


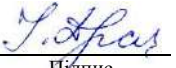
## ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА ДО КВАЛІФІКАЦІЙНОЇ РОБОТИ БАКАЛАВРА

на тему *Аналіз напружено-деформованого стану та оцінка міцності елементів кузова легкового автомобіля при боковому ударі*

Шифр: КРБМТВАТАМ 26.22141.000. ПЗ

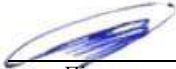
|                              |  |
|------------------------------|--|
| Галузь знань                 | <u>13 – Механічна інженерія</u><br>Шифр і назва галузі знань                   |
| Спеціальність                | <u>132 – Матеріалознавство</u><br>Шифр і назва спеціальності                   |
| Рівень вищої освіти          | <u>Перший бакалаврський</u><br>Рівень вищої освіти                             |
| Освітньо-професійна програма | <u>Відновлення та технічний сервіс автомобілів</u><br>Назва освітньої програми |

Виконав: здобувач 4 курсу, група МТВА-22-1  В'ячеслав КРАМАР  
Курс, група виконавця Підпис Ім'я, прізвище

Керівник: д-р.техн.н., професор кафедри ТАМ  Ілона ДРАЧ  
Науковий ступінь, посада Підпис Ім'я, прізвище

До захисту допускаю:

зав. кафедри ТАМ, д-р.техн.н., професор

  
Підпис

Олександр ДИХА

Ім'я, прізвище

10 червня 2026 р.

ХМЕЛЬНИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
Факультет інженерії, транспорту та архітектури  
Кафедра трибології, автомобілів та матеріалознавства  
Рівень вищої освіти перший бакалаврський  
Галузь знань 13 – Механічна інженерія  
Спеціальність 132 – Матеріалознавство  
Освітньо-професійна програма Відновлення та технічний сервіс автомобілів

ЗАТВЕРДЖУЮ  
Завідувач кафедри ТАМ

  
(підпис)  
д-р.техн.н., проф. Олександр ДИХА  
Науковий ступінь, ім'я, прізвище  
9 лютого 2026 року

### ЗАВДАННЯ НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ БАКАЛАВРА

Завдання видано здобувачу Крамару В'ячеславу Станіславовичу  
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема кваліфікаційної роботи бакалавра: «Аналіз напружено-деформованого стану та оцінка міцності елементів кузова легкового автомобіля при боковому ударі»

Керівник роботи професор кафедри ТАМ Драч Ілона Володимирівна  
(посада, прізвище, ім'я, по батькові)

2. Затверджено наказом університету від 8 січня 2026 р. № 7

3. Дата видачі завдання здобувачу: 9 лютого 2026 р.

4. Строк подання здобувачем роботи на кафедру: 10 червня 2026 р.

5. Вихідні дані: *джерела інформації щодо теми КРБ; матеріали переддипломної практики: склад та властивості сталі HSLA 340 (MS 264); теоретичні засади тензорного опису напружено-деформованого стану.*

6. Зміст пояснювальної записки (перелік задач): *провести аналіз предметної області, провести аналіз напружено-деформованого стану в елементах бічної панелі кузова автомобіля Jeep Grand Cherokee WK при боковому ударі; визначити компоненти тензорів напружень у зонах деформації бічної панелі зі сталі HSLA 340; виконати розрахунок інваріантів напруженого стану та оцінити енергопоглинання при деформуванні елементів кузова; здійснити оцінку міцності та ресурсу елемента бічної панелі за критерієм Мізеса.*

7. Перелік графічного матеріалу: *графічна частина роботи представлена у вигляді презентації на слайдах.*

8. Консультанти розділів роботи:

| Розділ | Прізвище, ініціали та посада консультанта | Підпис, дата   |                  |
|--------|---|----------------|------------------|
|        |   | Завдання видав | Завдання прийняв |
|        |   |                |                  |
|        |   |                |                  |
|        |   |                |                  |

9. Календарний план виконання кваліфікаційної роботи бакалавра:

| № | Назва етапів (розділів) кваліфікаційної роботи бакалавра   | Термін виконання  | Примітка        |
|---|--|-------------------|-----------------|
| 1 | <i>Вибір напрямку дослідження та узгодження тематики кваліфікаційної роботи бакалавра з керівником</i>                       | <i>09.02.2026</i> | <i>виконано</i> |
| 2 | <i>Ознайомлення з предметною областю, формулювання мети та задач дослідження, визначення об'єкта та предмета дослідження</i> | <i>15.02.2026</i> | <i>виконано</i> |
| 3 | <i>Робота над розділом 1 – Теоретичні засади тензорного опису напружено-деформованого стану</i>                              | <i>30.02.2026</i> | <i>виконано</i> |
| 4 | <i>Робота над розділом 2 – Інваріанти тензорів напружень та деформацій</i>   | <i>15.03.2026</i> | <i>виконано</i> |
| 5 | <i>Робота над розділом 3 – Інженерні застосування інваріантів</i>  | <i>15.04.2026</i> | <i>виконано</i> |
| 6 | <i>Робота над розділом 4 – Аналіз НДС та оцінка міцності бічної панелі jeep grand cherokee при боковому ударі</i>            | <i>15.05.2026</i> | <i>виконано</i> |
| 7 | <i>Оформлення пояснювальної записки згідно вимог</i>   | <i>10.06.2026</i> | <i>виконано</i> |

Виконавець: здобувач 4 курсу, група МТВА-22-1

Курс, група виконавця



Підпис

В'ячеслав КРАМАР

Ім'я, прізвище

Керівник: д-р.техн.н., професор кафедри ТАМ

Науковий ступінь, посада



Підпис

Ілона ДРАЧ

Ім'я, прізвище

## РЕФЕРАТ

Тема кваліфікаційної роботи бакалавра: Аналіз напружено-деформованого стану та оцінка міцності елементів кузова легкового автомобіля при боковому ударі

