

УДК 539.3

Н.А. Ярецкая

**КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЖЕСТКОГО КОЛЬЦЕВОГО
ШТАМПА И ПОЛУПРОСТРАНСТВА С НАЧАЛЬНЫМИ
(ОСТАТОЧНЫМИ) НАПРЯЖЕНИЯМИ.**

Хмельницкий национальный университет,

ул. Институтская, 11, 29016, Хмельницкий, Украина;

e-mail: massacran2@ukr.net

Abstract. The article is devoted to the research of task of contact interaction of the pressure of the stiff cylindrical annular punch on semispace with initial (residual) stresses without friction. It is solved for the case of unequal roots of the characteristic equation. In general, the research was carried out for the theory of great initial (ultimate) and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of linearized theory of elasticity with the elastic potential having arbitrary structure. Numerical analysis is presented in the form of graphs for the case of Treloar's potential.

Key words: the linearized elasticity theory, initial (residual) stresses, contact problem, annular punch, semispace.

Введение.

Прикладные проблемы современной техники и новейших технологий, связанные с необходимостью прогнозирования контактного поведения различных конструкций, стимулировали в последнее время развитие

различных математических моделей и методов контактной механики для тел с различными свойствами [9, 12, 13].

Одним из важных факторов при контактном взаимодействии тел является влияние начальных (остаточных) напряжений, которые практически всегда присутствуют в реальных конструкциях и деталях машин. Поэтому разработка эффективных методов расчета напряженно-деформированного состояния с учетом начальных деформаций [1, 2, 4 – 7, 14, 15] является актуальной и важной научно-технической проблемой. Существует также ряд других обобщающих публикаций [10, 11, 16], которые полностью или частично связанные с тематикой настоящей статьи.

Достаточно подробный обзор работ связанных с контактным давлением жестких штампов (в том числе и кольцевых) в случае отсутствия начальных напряжений приведен в монографии [8].

Контактное взаимодействие жестких и упругих штампов с предварительно напряженными телами представлено в [1, 2, 4 – 7, 13, 15]. Причем рассматриваются или упругие потенциалы конкретной структуры, или задача ставится в общем виде для сжимаемых (несжимаемых) тел с потенциалом произвольной структуры на основе линеаризованной теории упругости. В работе [2] рассмотрено решение контактной задачи о давлении жесткого кольцевого штампа сложной конфигурации на упругий слой с начальными напряжениями; при этом используется потенциал гармонического типа. Тут штамп образовано вращением вокруг общей оси двух веток парабол, сопряженных в вершинах отрезком прямой,

перпендикулярной к оси вращения (оси парабол, ограничивающие штамп, параллельные общей оси вращения).

В данной работе с использованием соотношений линеаризованной теории упругости [4 – 7, 13, 15] представлено решение новой осесимметричной пространственной контактной задачи о давлении жесткого кольцевого штампа с плоским основанием на полупространство с начальными (остаточными) напряжениями без учета сил трения для неравных корней разрешающего уравнения [6]. Исследование выполнено в общем виде для сжимаемых и несжимаемых тел для теории больших начальных деформаций и двух вариантов теории малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала.

Считаем, что начальное напряженно-деформированное состояние в полупространстве является однородным.

1. Постановка задачи и основные соотношения.

Пусть конечный жесткий кольцевой штамп с плоским основанием, геометрическая ось симметрии которого совпадает с осью u_3 цилиндрической системы координат (r, θ, u_3) , направлена внутрь полупространства (рис.1) и давит на полупространство с силой P , после возникновения там начального деформированного состояния. R_1, R_2 – соответственно внутренний и внешний радиусы штампа. Будем считать, что внешняя нагрузка приложена только к свободному торцу упругого штампа, под действием которого все точки торца штампа перемещаются в направлении оси симметрии u_3 на одну и ту же величину. Будем считать, что поверхности вне области контакта остаются

свободными от влияния внешних сил, а в зоне контакта перемещения и напряжения – непрерывные. Аналогичная задача, но уже для слоя, рассмотрена в работе [2].

