягу (рис. 1) має складну форму і характеризується трьома параметрами: границею пружності $\sigma_{пр}$; границею текучості $\sigma_{\text{т}}$ і границею міцності $\sigma_{мц}$.

Особливості деформування в умовах лінійного стану переносяться на довільний складний напружений стан. У цьому випадку замість кривої деформування $\sigma = f(\varepsilon)$ розглядається умовна гіперповерхня деформування в багатовимірному просторі компонентів тензора напружень $\{\sigma_{ij}\}$, головних напружень $\{\sigma_i\}$ або базових інваріантів $\{J_i^{\sigma}\}$ і відповідних їм деформацій.

На рисунку 2 зображені три гіперповерхні Σ_1, Σ_2, Σ_3 в умовному просторі головних напружень – деформацій. Поверхня Σ_1 обмежує область пружних деформацій, поверхня Σ_2 відповідає початку пластичного деформування, а перехід матеріалу у граничний стан описується поверхнею Σ_3. Координати точок перетину поверхонь з головними осями відповідають границям пружності $\sigma_{пр}$, текучості $\sigma_{\text{т}}$ і міцності $\sigma_{мц}$.

При навантаженні зразка за довільною траєкторією *OA* поверхня навантаження поступово буде співпадати з поверхнями, які обмежують зони пружного, пружно-пластичного і граничного деформування. Характер цих поверхонь в складному напружено-деформованому стані, навіть для металів, вивчений недостатньо. Тому в теорії пластичності переважно розглядаються відносно прості плоскі та вісесиметричні задачі, для яких закони пластичності можуть бути встановлені за результатами експериментів саме в цих видах напруженого стану.

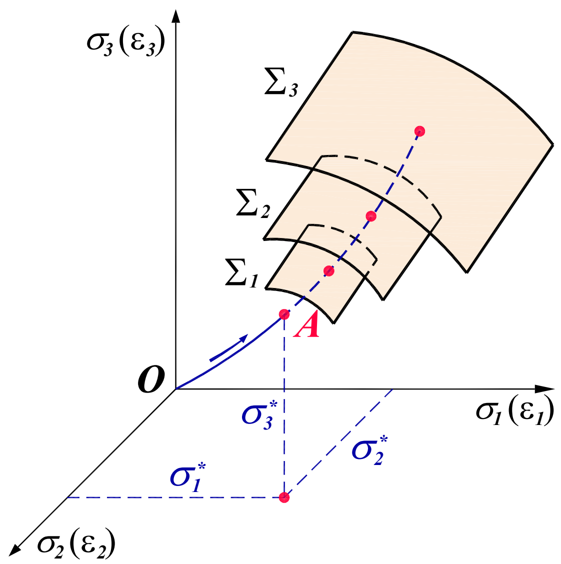


Рис. 2. Поверхні деформування твердих тіл

Для практичного використання в інженерних розрахунках експериментально встановлені закони деформування записують у вигляді залежностей між інваріантами тензорів $\left(J_i^{\sigma} - J_i^{\varepsilon}\right)$.

Описаний підхід до встановлення законів пластичного деформування металів не може бути безпосередньо застосованим до дискретних матеріалів у зв'язку з принциповими відмінностями структури цих матеріалів і твердих тіл.

Перш за все, зразки дискретного матеріалу неможливо випробувати в умовах простого лінійного напруженого стану на осьовий розтяг або стиск, які в теорії пластичності вважаються еталонними довільному складному напруженому стану. Для дискретних матеріалів за еталонні можуть бути прийняті стабілометричні випробування циліндричних зразків при всебічному гідростатичному обтискуванні, або випробування призматичних зразків в умовах плоскої деформації в області стискуючих напружень [2].

Аналогом пластичних деформацій металів є залишкові деформації, викликані взаємним проковзуванням частинок дискретного матеріалу. Спеціальні експериментальні дослідження А. Дрешера [3] на штучно створених зразках гранульованого матеріалу, а також випробування зразків сухого кварцового піску на перекошування в умовах плоскої деформації [4], показують, що деформації проковзування в дискретних матеріалах відбуваються з самого початку навантаження. Тому поняття границі пружності та границі текучості для цих матеріалів не мають змісту, а поверхні Σ_1 і Σ_2 "стягуються" в точку. Отже, завданням експериментальних досліджень є встановлення характеру граничної поверхні Σ_3 дискретних матеріалів і законів їх деформування у до граничній та граничній стадіях у просторі інваріантів напружень і деформацій.