Виконавець кваліфікаційної роботи бакалавра: здобувач 4 курсу групи МТВА-22-1 Крамар В'ячеслав Станіславович

Керівник кваліфікаційної роботи бакалавра: д-р.техн.н., професор кафедри ТАМ Драч Ілона Володимирівна

Кваліфікаційна робота бакалавра містить:

| Пояснювальна записка |          |         |                   | Кількість додатків |
|----------------------|----------|---------|-------------------|--------------------|
| Сторінок             | Рисунків | Таблиць | Джерел інформації |                    |
| 90                   | 11       | 26      | 37                | 1                  |

Мета роботи – провести аналіз напружено-деформованого стану елементів бічної панелі кузова автомобіля Jeep Grand Cherokee WK (2005–2010) зі сталі HSLA 340 при боковому ударі та оцінити їх міцність і ресурс на основі критерію Мізеса.

Об'єкт дослідження – бічна панель кузова автомобіля Jeep Grand Cherokee WK, виконана з високоміцної низьколегованої сталі HSLA 340.





Предмет дослідження – напружено-деформований стан, тензори напружень та міцнісні характеристики елементів бічної панелі при боковому ударі згідно з вимогами FMVSS 214 та Euro NCAP.

У роботі застосовано методи теорії пружності та пластичності, тензорного аналізу, механіки руйнування матеріалів, чисельного моделювання методом скінченних елементів у програмному комплексі (ANSYS), а також методи математичної статистики для обробки результатів.

Ключові слова: бічна панель кузова автомобіля, сталь HSLA 340, інваріанти тензорів напружень та деформацій, міцнісні характеристики елементів бічної панелі при боковому ударі.

## ЗМІСТ

|  |    |
|--|----|
| Вступ.....   | 6  |
| 1 Теоретичні основи тензорного опису напружено-деформованого стану .....               | 11 |
| 1.1 Поняття напружено-деформованого стану та його характеристики .....                 | 11 |
| 1.2 Тензор напружень: визначення, компоненти, властивості симетрії .....               | 12 |
| 1.3 Тензор деформацій: геометричний зміст, компоненти, зв'язок з переміщеннями .....   | 17 |
| 1.4 Перетворення компонентів тензорів при зміні системи координат .....                | 22 |
| 2 Інваріанти тензорів напружень та деформацій .....                                    | 27 |
| 2.1 Поняття інваріантності в механіці суцільного середовища .....                      | 27 |
| 2.2 Фізичний зміст інваріантів напружень: середній тиск, інтенсивність напружень ..... | 27 |
| 2.3 Інваріанти тензора деформацій та їх геометрична інтерпретація ...                  | 30 |
| 2.4 Інваріанти девіаторів напружень та деформацій .....                                | 33 |
| 2.5 Зв'язок між інваріантами напружень та деформацій для ізотропних матеріалів .....   | 35 |

|           |        |   |        |     |  |                     |      |         |
|-----------|--------|---|--------|-----|--|---------------------|------|---------|
|           |        |   |        |     | КРБМТВАТАМ 26.22141.000 ПЗ   |                     |      |         |
| Змн       | Арк.   | № докум.  | Підпис | Дат | Аналіз напружено-деформованого стану та оцінка міцності елементів кузова легкового автомобіля при боковому ударі | Лім.                | Арк. | Акрушіє |
| Розроб.   | Крамар |  |        |     |  |                     | 4    | 92      |
| Перевір.  | Драч   |  |        |     |  | ХНУ група МТВА-22-1 |      |         |
| Реценз.   |        |   |        |     |  |                     |      |         |
| Н. Контр. | Бабак  |  |        |     |  |                     |      |         |
| Затверд.  | Диха   |  |        |     |  |                     |      |         |

|  |    |
|--|----|
| 3 Інженерні застосування інваріантів .....   | 46 |
| 3.1 Інваріанти в критеріях міцності та пластичності<br>(Мізеса, Треска, Мора) .....                          | 46 |
| 3.2 Застосування інваріантів при розрахунку ресурсу деталей .....  | 49 |
| 3.3 Інваріанти в теорії пошкоджуваності та механіці<br>руйнування матеріалів .....                           | 51 |
| 3.4 Експериментальні методи визначення інваріантних характеристик ...  | 53 |
| <br>   |    |
| 4 Аналіз НДС та оцінка міцності бічної панелі Jeep Grand Cherokee<br>при боковому ударі .....                | 57 |
| 4.1 Характеристика об'єкта дослідження та методика моделювання .....   | 57 |
| 4.2 Розрахунок компонентів тензорів напружень у зонах концентрації ...                                       | 66 |
| 4.3 Розрахунок інваріантів тензорів напружень та деформацій.<br>Оцінка енергопоглинання бічною панеллю ..... | 78 |
| 4.4 Оцінка міцності та ресурсу за критерієм Мізеса .....   | 86 |
| Висновки.....  | 93 |
| Перелік посилань .....   | 96 |
| Додаток.....   | 99 |

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 5    |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

## ВСТУП

Актуальність теми. Проблема забезпечення пасивної безпеки автомобілів залишається одним із пріоритетних напрямків розвитку світового автомобілебудування. За даними Національної адміністрації безпеки дорожнього руху США (NHTSA), бокові зіткнення становлять понад 25% усіх дорожньо-транспортних пригод із травмованими та характеризуються високим рівнем тяжкості наслідків через обмежену зону деформації між пасажиром і джерелом удару [1]. У цьому контексті аналіз напружено-деформованого стану (НДС) елементів кузова набуває особливої важливості, оскільки саме від механічної поведінки конструкцій бічної панелі залежить ефективність поглинання ударної енергії та рівень захисту пасажирів.