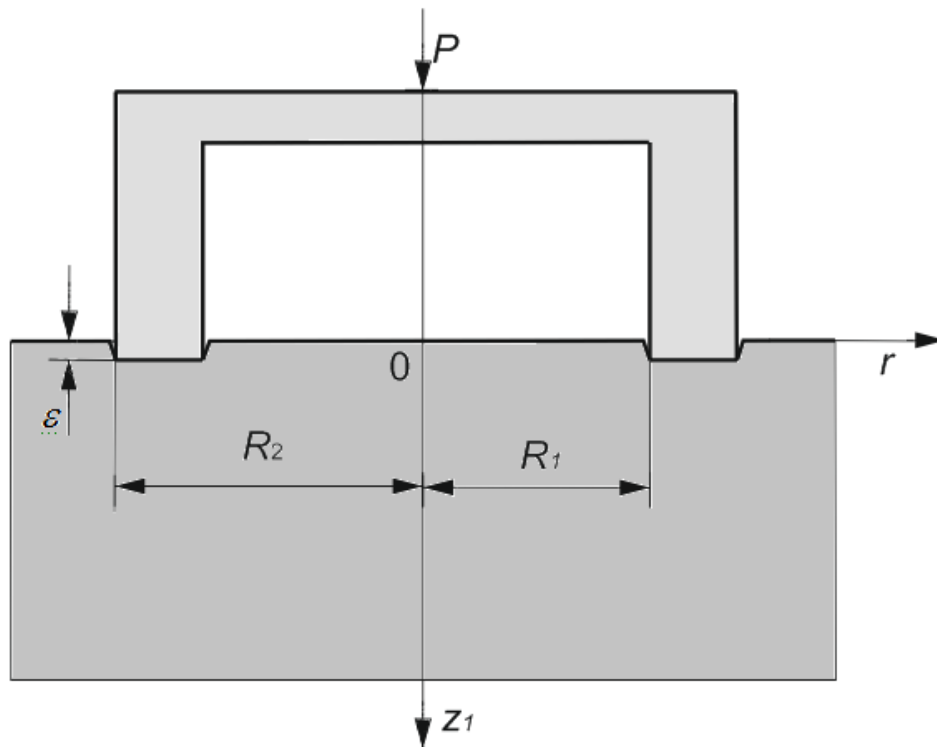


Рис. 1. Давление жесткого кольцевого штампа на полупространство с начальными (остаточными) напряжениями.

Предположим, что исходное состояние полупространства – однородное, и выполняются соотношения [6, 15]:

$$y_m = x_m + U_m^0, \quad U_m^0 = \delta_{mi} (\lambda_m - 1) \lambda_i^{-1} y_i \quad (i, m = \overline{1,3})$$

Тогда основное уравнение в перемещениях [6, 15] для сжимаемых тел имеет вид

$$L'_{m\alpha} U_\alpha = 0, \quad L'_{m\alpha} = \omega'_{ij\alpha\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta, \quad (i, m, \alpha, \beta = \overline{1,3}), \quad (1.1)$$

а для несжимаемых тел выполняется условие несжимаемости:

$$L'_{m\alpha} U_\alpha + q'_{am} \partial p' / \partial y_\alpha = 0, \quad L'_{m\alpha} = \kappa'_{im\alpha\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta, \quad q'_{ij} \partial U_j / \partial y_i = 0, \quad q'_{ij} = \lambda_i q_{ij}, \quad (i, j, m, \alpha, \beta = \overline{1,3}) \quad (1.2)$$

Выражения для определения составляющих тензора напряжений для сжимаемых и несжимаемых тел запишем в виде:

$$Q'_{ij} = \omega'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta}, \quad Q'_{ij} = \kappa_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta} + q'_{ij} p, \quad \omega'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta}, \quad \kappa'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \kappa_{ij\alpha\beta},$$

При однородных начальных напряжениях считаем, что имеет место $S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0$; $S_0^{33} = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. При этих условиях решения уравнений (1.1), (1.2) представим через цилиндрические координаты (r, θ, y_3) в таком виде:

$$(\Delta_1 + \xi_2'^2 \partial^2 / \partial y_3^2)(\Delta_1 + \xi_3'^2 \partial^2 / \partial y_3^2) \tilde{\chi} = 0, \quad (1.3)$$

где $\Delta_1 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r$.

Как отмечалось выше, в данной статье ограничимся случаем неравных корней $(\xi_2'^2 \neq \xi_3'^2)$ уравнения (1.3).