Характер поверхні Σ_3 для пластичних твердих матеріалів визначається в просторі напружень умовами Сен-Венана або Мізеса. Обидві умови зв'язують настання граничного стану з досягненням величиною максимальних або октаедричних дотичних напружень границі текучості, яка визначається за результатами випробування зразків на осьовий розтяг або чистий зсув.

Граничний стан дискретного матеріалу пов'язується не з дотичними напруженнями $\tau_{гр}$, а з граничним відношенням дотичних τ і нормальних σ напружень (прояв внутрішнього тертя) і описується умовами Мора – Кулона (аналог умови Сен-Венана) або А. Боткіна (аналог умови Мізеса) [5]. Для доведення можливості використання зазначених умов як критеріїв переходу дискретного матеріалу у граничний стан необхідно провести випробування зразків матеріалу при різних видах напружено-деформованого стану.

Аналіз результатів таких досліджень щодо незв'язних ґрунтів [6] показав, що при зміні виду напружено-деформованого стану дискретного матеріалу найбільш стабільною залишається гранична умова Мора – Кулона. Саме ця умова використовується в більшості інженерних розрахунків щодо визначення граничних навантажень для області сипкого середовища.

Апарат теорії пластичності використовується в інженерній механіці для розв'язання задач двох класів [7]: визначення величин граничного навантаження і оцінка фактичного (робочого) напружено-деформованого стану розрахункової області на усіх етапах її деформування.

Задачі знаходження граничних навантажень відносяться до класу статично визначуваних, оскільки для формулювання замкненої системи рівнянь в них не залучаються геометричні рівняння нерозривності деформацій, а використовуються тільки статичні рівняння рівноваги та умова настання граничного стану, сформульовані в напруженнях.

Можливість розв’язання задач по визначенню граничних навантажень щодо дискретного середовища з використанням граничної умови Мора – Кулона чудово продемонстрована В.В. Соколовським [8] на прикладі сипкого середовища.

Більш складними є задачі оцінки фактичних напруженого та деформованого станів в до граничній і граничній областях. Постановка таких задач вимагає проведення спеціальних експериментальних досліджень для встановлення законів деформування матеріалу на усіх етапах навантаження у формі залежностей між тензорами напружень і тензором деформацій або швидкостей деформацій. Ці залежності формулюють третю групу "фізичних" рівнянь, які разом зі статичними і геометричними співвідношеннями утворюють замкнену систему розв’язуваних рівнянь.

В усіх теоріях механіки твердого деформівного тіла тензор напружень $\{\sigma\}$ і аналогічний йому тензор малих деформацій $\{\varepsilon\}$ представляють як суму двох частин: кульових тензорів $\{\sigma_0\}$, $\{\varepsilon_0\}$ і девіаторів $\{D\}_\sigma$, $\{D\}_\varepsilon$. При цьому вважається, що об’ємні деформації $\{\varepsilon_0\}$ пов’язані тільки з кульовим тензором напружень $\{\sigma_0\}$, а деформації формозміни $\{D\}_\varepsilon$ – тільки з девіатором $\{D\}_\sigma$

$$\{\varepsilon_0\} \quad \leftrightarrow \quad \{\sigma_0\};$$
$$\{D\}_\sigma \quad \leftrightarrow \quad \{D\}_\varepsilon .$$

Ці зв’язки оформлюються у вигляді експериментально встановлених залежностей між інваріантами тензорів напружень і деформацій:

$$J_1^\varepsilon = f_1\left(J_1^\sigma\right) \text{ – закон об’ємного деформування;} \tag{1}$$

$$J_2^\varepsilon = f_2\left(J_2^\sigma\right) \text{ – закон формозміни.} \tag{2}$$

Тобто, закони об’ємного деформування і закон формозміни вважаються незалежними.

Зв’язок між третіми інваріантами $\left(J_3^\varepsilon - J_3^\sigma\right)$, що відображає вплив виду напружено-деформованого стану на закономірності пластичного деформування твердого тіла, ще недостатньо вивчений.