Сучасні методики проектування автомобільних кузовів базуються на чисельному моделюванні з використанням методу скінченних елементів, що дозволяє детально дослідити розподіл напружень, деформацій та оцінити міцнісні характеристики конструкції ще на етапі розробки. Використання тензорного аналізу напружень та критеріїв міцності, зокрема критерію Мізеса, є необхідним для адекватної оцінки ресурсу елементів кузова та оптимізації їх геометрії з метою досягнення оптимального співвідношення між масою конструкції та її енергопоглинальною здатністю.

Вибір автомобіля Jeep Grand Cherokee покоління WK (2005–2010) для дослідження є доцільним, оскільки цей позашляховик широко використовував високоміцні низьколеговані (HSLA) сталі в конструкції бічних панелей та посилень стійок кузова. Згідно з технічною документацією DaimlerChrysler, для даного покоління характерне застосування сталі MS 264 (HSLA з мінімальною межею текучості 50 ksi, що відповідає приблизно 340 МПа) для критичних елементів структури кузова, зокрема для посилень стійок В/С та порогів [2]. Застосування цих матеріалів дозволило оптимізувати масу конструкції без

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 6    |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

втрати міцнісних характеристик, що робить даний об'єкт актуальним для аналізу поведінки при боковому ударі.

Стан розробки проблеми. Теоретичні основи механіки деформівного твердого тіла, необхідні для аналізу НДС конструкцій при динамічному навантаженні, розроблені в класичних працях європейських та американських вчених. Фундаментальні положення теорії пружності викладено у працях А. Е. Лава (A. E. H. Love), розвинуто в роботах з механіки суцільного середовища. Теорія пластичності та критерії текучості металевих матеріалів сформульовані Р. фон Мізесом (R. von Mises), Г. Генкі (H. Hencky), розвинуті в подальших дослідженнях європейської наукової школи.

Питаннями динамічного деформування тонкостінних конструкцій та поглинання енергії при ударному навантаженні займалися П. Джонсон (W. Johnson), Н. Джонс (N. Jones), Дж. Олгроф (J. Oalgrof), які розробили теоретичні моделі прогресивного зминання та механізмів деформування при зіткненнях. Методологія чисельного моделювання процесів деформування металевих конструкцій при динамічному навантаженні розвинена в роботах Т. Белічка (T. Belytschko), Д. Бенсона (D. Benson), Дж. Холлквіста (J. Hallquist) – засновника програмного комплексу LS-DYNA, що є промисловим стандартом для краш-аналізу.

У галузі автомобільної безпеки значний внесок у дослідження бокових ударів зроблено в рамках робіт Європейської програми оцінки нових автомобілів (Euro NCAP) та американських досліджень NHTSA. Розроблено стандартизовані методики краш-тестів, що визначають вимоги до бокової міцності кузова. Згідно зі стандартом FMVSS 214, боковий удар моделюється за допомогою рухомого деформівного бар'єра (MDB) масою 1368 кг, який рухається зі швидкістю, що забезпечує кінетичну енергію 124–139 кДж при ударі [3]. Стандарт передбачає оцінку травматизму за критеріями: деформація грудної клітки не більше 44 мм, прискорення тазу не більше 82 g, НІС (Head Injury Criterion) не більше 1000 [4]. Euro NCAP використовує аналогічний підхід

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРЕМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 7    |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

з додатковим косим ударом у стовп (pole test) під кутом  $75^\circ$  зі швидкістю 32 км/год, де діаметр стовпа становить 254 мм [5].

Проте, незважаючи на наявність значної кількості досліджень, комплексний аналіз НДС з урахуванням тензорних характеристик напружень, інваріантів та енергетичних параметрів деформування конкретних елементів бічної панелі Jeep Grand Cherokee WK при боковому ударі потребує подальшого детального вивчення. Особливо це стосується оцінки міцності та ресурсу з урахуванням критерію Мізеса для сталі HSLA 340, що застосовується в конструкціях кузова даного покоління автомобіля [6].

Мета та завдання дослідження.

Мета роботи – провести аналіз напружено-деформованого стану елементів бічної панелі кузова автомобіля Jeep Grand Cherokee WK (2005–2010) зі сталі HSLA 340 при боковому ударі та оцінити їх міцність і ресурс на основі критерію Мізеса.

Для досягнення мети необхідно вирішити такі завдання:

- провести аналіз напружено-деформованого стану в елементах бічної панелі кузова автомобіля Jeep Grand Cherokee WK при боковому ударі;
- визначити компоненти тензорів напружень у зонах деформації бічної панелі зі сталі HSLA 340;
- виконати розрахунок інваріантів напруженого стану та оцінити енергопоглинання при деформуванні елементів кузова;
- здійснити оцінку міцності та ресурсу елемента бічної панелі за критерієм Мізеса.

Об'єкт і предмет дослідження

Об'єкт дослідження – бічна панель кузова автомобіля Jeep Grand Cherokee WK (покоління WK, 2005–2010), виконана з високоміцної низьколегованої сталі HSLA 340 (внутрішня панель – MS 264/HSLA 340,

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 8    |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

зовнішня панель – зазвичай м'яка сталь товщиною 0,7 мм або HSLA залежно від комплектації) [7].

Предмет дослідження – напружено-деформований стан, тензори напружень та міцнісні характеристики елементів бічної панелі при боковому ударі згідно з вимогами FMVSS 214 та Euro NCAP.

Технічні характеристики об'єкта дослідження.