В системе круговых цилиндрических координат (r, θ, z_i) , где $z_i = v_i^{-1} y_3$, $v_i = \sqrt{n_i}$, $(i = 1, 2)$, $n_1 = \xi_2'^2$, $n_2 = \xi_3'^2$ такой постановке соответствуют граничные условия:

$$U_3 = \varepsilon, \quad R_1 < r < R_2 \quad (1.4)$$

$$Q_{33} = 0, \quad 0 < r < R_1, \quad R_2 < r < \infty \quad (1.5)$$

$$Q_{r,3} = 0, \quad 0 < r < \infty \quad (1.6)$$

$$U_3 = 0, \quad 0 < r < R_1, \quad R_2 < r < \infty \quad (1.7)$$

$$Q_{33} = -\sigma_z^0, \quad R_1 < r < R_2 \quad (1.8)$$

где $\sigma_z^0 = \frac{8\varepsilon\omega_3}{\pi\sqrt{1-r^2}}$, при $R_1 < r < R_2$ и $\sigma_z^0 = 0$, при $0 < r < R_1$, $R_2 < r < \infty$;

$\omega_3 = C_{44}(1+m_1)l_1(s-s_0)$, $s_0 = \frac{(1+m_2)}{(1+m_1)}$, $s = s_0 \frac{l_2}{l_1}$, значение коэффициентов m_i , c_{44} , l_i ,

зависят от вида начальных напряжений и характера упругого потенциала, и приведены в [6].

Условие равновесия, которое устанавливает связь между осадкой торца и равнодействующей нагрузки P имеет вид:

$$P = -2\pi \int_0^{R_0} r Q_{33}(0, r) dr. \quad (1.9)$$

2. Метод решения.

Напряженно-деформированное состояние в предварительно напряженном полупространстве для неравных корней, с учетом (1.4) – (1.8) и $z_1 = 0$, представим в виде [6, 15]:

$$Q_{33} = \frac{\omega_4}{R_0} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r) d\eta, \quad U_3 = -\frac{1}{\omega_5} \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta r) d\eta, \quad U_r = \omega_6 \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta r) d\eta \quad (2.1)$$

где $R_0 = R_1/R_2$, $\omega_4 = c_{44}(1+m_1)l_1(s-s_3)$, $\omega_5 = \frac{\nu_1}{m_1(s_2-s_3)}$, $s_2 = (m_2\nu_1)(m_1\nu_2)^{-1}$, $s_3 = s_0\nu_1\nu_2^{-1}$,

$\omega_6 = s_3 - 1$, $J_\nu(x)$ – функция Бесселя действительного аргумента,

$F(\eta)$ – неизвестная функция.

Удовлетворив условие (1.5) получим:

$$\frac{\omega_4}{R_0} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r) d\eta = 0, \quad 0 < r < R_1, \quad R_2 < r < \infty \quad (2.2)$$

Введем непрерывную неизвестную функцию $f(r)$, $R_1 < r < R_2$, что определяет распределение контактных напряжений под жестким кольцевым штампом, и продолжим (2.2) на промежуток $0 < r < \infty$ [2]:

$$\frac{\omega_4}{R_0} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r) d\eta = f(r) (\delta(r - R_1) - \delta(r - R_2)), \quad 0 < r < \infty \quad (2.3)$$

где $\delta(r)$ – функция Хэвисайда.

Учитывая непрерывность функции $f(r)$, где $f(r) = 0$ при $r \leq R_1$ и $r \geq R_2$, представим $f(r)$ в виде отрезка обобщенного ряда Фурье [2]:

$$L_n(r) = J_0\left(\frac{\gamma_n}{R_1} r\right) Y_0(\gamma_n) - J_0(\gamma_n) Y_0\left(\frac{\gamma_n}{R_1} r\right),$$

где γ_n – положительные корни уравнения $J_0\left(\frac{R_2}{R_1} \gamma_n\right) Y_0(\gamma_n) - J_0(\gamma_n) Y_0\left(\frac{R_2}{R_1} r\right) = 0$;

$Y_0(x)$ – функция Вебера.

Следовательно,

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n L_n(r),$$

где a_n – неизвестные коэффициенты.