Дослідження, проведені багатьма науковцями з дискретними матеріалами, встановили три принципові відмінності деформування цих матеріалів від пластичного деформування твердих тіл [9].

1. Деформації формозміни $\{D\}_\varepsilon$ залежать не тільки від девіатора $\{D\}_\sigma$, але й від кульового тензора $\{\sigma_0\}$. Ця залежність відображає першу принципову відмінність дискретних матеріалів – <u>вплив внутрішнього кулонівського тертя</u> на процес їх деформування як у граничному, так і в до граничному станах.

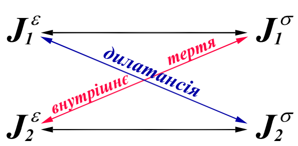
2. Об’ємні деформації дискретних матеріалів відбуваються навіть при сталих нормальних напруженнях за рахунок зсувів. Залежність об’ємних деформацій від зсувів або від дотичних напружень, що їх спричиняють, вперше описана О. Рейнольдсом [10] і названа <u>дилатансією</u>. <u>Прояв дилатансії</u> виражається у залежності об’ємних деформацій $\{\varepsilon_0\}$ не тільки від кульового тензора $\{\sigma_0\}$, але й від девіатора $\{D\}_\sigma$.

3. На характер деформування дискретного матеріалу суттєво впливає вид напружено-деформованого стану, в якому він працює. Враховуючи надзвичайну складність вивчення цієї проблеми, можна запропонувати проводити експерименти для встановлення законів деформування дискретних матеріалів в тих самих видах напружено-деформованого стану, в яких матеріал працює в реальних умовах, наприклад, в умовах плоскої деформації. Такий підхід дозволяє не враховувати залежність між третіми інваріантами, $J_3^\varepsilon = f_3\left(J_3^\sigma\right)$ і формулювати закони деформування дискретних матеріалів як залежності тільки між першими двома інваріантами. При цьому закони деформування дискретних матеріалів відображають вплив сухого тертя та дилатансії і описуються не кривими (1), (2), а поверхнями деформування

$$J_1^\varepsilon = \psi_1\left(J_1^\sigma, J_2^\sigma\right) \text{ – закон об’ємного деформування;} \tag{3}$$

$$J_2^\varepsilon = \psi_2\left(J_2^\sigma, J_1^\sigma\right) \text{ – закон формозміни.} \tag{4}$$

Особливості представлення законів деформування дискретних матеріалів можна показати схематично у формі зв’язків між першими та другими інваріантами тензорів.



Інваріантні співвідношення (1), (2), що описують закони пластичного деформування металів, використовують для формулювання фізичних рівнянь теорії пластичності деформаційного типу. Ці рівняння записують у формі залежностей між компонентами напружень і досягнутих деформацій аналогічно прийнятим в нелінійній теорії пружності.

В роботах [9], [11] показана можливість використання більш складних співвідношень (3), (4), які відображають вплив внутрішнього тертя і прояв дилатансії, для формулювання фізичних рівнянь плоскої задачі механіки дискретного середовища. Це дозволяє використовувати достатньо апробований апарат теорії пластичності деформаційного типу для оцінки напружено-деформованого стану дискретного середовища у до граничній стадії його деформування і розв'язувати важливі для інженерної практики задачі.

Після досягнення граничного стану середовище продовжує деформуватись вже за іншими законами – законами пластичного плину. Закони деформування в загранечній області описуються особливими співвідношеннями теорії пластичного плину [12], які пов'язують напруження $\{\sigma\}$ не з досягнутими деформаціями $\{\varepsilon\}$, а з швидкостями їх приростів $\{d\varepsilon\}$.

Для цього вводиться потенціальна функція $\Phi(\{\sigma_{ij}\})$, через яку визначають швидкості приросту деформацій

$$\{d\varepsilon_{ij}\} = d\lambda \frac{\partial \Phi\{\sigma\}}{\partial\{\sigma_{ij}\}}. \tag{5}$$

Вибір характеру потенціальної функції для конкретного класу матеріалів є принципово важливою проблемою, вирішення якої вимагає проведення спеціальних експериментальних та теоретичних досліджень.

Якщо за потенціальну функцію прийняти умову граничного стану, одержані з (5) співвідношення будуть описувати асоційований закон пластичного плину, усі інші – неасоційовані з граничною умовою закони пластичного плину.