Геометричні параметри бічної панелі Jeep Grand Cherokee WK:

— внутрішня панель (Body Side Inner) – виконана зі сталі MS 264 (HSLA 340, мінімальна межа текучості 340 МПа), типова товщина для посилень стійки В: 1,6–2,4 мм (залежно від року випуску та комплектації), для порогів (sill): 1,5–2,0 мм [7];

— зовнішня панель (Body Side Outer) – зазвичай м'яка сталь або HSLA нижчого класу, товщина 0,7–1,0 мм [7];

— посилення стійки В (B-Pillar Reinforcement) – сталь HSLA 340/MS 264, товщина 1,1–1,5 мм (ранні моделі) або 1,6–2,4 мм (оновлені версії з 2010 року), з додатковими "вушками" (tabs) у верхній та нижній частинах для розподілу навантаження на дах та поріг [7];

— посилення порога (Rocker Inner Reinforcement) – сталь HSLA 340, розташоване між стійками А та В для протидії вигину при боковому ударі [7].

Механічні властивості сталі HSLA 340 (MS 264):

— мінімальна межа текучості (Rp0,2): 340 МПа;

— межа міцності (Rm): 420–540 МПа (для гарячекатаного варіанту HR340LA) або 410–530 МПа (для холоднокатаного CR340LA) [2, 8];

— відносне подовження: 21–26% залежно від товщини та обробки;

— модуль пружності: 200 ГПа;

— коефіцієнт Пуассона: 0,27–0,30 [9–11].

Нормативні вимоги до бокового удару:

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРЕМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 9    |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

— FMVSS 214 (США): удар рухомим деформівним бар'єром (MDB) масою 1368 кг, швидкість удару – 54 км/год (33,5 миль/год), кут удару – 90°, критерії травматизму: деформація грудної клітки  $\leq 44$  мм, прискорення тазу  $\leq 82$  g, НІС  $\leq 1000$  [3];

— Euro NCAP: додатково косий удар у стовп (pole test) – кут 75°, швидкість 32 км/год, діаметр стовпа 254 мм, оцінка за 4 зонами тіла (голова, груди, живіт, таз) [4, 5].

Методи дослідження. У роботі застосовано методи теорії пружності та пластичності, тензорного аналізу, механіки руйнування матеріалів, чисельного моделювання методом скінченних елементів у програмному комплексі (ANSYS), а також методи математичної статистики для обробки результатів.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дослідження можуть бути використані при проектуванні нових конструкцій кузовів позашляховиків та легкових автомобілів, оптимізації їх міцнісних характеристик при застосуванні HSLA сталей. Отримані дані щодо енергопоглинання та міцності елементів бічної панелі Jeep Grand Cherokee WK можуть бути корисними для оцінки відповідності конструкції сучасним вимогам пасивної безпеки та при розробці заходів щодо підвищення бокової міцності кузова.

Структура роботи. Кваліфікаційна робота складається з вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. У першому розділі викладено теоретичні основи аналізу НДС, визначено компоненти тензорів напружень. У другому розділі виконано розрахунок інваріантів та енергопоглинання. Третій розділ містить оцінку міцності та ресурсу за критерієм Мізеса.

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРЕМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 10   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

# РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ТЕНЗОРНОГО ОПИСУ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

## 1.1 Поняття напружено-деформованого стану та його характеристики

Напружено-деформований стан (НДС) є центральним поняттям механіки деформівного твердого тіла, що описує реакцію матеріалу на зовнішнє навантаження. Під НДС розуміють сукупність напружень та деформацій, що виникають у матеріалі під дією зовнішніх сил, температурних чи інших факторів [12, с. 45].

У загальному випадку НДС характеризується тривимірністю – напруження та деформації мають різні значення в різних точках тіла та в різних напрямках. Для повного опису НДС необхідно знати шість компонентів тензора напружень та шість компонентів тензора деформацій у кожній точці тіла [13, с. 112].

Основні характеристики НДС.

### 1. За геометрією деформування:

- об'ємний НДС – напруження/деформації змінюються в усіх трьох напрямках ( $\sigma_x \neq 0, \sigma_y \neq 0, \sigma_z \neq 0$ );
- плоский НДС – одна з компонент відсутня або настільки мала, що нею можна знехтувати (плоска деформація або плоский напружений стан);
- одновісний/двовісний НДС – переважає один або два напрямки деформування [14, с. 78].

### 2. За фізичною природою:

- пружний НДС – деформації зникають після зняття навантаження, підкоряються закону Гука;
- пружнопластичний НДС – поєднує пружні та залишкові (пластичні) деформації;

|      |      |          |        |      |                             |      |
|------|------|----------|--------|------|-----------------------------|------|
|      |      |          |        |      | КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ | Арк. |
|      |      |          |        |      |                             | 11   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                             |      |

— повзучий НДС – деформації зростають у часі при постійному навантаженні [15, с. 156].

3. За інтенсивністю [16, с. 106]:

— слабкий НДС – усі напруження нижчі за пропорційну межу ( $\sigma_i < \sigma_{0,2}$ );

— сильний НДС – частина напружень перевищує межу текучості, виникають пластичні деформації.

Для аналізу НДС вводять головні напрямки та головні значення напружень і деформацій – такі, де зсувові компоненти дорівнюють нулю. Головні напруження позначаються  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ), головні деформації –  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ . У головних осях тензори набувають діагонального вигляду, що спрощує аналіз [17, с. 89, 18, с. 26].

Важливою характеристикою НДС є вид деформування, який оцінюється через коефіцієнт Лоде:

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (1.1)$$

При  $\mu_\sigma = -1$  маємо одноосьове розтягування, при  $\mu_\sigma = 0$  – плоский зсув, при  $\mu_\sigma = +1$  – одноосьове стиснення [19, с. 167].

Сучасні підходи до опису НДС базуються на тензорному формалізмі, який забезпечує інваріантність фізичних законів відносно вибору системи координат. Тензор напружень  $\sigma_{ij}$  та тензор деформацій  $\varepsilon_{ij}$  є симетричними тензорами другого рангу з шістьма незалежними компонентами кожен. Їх інваріанти – скалярні характеристики, що не залежать від орієнтації осей – дозволяють формулювати критерії пластичності та міцності у загальному вигляді [20, с. 201].