Применив формулу обращения интегрального преобразования Ханкеля к соотношению (2.3), получаем выражение

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = \frac{R_0}{\omega_4} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(\eta), \quad (0 < \eta < \infty), \quad (2.4)$$

где

$$\Phi_n(\eta) = \int_{R_1}^{R_2} r L_n(r) J_0(\eta r) dr = \frac{\gamma_n \eta^2}{\gamma_n^2 - (\eta R_1)^2} \left\{ \frac{R_2}{R_1} \left[J_1\left(\frac{R_2}{R_1} \gamma_n\right) Y_0(\gamma_n) - Y_1\left(\frac{R_2}{R_1} \gamma_n\right) J_0(\gamma_n) \right] J_0(\eta R_2) - \right.$$

$$\left. -[J_1(\gamma_n)Y_0(\gamma_n) - Y_1(\gamma_n)J_0(\gamma_n)]J_0(\eta R_1) \right\}.$$

Используя второе выражение (2.1), соотношение (2.4) и граничное условие (1.4), получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(r) = \frac{\varepsilon}{k_1}, \quad (R_1 < r < R_2), \quad (2.5)$$

где $k_1 = -\frac{R_0}{\omega_4 \omega_5}$, $\varphi_n(r) = \int_0^{\infty} \Phi_n(\eta) J_0(\eta r) d\eta$

После определения a_n из системы (2.5) можно вычислить компоненты напряженно-деформированного состояния в упругом полупространстве по формулам (2.4), (2.1). А связь (1.9) между осадкой торца и равнодействующей нагрузкой P , будет иметь вид $P = 16\omega_3\varepsilon(1 - \sqrt{1 - R_0})$.

3. Числовые результаты.

В работе проведено численное решение системы (2.5) методом редукции для потенциала Трелоара при таких значениях параметров: $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $R_0 = \frac{R_1}{R_2} = 0.5$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $E = 3.92$, $\sigma = 0.47$, $\lambda_1 = 0.7; 0.8; 0.9; 1; 1.1; 1.2; 1.3$, где $0 \leq r \leq R_0$.

Алгоритм решения реализован в виде программы в пакете Maple 15.

На рис. 2, 3 представлены, соответственно, распределения нормального контактного напряжения $\frac{1}{\varepsilon} Q_{33}$ и радиального перемещения $\frac{1}{\varepsilon} U_r$ под штампом в зоне контакта в безразмерных координатах. Причем, значениям коэффициентов удлинения λ_1 соответствуют кривые снизу вверх по

возрастанию λ_1 . Пунктирные кривые соответствуют полупространству без начальных напряжений ($\lambda_1=1$), а сплошные – с начальными напряжениями.

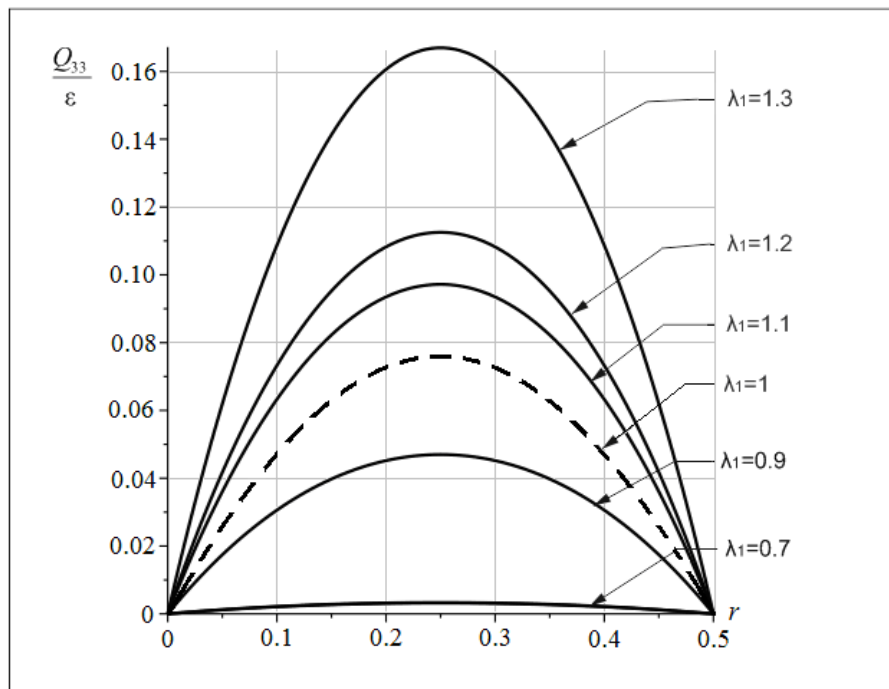


Рис. 2. Контактные напряжения Q_{33} , потенциал Трелоара.