В класичній теорії пластичності використовуються потенціальні функції, що асоціюються з характерними для металів граничними умовами Сен-Венана чи Мізеса.

Логічно припустити, що для описання деформацій плину у дискретному середовищі, можуть бути використані характерні для цього середовища граничні умови Мора – Кулона чи Боткіна.

Можливість використання граничної умови Мора – Кулона як потенціальної функції для плоскої деформації сипкого середовища вперше продемонстровано Д. Друкером та У. Прагером [13]. Одержані ними співвідношення "напруження – швидкості деформацій" добре описують вплив на граничне та загранечне деформування внутрішнього кулонівського тертя (перша принципова особливість дискретних матеріалів). Щодо достовірності описання цією моделлю прояву дилатансії (друга особливість дискретних матеріалів), у багатьох науковців виникли сумніви [14].

Перш за все, співвідношення Друкера – Прагера передбачають дилатансію тільки одного знаку (збільшення об'єму). В експериментах же з пухкими пісками зафіксовано також і їх ущільнення.

По-друге, теоретичні співвідношення передбачають, що швидкість дилатансії $\lambda = \dfrac{d\varepsilon_0}{d\tau} = \sin\varphi$, яка для сухих пісків середньої щільності становить приблизно $\lambda \approx \sin 30^\circ = 0{,}5$.

За результатами спеціально проведених досліджень А.С. Строганов (1956) встановив інтервал зміни швидкості дилатансії від $\lambda = 0{,}239$ для щільних пісків до $\lambda = 0{,}061$ для пухких. В дослідах P. Roscoe (1970) інтервал швидкості дилатансії становив від $\lambda = 0{,}59$ до $\lambda = 0{,}14$, в дослідах С. Фрідмана інтервал зміни λ – від $\lambda = 0{,}35$ до $\lambda = 0{,}1$.

Вказані розбіжності свідчать про невиконання фундаментального положення механіки деформівного тіла щодо аксиальності тензорів напружень та деформацій. Їх намагались виправити шляхом розробки спеціальних неасоційованих моделей пластичного плину, основаних на довільному виборі потенціальної функції. За результатами аналізу моделей цього класу [14], [15] можна зробити висновок, що вони не дозволяють адекватно описати специфічні особливості деформування дискретного середовища. У зв'язку з цим пропонувались інші шляхи вирішення проблеми не коаксіальності характеристик полів граничних напружень і швидкостей деформацій.

На наш погляд, однією з можливих причин невиконання умови коаксіальності полів характеристик може бути невідповідність структур тензорів напружень і швидкостей деформацій.

В класичній теорії пластичності перехід матеріалу у граничний стан за умовою Сен-Венана пов'язується з досягненням величини максимального дотичного напруження $\tau_{\max}$ границі текучості. Максимальні дотичні напруження виникають по площинках, нахилених до головних під кутом $\pm\pi/4$. Ці площинки утворюють взаємно ортогональні характеристичні поверхні, на яких виконується гранична умова Сен-Венана. Оскільки максимальні деформації зсуву виникають по цих самих поверхнях, характеристики поля напружень співпадають з характеристиками поля швидкостей деформацій, які асоціюються з поверхнями ковзання. Отже, в класичній теорії пластичності характеристики полів швидкостей деформацій збігаються з ортогональною сіткою характеристик граничного поля напружень за умовою Сен-Венана, що забезпечує виконання фундаментальної умови їх коаксіальності.

В моделі Друкера – Прагера гранична умова Сен-Венана замінена на умову Мора – Кулона, яка пов'язує настання граничного стану сипкого середовища не з величиною максимального дотичного напруження $\tau_{\max}$, а з максимальним відношенням напружень $\tau / \sigma = \mathrm{tg}\varphi$, або з максимальним кутом η відхилення повного напруження від нормалі, який у граничному стані досягає величини кута внутрішнього тертя $\eta_{\max} = \varphi$. Площинки з максимальним відношенням напружень, названі спряженими [16], нахилені до головних під кутами $\pi / 4 \pm \varphi$ і утворюють вже неортогональну сітку характеристичних поверхонь граничного поля напружень. Площинки ж максимальних зсувів згідно класичної теорії деформаційного стану нахилені до головних під кутами $\pm \pi / 4$ і представляються сіткою ортогональних характеристичних поверхонь поля швидкостей деформацій. Для виконання фундаментальної умови коаксиальності тензорів напружень і швидкостей деформації характеристичні поверхні цих полів повинні збігатися, що неможливо досягнути просто їх жорстким поворотом.