1.2 Тензор напружень: визначення, компоненти, властивості симетрії

Поняття напруження та метод січних.

|      |      |          |        |      |                             |      |
|------|------|----------|--------|------|-----------------------------|------|
|      |      |          |        |      | КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ | Арк. |
|      |      |          |        |      |                             | 12   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                             |      |

Для кількісного опису внутрішніх сил, що виникають у деформованому твердому тілі, використовується поняття напруження. Розглянемо довільне тверде тіло, яке знаходиться під дією системи зовнішніх сил. Щоб охарактеризувати внутрішні сили в деякій точці тіла, застосовують метод січних [12, с. 56].

Уявімо, що тіло розсічено площиною, яка проходить через розглядувану точку  $O$ . Виділимо елементарну площадку  $dS$  з нормаллю  $n$ . На цю площадку діє внутрішня сила  $dF$ . Вектор напруження  $p_n$  у точці  $O$  на площадці з нормаллю  $n$  визначається як:

$$p_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}$$

Вектор  $p_n$  залежить як від положення точки  $O$ , так і від орієнтації площадки (напрямку нормалі  $n$ ). Для повного опису напруженого стану в точці необхідно знати вектори напружень на трьох взаємно перпендикулярних площадках [13, с. 89].

Компоненти тензора напружень.

Уведемо декартову систему координат  $Oxyz$ . Розглянемо три площадки, перпендикулярні до осей координат (рис.1.3).

На кожній площадці вектор напруження можна розкласти на нормальну та дотичну складові:

На площадці, перпендикулярній до осі  $Ox$  (нормаль  $n = (1,0,0)$ ):

- нормальне напруження  $\sigma_{xx}$  (або  $\sigma_x$ );
- дотичні напруження  $\tau_{xy}$  та  $\tau_{xz}$ .

На площадці, перпендикулярній до осі  $Oy$  (нормаль  $n = (0,1,0)$ ):

- нормальне напруження  $\sigma_{yy}$  (або  $\sigma_y$ );
- дотичні напруження  $\tau_{yx}$  та  $\tau_{yz}$ .

На площадці, перпендикулярній до осі  $Oz$  (нормаль  $n = (0,0,1)$ ):

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 13   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

— нормальне напруження  $\sigma_{zz}$  (або  $\sigma_z$ );

— дотичні напруження  $\tau_{zx}$  та  $\tau_{zy}$ .

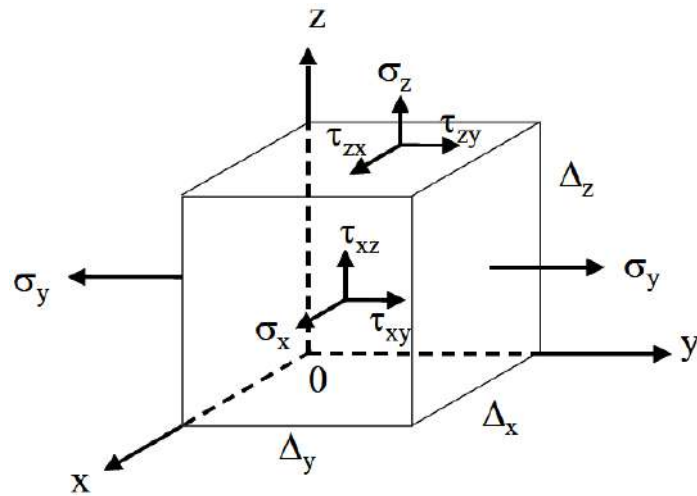


Рис. 1.3 – Елементарний куб з компонентами тензора напружень [2]

Таким чином, напружений стан у точці характеризується дев'ятьма компонентами, які утворюють тензор напружень другого рангу [14, с. 134]:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

де індекси  $i, j = 1, 2, 3$  відповідають осям  $x, y, z$ .

Теорема про спарені дотичні напруження (властивість симетрії).

Тензор напружень є симетричним, тобто виконується рівність:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Це твердження випливає з рівнянь рівноваги моментів для елементарного паралелепіпеда. Розглянемо рівняння моментів відносно осі  $Oz$  [4, с. 78]:

$$\sum M_z = 0 : (\tau_{xy} \cdot dy \cdot dz) \cdot dx - (\tau_{yx} \cdot dx \cdot dz) \cdot dy = 0$$

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 14   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

Звідси отримуємо  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . Аналогічно доводяться інші співвідношення.

Властивість симетрії зменшує кількість незалежних компонентів тензора напружень з дев'яти до шести:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Закон перетворення компонентів тензора напружень.

При повороті системи координат компоненти тензора напружень змінюються за певним законом. Нехай нова система координат  $Ox'y'z'$  утворена поворотом відносно старої  $Oxyz$ . Косинуси кутів між осями позначимо  $\alpha_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$ .

Компоненти тензора напружень у новій системі координат визначаються за формулою [16, с. 201]:

$$\sigma'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} \sigma_{kl},$$

де за повторюваними індексами  $k, l$  проводиться сумування (правило Ейнштейна).

Цей закон перетворення є характерною ознакою тензора другого рангу. Він гарантує, що фізична сутність напруженого стану не залежить від вибору системи координат.

Головні напруження та головні осі.

Існує така орієнтація системи координат, при якій дотичні напруження зникають, і тензор напружень набуває діагонального вигляду:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

де  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – головні напруження ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ), а відповідні осі – головні осі.

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 15   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

Головні напруження знаходяться як корені характеристичного рівняння [17, с. 167]:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0.$$

де  $I_1, I_2, I_3$  – інваріанти тензора напружень, які будуть детально розглянуті у наступному розділі.

Графічне представлення – кола Мора.