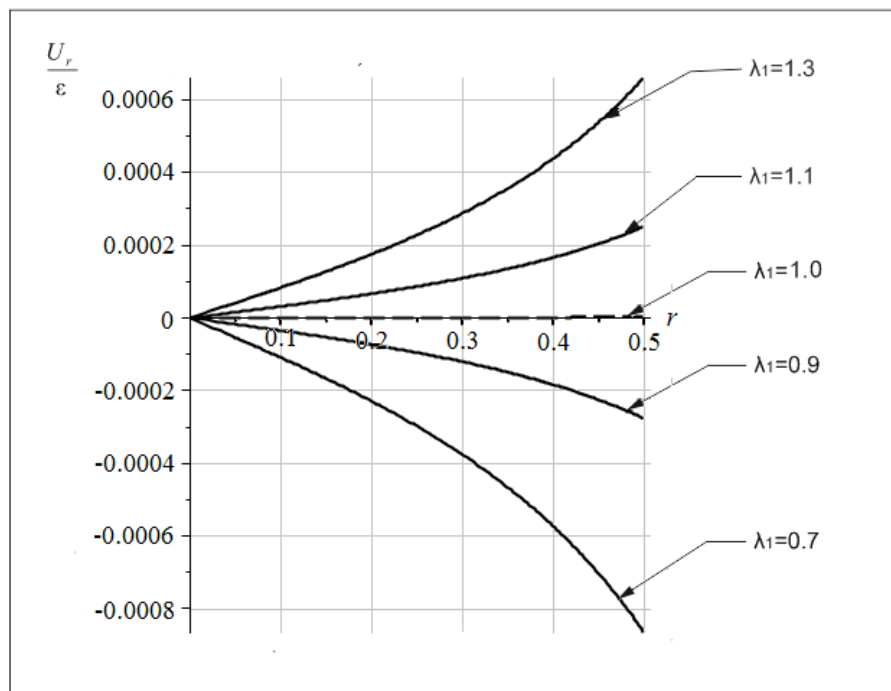


Рис. 3. Контактные перемещения U_r , потенциал Трелоара.

Заключение.

На основе численного анализа можно увидеть, что максимальные по модулю значения контактных напряжений (рис.2) достигаются в точках несколько близких к середине области контакта, в отличии от случая равных корней [2].

Кроме этого из численных исследований следует, что даже при постоянной внешней нагрузке изменение упругого потенциала приводит к изменению характера распределения контактных напряжений под жестким кольцевым штампом. А влияние начальных напряжений на напряженно-деформированное состояние упругого полупространства, в который вдавливаются жесткий кольцевой штамп, заключается в том, что:

1) Начальные напряжения в полупространстве приводят в случае сжатия ($\lambda_1 < 1$) к уменьшению напряжений, а в случае растяжения ($\lambda_1 > 1$) – к их увеличению;

2) В случае перемещений (рис.3) – наоборот. При сжатии ($\lambda_1 < 1$) начальные напряжения в полупространстве приводят к увеличению перемещений по абсолютной величине, а в случае растяжения ($\lambda_1 > 1$) – к их уменьшению;

3) В случае отсутствия начальных напряжений полученные результаты совпадают с классическими [3].

Таким образом, полученные результаты с учетом предварительно напряженного состояния при контактном взаимодействии жесткого штампа и

упругого полупространства могут быть использованы для регулирования контактных напряжений и перемещений при расчетах конструкций на прочность.

РЕЗЮМЕ.

Стаття присвячена дослідженню задачі контактної взаємодії тиску жорсткого циліндричного кільцевого штампа на півпростір з початковими (залишковими) напруженнями без врахування сил тертя у випадку нерівних коренів характеристичного рівняння. Дослідження представлено в загальному вигляді для теорії великих початкових (кінцевих) деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій в рамках лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу. Чисельний аналіз представлений у вигляді графіків для потенціалу Трелоара.

1. Александров В.М., Арутюнян Н.Х. Контактные задачи для преднапряженных деформируемых тел // Прикл. механика, 1984, т.20, №3.
2. Габрусєва І. Ю., Шелестовський Б. Г. Контактна взаємодія кільцевого штампа з попередньо напруженим ізотропним шаром // Вісник Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. – 54, № 3. – С. 138 – 146.
3. Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости – Львов: Вища школа, 1981. – 136 с.