Умову коаксіальності характеристик полів напружень і швидкостей деформацій можна задовольнити, якщо відмовитись від "класичного" визначення деформацій зсуву γ_{xy}, як зміни кута між двома <u>ортогональними</u> напрямами *x*, *y*, замінивши його поняттям зсуву ν_{ri} між довільним напрямом r і головною віссю i (див. [17]).

Таке припущення не суперечить фундаментальним положенням механіки твердого деформівного тіла і за рахунок повної аналогії структур тензорів напружень і деформацій забезпечує виконання умови коаксіальності характеристик полів напружень і швидкостей деформацій у випадку їх неортогональності.

Звичайно, зроблене припущення потребує детального теоретичного аналізу та експериментального підтвердження.

Висновки

Приведені в статті результати аналізу дозволяють зробити висновок про можливість використання апарату теорії пластичності для описання напружено-деформованого стану дискретного середовища. Найбільш перспективним для цього представляється використання реологічних моделей пластичного плину, які враховують специфічні особливості закономірностей деформування дискретних матеріалів: вплив внутрішнього тертя та прояв дилатансії.

Література

1. Ковтун В.В. Вибір класу механічних моделей для описання деформування дискретного середовища / В.В. Ковтун, О.А. Дорофєєв //Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2014. –№3. – С. 142-146.

2. Ковтун В.В. Експериментальне обґрунтування вихідних положень механіки дискретного середовища і визначення розрахункових параметрів моделей / В.В. Ковтун, О.А. Дорофєєв //Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2011. –№3. – С. 20-27.

3. Дрешер А. Проверка механической модели течения гранулированного материала методами фотоупругости / А. Дрешер, Ж. до Йоселен де Йонг // Определяющие законы механики грунтов. – М.: Мир, 1975. – С. 144-165.

4. Ковтун В.В. Исследование характера нелинейных физических зависимостей несвязных грунтов / В.В. Ковтун // Сб. Основания и фундаменты. Вып. 8. – Киев: Будівельник, 1975. – С. 64–70.

5. Боткин А.И. О прочности сыпучих и хрупких материалов / А.И. Боткин // Известия ВНИИГ, т. 26. – Л.: Изд. АН СССР, 1942. – С. 205–236.

6. Ковтун В.В. Исследование прочности сыпучих материалов в условиях плоской деформации / В.В. Ковтун, Е.В. Багрий, В.Т. Бугаев // Будівельні конструкції. – 2004. – Вып. 61. – т. 1. – С. 109–116.

7. Качанов Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

8. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды / Соколовский В.В. – М.: Наука, 1960. – 272 с.

9. Ковтун В.В. Визначальні співвідношення механіки дискретного середовища / В.В. Ковтун // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2008. – №5. – С. 69–76.

10. Reynolds O. Experiments showing dilatancy, a property of granular material. Proc. Roy inst. 2, 1886, P. 354-363.

11. Багрій О.В. Плоска задача механіки дискретного середовища / О.В. Багрій, В.В. Ковтун // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2012. – №5. – С. 17–21.

12. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т. 2 / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1970. – 578 с.

13. Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design, – Quarterly of Applied Mathematics, 10, №2, P. 157-165 (1952).

14. Николаевский В.Н. Механические свойства грунтов и теория пластичности / В.Н. Николаевский // Механика твердых деформируемых тел (Итоги науки и техники). – 1972. – Т. 6. – С. 3–87.

15. Федоровский В.Г. Современные методы описания механических свойств грунтов / В.Г. Федоровский // Обзор ВНИИС, – М.: 1985. – 73 с.

16. Ковтун В.В. Напруження по потенціальних площинках ковзання у сипкому середовищі / В.В. Ковтун // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2010. – №1. – С. 7–12.

17. Ковтун В.В. Деформації вздовж потенціальних ліній ковзання у сипкому середовищі / В.В. Ковтун, О.А. Дорофєєв // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2010. – №5. – С. 142–150.