Для візуалізації перетворення компонентів тензора напружень використовують кола Мора. У плоскому випадку рівняння кола Мора має вигляд [18, с. 112]:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (1.5)$$

Центр кола розташований у точці  $((\sigma_x + \sigma_y)/2, 0)$ , радіус дорівнює  $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ . Кожній точці кола відповідає певна орієнтація площадки. Головні напруження визначаються точками перетину кола з віссю абсцис (рис.1.4).

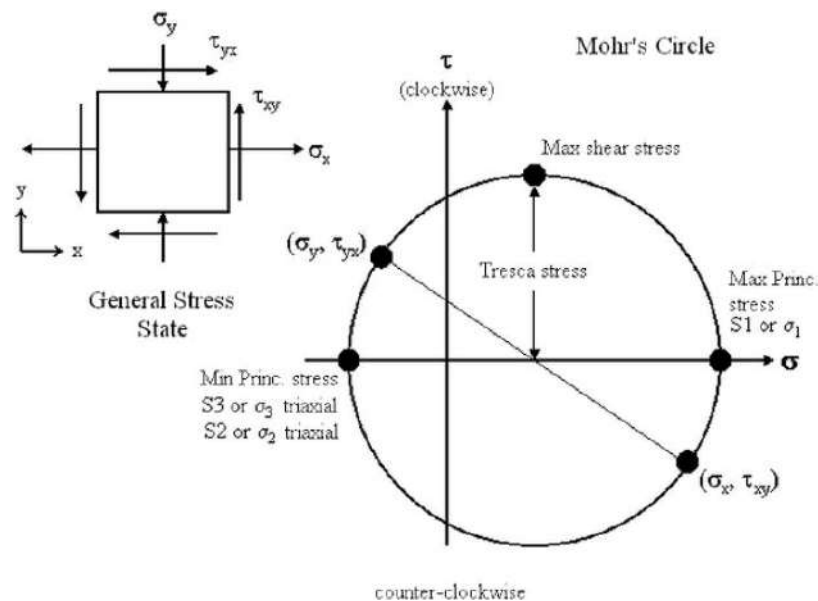


Рис. 1.4 – Класичне коло Мора з елементарним кубом напружень [7]

Девіатор напружень. Тензор напружень можна подати у вигляді суми сферичного (кульового) та девіаторного тензорів:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + s_{ij},$$

де  $\sigma_0 = I_1/3 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$  – середнє гідростатичне напруження,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $s_{ij}$  – девіатор напружень (компоненти відхилення від середнього напруження).

Компоненти девіатора:

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Девіатор характеризує форму зміни (відхилення від кульової), тоді як сферична частина відповідає об'ємній зміні. При пластичному деформуванні металів пластичність зумовлена саме девіатором напружень, оскільки гідростатичний тиск не викликає пластичних деформацій [20, с. 89].

Таким чином, тензор напружень є фундаментальною характеристикою напруженого стану в точці твердого тіла. Його симетричність, закони перетворення при зміні координат та розклад на сферичну та девіаторну частини створюють базу для подальшого аналізу інваріантів та їх застосування в критеріях пластичності матеріалів.

### 1.3 Тензор деформацій: геометричний зміст, компоненти, зв'язок з переміщеннями

Переміщення та деформації в суцільному середовищі.

При навантаженні твердого тіла його точки зазнають переміщень. Нехай точка з початковими координатами  $(x, y, z)$  після деформування займає положення  $(x', y', z')$ . Вектор переміщення  $u$  має компоненти:

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 17   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

$$u_x = x' - x, \quad u_y = y' - y, \quad u_z = z' - z$$

або в індексній формі:  $u_i = x_i' - x_i$  [12, с. 89].

Переміщення тіла як цілого (поступальний рух та обертання) не створює напружень. Для визначення деформацій необхідно розглянути зміну відстаней між точками та зміну кутів між напрямками у деформованому тілі.

Лінійні деформації. Розглянемо дві близькі точки А та В у ненавантаженому тілі на відстані  $ds$  одна від одної. Після деформування відстань між ними стає  $ds'$ . Відносне подовження (лінійна деформація) визначається як:

$$\varepsilon = \frac{ds' - ds}{ds} \quad (1.7)$$

Для визначення компонентів лінійних деформацій розглянемо елементарні відрізки, паралельні осям координат [13, с. 156].

Відрізок довжиною  $dx$ , паралельний осі  $Ox$ , після деформування має кінцеву довжину:

$$dx' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} dx\right)^2}$$

Для малих деформацій, нехтуючи членами вищих порядків малості, отримуємо:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Ці величини характеризують відносне подовження відрізків, паралельних відповідним осям координат [14, с. 201].

Кутові деформації (зсуви). Крім зміни довжин, деформування супроводжується зміною кутів між напрямками, які були взаємно перпендикулярними. Розглянемо два елементарні відрізки  $dx$  та  $dy$ , що утворювали прямий кут до деформування.

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 18   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

Після деформування кут між ними змінюється на величину  $\gamma_{xy}$ , яка називається кутовою деформацією (зсувом). Для малих деформацій [15, с. 112]:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}.$$

Кутові деформації характеризують зміну прямого кута у відповідній площині. Вони безрозмірні та вимірюються в радіанах.

Тензор деформацій та його компоненти.

Компоненти лінійних та кутових деформацій утворюють тензор деформацій (тензор малих деформацій Коші):

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Тензор деформацій є симетричним ( $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ ) та має шість незалежних компонентів: три лінійні деформації ( $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\epsilon_{zz}$ ) та три кутові ( $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$ ) [16, с. 234].

Використання половин кутових деформацій у тензорі забезпечує його тензорні властивості та спрощує запис закону Гука у тензорній формі.

Геометричний зміст компонентів тензора деформацій.