4. *Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Германия, Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing. – 2015. – 468 с.
5. *Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями: Монография. – Кременчук «Press - Line». – 2007. – 795 с.
6. *Гузь А.Н., Рудницкий В.Б.* Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями [Текст]. – Хмельницький, вид. ПП Мельник. – 2006. – 710 с.
7. *Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б.* Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями: Навчальний посібник. – К.: Вища школа. – 1995. – 304 с.
8. Развитие теории контактных задач в СССР / под ред. Л. А. Галина. – М.: Наука, 1976. – 494 с.
9. *Gorelik L., Mordehai D.* Atomically Informed Continuum Models for the Elastic Contact Properties of Hollow and Coated Rigid Cylinders at the Nanoscale. // Journal of Applied Mechanics. – 2017. – **84**, №3. – p. 031009, Paper No: JAM-16-1511.
10. *Hutchinson J. W., Thompson J. M. T.* Nonlinear Buckling Interaction for Spherical Shells Subject to Pressure and Probing Forces. // Journal of Applied Mechanics. – 2017. – **84**, №6. – p. 061001, Paper No: JAM-17-1135.

11. *Long J., Ding Y., Yuan W., Chen W., Wang G.* General Relations of Indentations on Solids With Surface Tension. // *Journal of Applied Mechanics.* – 2017. – **84**, №5. – p. 051007, Paper No: JAM-17-1002.
12. *Petinrin M. O., Oyedele A. A., Ajide O. O.* Numerical Analysis of Thermo-Elastic Contact Problem of Disc Brakes for Vehicle on Gradient Surfaces. // *World Journal of Engineering and Technology.* – 2016. – **4**, №1. – p. 51 – 58.
13. *Rudnitskii V. B., Dikhtyaruk N. N.* Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. // *International Applied Mechanics.* – 2017. – **53**, №2. – p 149–155.
14. *Vasu T. S., Bhandakkar T. K.* A Study of the Contact of an Elastic Layer–Substrate System Indented by a Long Rigid Cylinder Incorporating Surface Effects. // *Journal of Applied Mechanics.* – 2016. – **83**, №6. – p. 061009, Paper No: JAM-16-1023.
15. *Yaretskaya, N. A.* Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses / N. A. Yaretskaya // *International Applied Mechanics.* – 2014. – **50**, №4. – Pp. 378–388.
16. *Zheng P., Cheng A. H.-D., Li H.* Dynamic Green's Functions and Integral Equations for a Double-Porosity Dual-Permeability Poroelastic Material. // *Journal of Applied Mechanics.* – 2017. – **84**, №6. – p. 061009, Paper No: JAM-17-1049.

**КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЖОРСТКОГО КІЛЬЦЕВОГО
ШТАМПА ТА ПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ)
НАПРУЖЕННЯМИ**

Ярецька Н.О.

Хмельницький національний університет, вул. Інститутська, 11,

м.Хмельницький, Україна

e-mail: massacran2@ukr.net

Анотація. Стаття присвячена дослідженню задачі контактної взаємодії тиску жорсткого циліндричного кільцевого штампа на півпростір з початковими (залишковими) напруженнями без врахування сил тертя у випадку нерівних коренів характеристичного рівняння. Дослідження представлено в загальному вигляді для теорії великих початкових (кінцевих) деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій в рамках лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу. Чисельний аналіз представлений у вигляді графіків для потенціалу Трелоара.

Ключові слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактна задача, кільцевий штамп, півпростір.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЖЕСТКОГО КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПА И ПОЛУПРОСТРАНСТВА С НАЧАЛЬНЫМИ (ОСТАТОЧНЫМИ) НАПРЯЖЕНИЯМИ

Ярецкая Н. А.

Хмельницкий национальный университет, ул. Институтская, 11,

г. Хмельницкий, Украина

e-mail: massacran2@ukr.net

Аннотация. Статья посвящена исследованию задачи контактного взаимодействия давления жесткого цилиндрического кольцевого штампа на полупространство с начальными (остаточными) напряжениями без учета сил трения в случае неравных корней характеристического уравнения. Исследование представлено в общем виде для теории больших начальных (конечных) деформаций и двух вариантов теории малых начальных деформаций в рамках линеаризованной теории упругости при произвольной структуре упругого потенциала. Численный анализ представлен в виде графиков для потенциала Трелоара

Ключевые слова: линеаризованная теория упругости, начальные (остаточные) напряжения, контактная задача, кольцевой штамп, полупространство.