References

1. Kovtun V.V. Vybir klasu mekhanichnykh modeley dlya opysannya deformuvannya dyskretnoho seredovyshcha / V.V. Kovtun, O.A. Dorofyeyev //Visnyk Khmel'nyts'koho natsional'noho universytetu. – Tekhnichni nauky. – 2014. –#3. – S. 142-146.

2. Kovtun V.V. Eksperymental'ne obgruntuvannya vykhidnykh polozhen' mekhaniky dyskretnoho seredovyshcha i vyznachennya rozrakhunkovykh parametriv modeley / V.V. Kovtun, O.A. Dorofyeyev //Visnyk Khmel'nyts'koho natsional'noho universytetu. – Tekhnichni nauky. – 2011. –#3. – S. 20-27.

3. Dresher A. Proverka mekhanycheskoy modely techenyya hranulyrovannoho materyala metodamy fotoupruhosty / A. Dresher, Zh. do Yoselen de Yonh. / Opredelyayushchye zakonы mekhanyky hruntov. – M.: Myr, 1975. – S. 144-165.

4. Kovtun V.V. Yssledovanye kharaktera nelyneynыkh fyzycheskykh zavysymostey nesvyaznыkh hruntov. – Sb. Osnovanyya y fundamentы: Vыр. 8, Kyev: Budivel'nyk, 1975. – S.64-70.

5. Botkyn A.Y. O prochnosty sыpuchykh y khrupkykh materyalov // Yzvestyya VNYYH, t. 26. – L.: 1940. – S. 205-236. Yzd. AN SSSR, 1942. – 243 s.

6. Kovtun V.V. Yssledovanye prochnosty sыpuchykh materyalov v uslovyyakh ploskoy deformatsyy / V.V. Kovtun, E.V. Bahryy, V.T. Buhaev // Budivel'ni konstruktsiyi. – 2004. – Vyp. 61. – t. 1. – S. 109-116.

7. Kachanov L.M. Osnovы teoryy plastychnosty. – M.: Nauka, 1969. – 420 s.

8. Sokolovskyy V.V. Statyka sыpuchey sredы / Sokolovskyy V.V. – M.: Nauka, 1960. – 272 s.

9. Kovtun V.V. Vyznachal'ni spivvidnoshennya mekhaniky dyskretnoho seredovyshcha / V.V. Kovtun // Visnyk Khmel'nyts'koho natsional'noho universytetu. Tekhnichni nauky. – 2008. – #5. – S. 69-76.

10. Reynolds O. Experiments showing dilatancy, a property of granular material. Proc. Roy inst. 2, 1886, P. 354-363.

11. Bahriy O.V. Ploska zadacha mekhaniky dyskretnoho seredovyshcha / O.V. Bahriy, V.V. Kovtun // Visnyk Khmel'nyts'koho natsional'noho universytetu. Tekhnichni nauky. – 2012. – #5. – S. 17-21.

12. Sedov L.Y. Mekhanyka sploshnoy sredы, t. 2. – M.: Nauka, 1970. – 578 s.

13. Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design, – Quarterly of Applied Mathematics, 10, №2, P. 157-165 (1952).

14. Nykolaevskyy V.N. Mekhanycheskye svoystva hruntov y teoryya plastychnosty / V.N. Nykolaevskyy // Mekhanyka tverdыkh deformyruemыkh tel (Ytohy nauky y tekhnyky). – 1972. – t. 6. – S. 3-87.

15. Fedorovskyy V.H. Sovremennыe metodы opysanyya mekhanycheskykh svoystv hruntov // Obzor VNYYS, – M.: 1985. – 73 s.

16. Kovtun V.V. Napruzhennya po potentsial'nykh ploshchynkakh kovzannya u sypkomu seredovyshchi / V.V. Kovtun // Visnyk Khmel'nyts'koho natsional'noho universytetu. Tekhnichni nauky. – 2010. – #1. – S. 7-12.

17. Kovtun V.V. Deformatsiyi vzdovzh potentsial'nykh liniy kovzannya u sypkomu seredovyshchi / V.V. Kovtun, O.A. Dorofyeyev // Visnyk Khmel'nyts'koho natsional'noho universytetu. Tekhnichni nauky. – 2010. – #5. – S. 142-150.

Рецензія/Peer review : 2.5.2015 р. Надрукована/Printed :15.5.2015 р.
Стаття прорецензована редакційною колегією