Лінійні деформації  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\epsilon_{zz}$  мають простий фізичний зміст (рис. 1.5): вони показують відносну зміну довжини відрізків, паралельних відповідним осям. Наприклад, якщо  $\epsilon_{xx} = 0,001$ , це означає, що відрізок довжиною 1000 мм подовжився на 1 мм.

Кутові деформації характеризують зміну прямих кутів (рис. 1.5). Якщо  $\gamma_{xy} = 0,002$  рад, то прямий кут у площині  $xy$  зменшився на 0,002 рад (приблизно  $0,115^\circ$ ).

Головні деформації та інваріанти.

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 19   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

Аналогічно до тензора напружень, тензор деформацій має головні осі, в яких кутові деформації зникають. У головних осях:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

де  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$  – головні деформації.

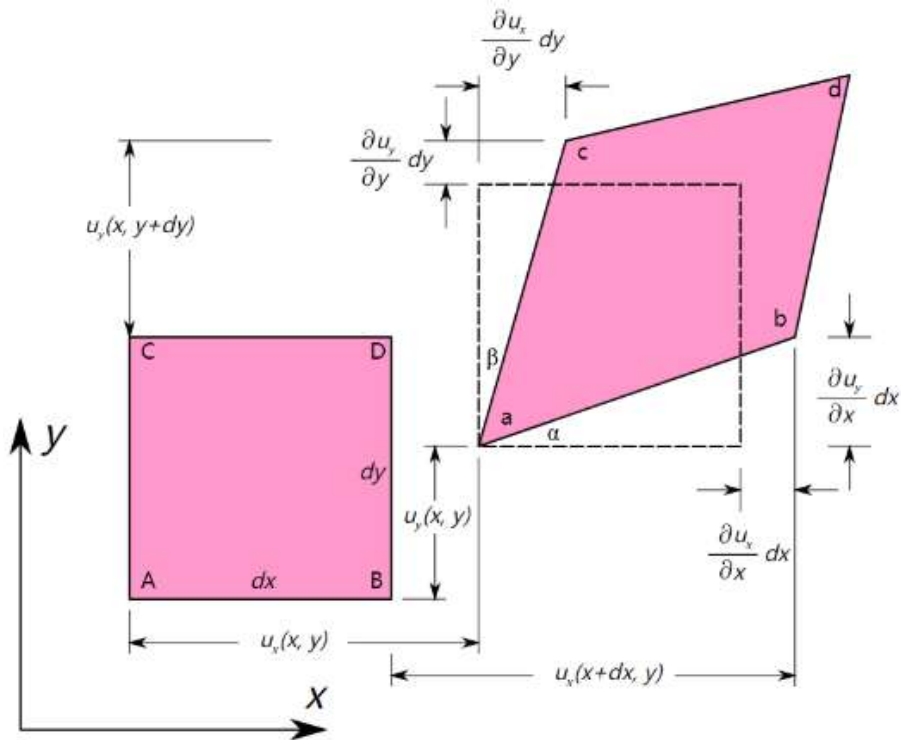


Рис. 1.5 – Детальна схема геометрії зсуву з похідними переміщень [6]

Головні деформації знаходяться як корні характеристичного рівняння:

$$\varepsilon^3 - J_1 \varepsilon^2 + J_2 \varepsilon - J_3 = 0,$$

де  $J_1, J_2, J_3$  – інваріанти тензора деформацій:

$$J_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$J_2 = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \quad (1.10)$$

$$J_3 = \det(\varepsilon_{ij})$$

Перший інваріант  $J_1$  має особливий фізичний зміст: він характеризує відносну зміну об'єму:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx J_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

Для нестисливих матеріалів (пластичне деформування металів)  $J_1 = 0$ , що відповідає умові збереження об'єму [18, с. 89].

Девіатор деформацій.

Тензор деформацій розкладається на сферичну та девіаторну частини:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \delta_{ij} + e_{ij},$$

де  $\varepsilon_0 = J_1/3$  – середня лінійна деформація (об'ємна деформація),  $e_{ij}$  – девіатор деформацій (компоненти формозміни):

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} - \varepsilon_0 \end{pmatrix}$$

Девіатор деформацій характеризує зміну форми без зміни об'єму. При пластичному деформуванні металів саме девіатор визначає розвиток пластичних деформацій, оскільки гідростатичний тиск (сферична частина) не викликає пластичного потоку [19, с. 201].

Умови сумісності деформацій.

Компоненти тензора деформацій не є незалежними – вони пов'язані через переміщення. Це накладає обмеження на можливі поля деформацій, які називаються умовами сумісності (умовами де Saint-Venant).

У випадку малих деформацій шість рівнянь сумісності мають вигляд [20, с. 112]:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

та аналогічні рівняння для інших компонент.

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 21   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

Ці рівняння гарантують, що поле деформацій відповідає деякому неперервному полю переміщень, тобто тіло не розпадається на частини та не утворює порожнин при деформуванні.

Таким чином, тензор деформацій є фундаментальною характеристикою зміни геометрії твердого тіла. Його зв'язок з переміщеннями через диференціальні співвідношення, а також умови сумісності забезпечують однозначний опис деформованого стану матеріалу, що необхідно для подальшого аналізу інваріантів та їх застосування в теорії пластичності.

#### 1.4 Перетворення компонентів тензорів при зміні системи координат

При аналізі напружено-деформованого стану виникає необхідність розглядати фізичні величини в різних системах координат. Задача може мати природну симетрію, зручніше описувати граничні умови в певній системі, або потрібно знайти екстремальні значення компонентів (головні напруження/деформації) [12, с. 201].

Тензори напружень та деформацій є об'єктами, що не залежать від вибору системи координат – вони описують фізичну реальність. Однак їх компоненти змінюються при переході від однієї системи координат до іншої за певним математичним законом. Ця властивість є визначальною для тензорів і відрізняє їх від скалярів та векторів [13, с. 112].