CONTACT PROBLEM FOR THE STIFF ANNULAR PUNCH AND SEMISPACED WITH INITIAL (RESIDUAL) STRESSES

Yaretskaya N. A.

Khmelnytsky National University, Institutska str., 11,

Khmelnytsky, Ukraine

e-mail: massacran2@ukr.net

Abstract. The article is devoted to the research of task of contact interaction of the pressure of the stiff cylindrical annular punch on semispace with initial (residual) stresses without friction. It is solved for the case of unequal roots of the characteristic equation. In general, the research was carried out for the theory of great initial (ultimate) and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of linearized theory of elasticity with the elastic potential having arbitrary structure. Numerical analysis is presented in the form of graphs for the case of Treloar's potential.

Key words: the linearized elasticity theory, initial (residual) stresses, contact problem, annular punch, semispace.

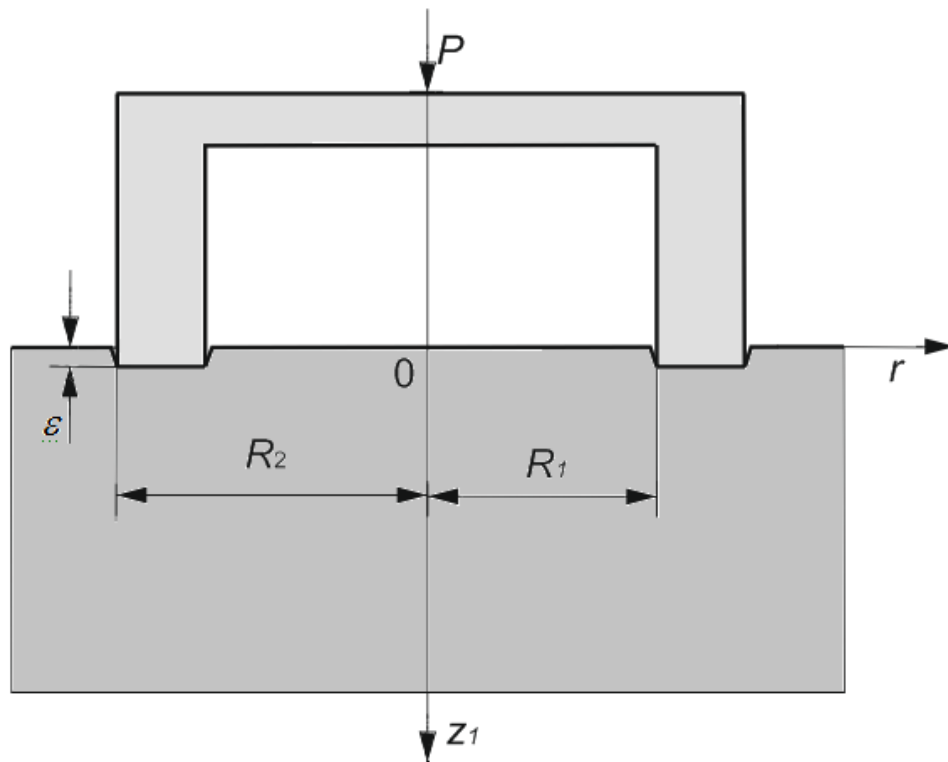


Рис. 1. Давление жесткого кольцевого штампа на полупространство с начальными (остаточными) напряжениями.

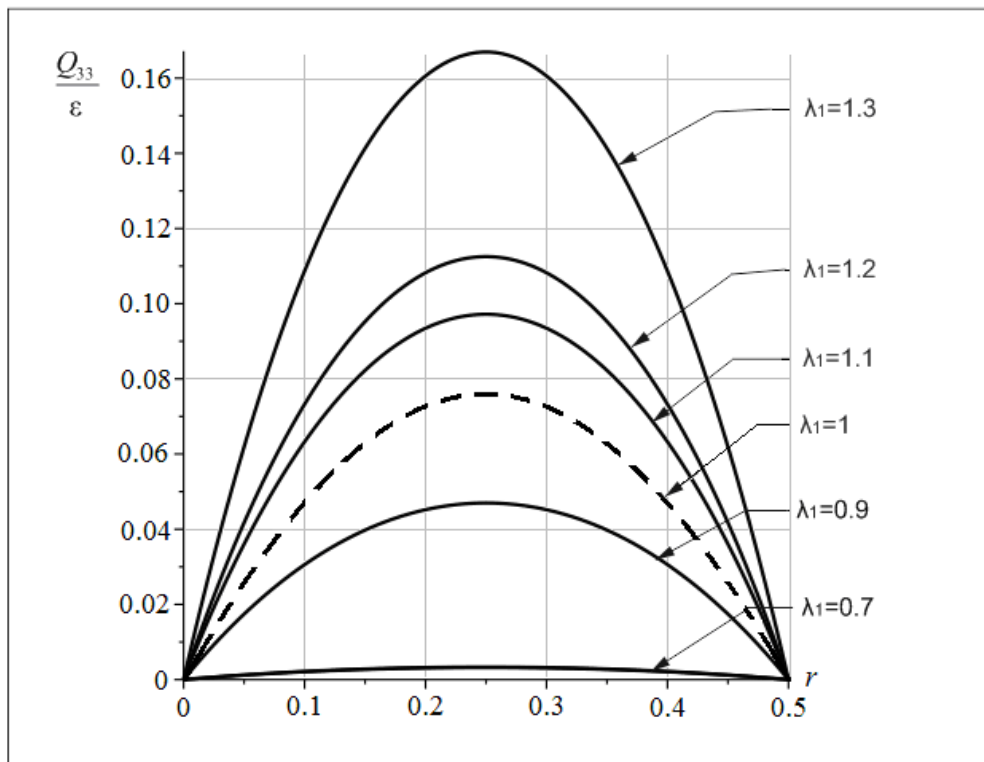


Рис. 2. Контактные напряжения Q_{33} , потенциал Трелоара.

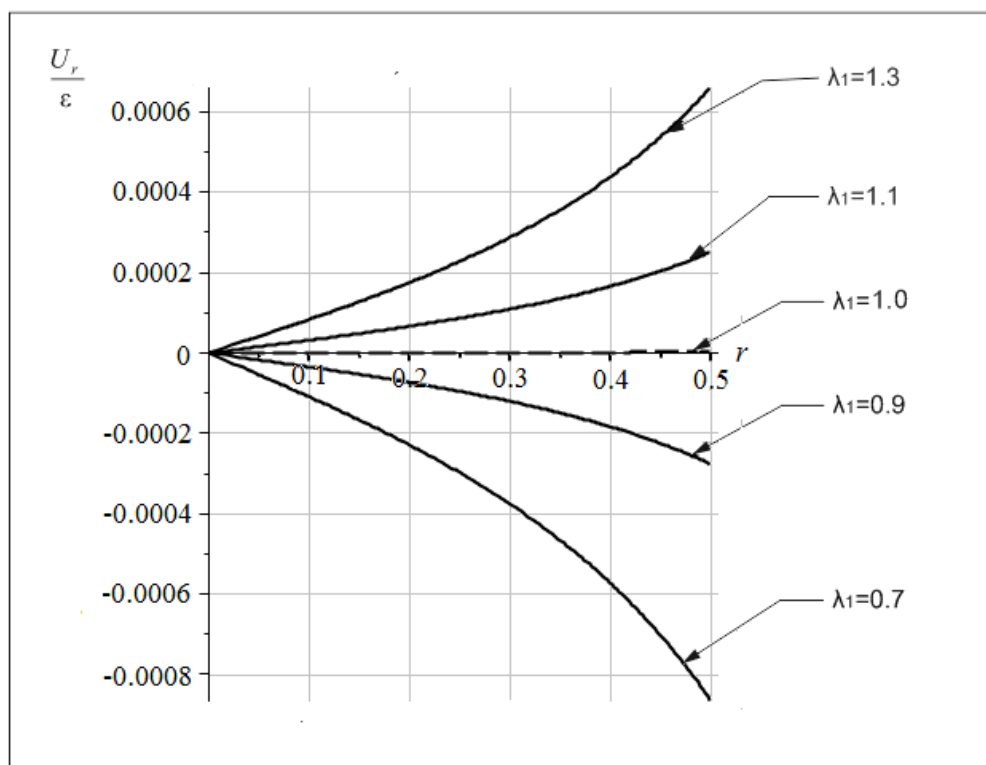


Рис. 3. Контактные перемещения U_r , потенциал Трелоара.