Матриця напрямних косинусів.

Розглянемо дві декартові системи координат: стару  $Oxyz$  з базисними векторами  $e_1, e_2, e_3$  та нову  $Ox'y'z'$  з базисними векторами  $e'_1, e'_2, e'_3$ . Нові осі утворюють зі старими кути, які характеризуються напрямними косинусами:

$$\alpha_{ij} = \cos(e'_i, e_j) = e'_i \cdot e_j.$$

Матриця напрямних косинусів має вигляд [3, с. 234]:

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 22   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

$$A = [\alpha_{ij}] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

де, наприклад,  $\alpha_{11} = \cos(x', x)$ ,  $\alpha_{12} = \cos(x', y)$ ,  $\alpha_{13} = \cos(x', z)$  – косинуси кутів між віссю  $Ox'$  та осями  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  відповідно (рис. 1.6).

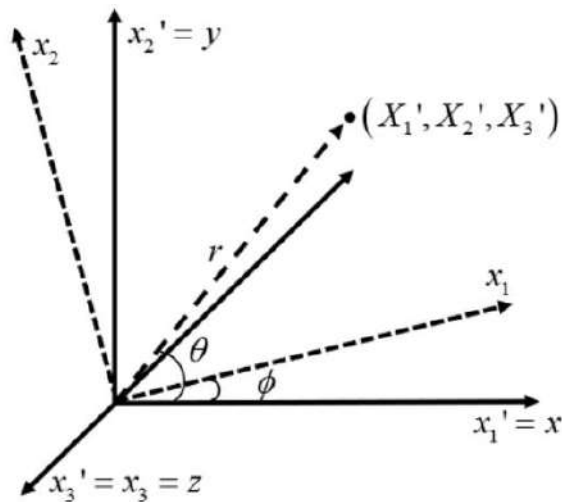


Рис. 1.6 – 3D схема повороту системи координат з кутами [16]

Матриця  $A$  є ортогональною, що означає виконання умов:

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = E$$

або в індексній формі:

$$\alpha_{ik} \alpha_{jk} = \delta_{ij}, \quad \alpha_{ki} \alpha_{kj} = \delta_{ij}.$$

Ці умови виражають ортонормованість базисів: вектори  $e'_i$  утворюють праву трійку одиничних взаємно перпендикулярних векторів [15, с. 89].

Закон перетворення компонентів вектора.

Перед розглядом тензорів нагадаємо перетворення компонентів вектора.

Нехай вектор  $v$  має компоненти  $v_i$  в старій системі та  $v'_i$  в новій. Тоді:

$$v'_i = \alpha_{ij} v_j, \quad v_i = \alpha_{ji} v'_j.$$

Це лінійне перетворення, яке зберігає довжину вектора (інваріант):

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 23   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

$$v_i' v_i' = \alpha_{ij} \alpha_{ik} v_j v_k = \delta_{jk} v_j v_k = v_j v_j = v^2.$$

Закон перетворення компонентів тензора другого рангу.

Тензор другого рангу є лінійним оператором, що перетворює вектори. Нехай тензор  $T$  ставить у відповідність вектору  $u$  вектор  $v = T \cdot u$ . У новій системі координат цей зв'язок має зберігатися:  $v' = T' \cdot u'$  [16, с. 167].

Використовуючи перетворення векторів:

$$v_i' = \alpha_{ik} v_k = \alpha_{ik} T_{kj} u_j = \alpha_{ik} T_{kj} \alpha_{mj} u_m'.$$

З іншого боку,  $v_i' = T'_{im} u_m'$ . Оскільки рівність виконується для довільного  $u'$ , отримуємо закон перетворення компонентів тензора:

$$T'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} T_{kl}$$

або у матричній формі:  $T' = A \cdot T \cdot A^T$ .

Обернене перетворення:

$$T_{ij} = \alpha_{ki} \alpha_{jl} T'_{kl}.$$

Цей закон є характерною ознакою тензора другого рангу: компоненти перетворюються за правилом подвійного лінійного перетворення (по одному індексу на кожну  $\alpha$ ) [17, с. 201].

Перетворення тензора напружень.

Для тензора напружень  $\sigma_{ij}$  закон перетворення має вигляд:

$$\sigma_{ij}' = \alpha_{ik} \alpha_{jl} \sigma_{kl}.$$

У розгорнутій матричній формі:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x' & \tau_{xy}' & \tau_{xz}' \\ \tau_{yx}' & \sigma_y' & \tau_{yz}' \\ \tau_{zx}' & \tau_{zy}' & \sigma_z' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \cdot A^T.$$

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 24   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

Розглянемо важливий частковий випадок – поворот навколо осі Oz на кут  $\theta$ . Матриця напрямних косинусів:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Компоненти тензора напружень у новій системі [18, с. 112]:

$$\sigma'_x = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\sigma'_y = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\tau'_{xy} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

Використовуючи тригонометричні тотожності:

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau'_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Ці формули є основою кола Мора для графічного представлення перетворення компонентів напружень (рис. 1.4) [19, с. 156].

Перетворення тензора деформацій.

Тензор деформацій  $\epsilon_{ij}$  перетворюється за тим самим законом:

$$\epsilon'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} \epsilon_{kl}.$$

Для плоского стану деформацій ( $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ) при повороті на кут  $\theta$ :

$$\epsilon'_x = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\epsilon'_y = \epsilon_x \sin^2 \theta + \epsilon_y \cos^2 \theta - \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{1}{2} \gamma'_{xy} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \gamma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 25   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

Звернімо увагу, що при перетворенні тензора деформацій кутова компонента входить як  $\gamma/2$ , що відповідає визначенню тензора  $\varepsilon_{ij}$  [20, с. 89].

Головні осі та інваріантність тензора.

Існує така орієнтація системи координат, при якій тензор набуває діагональної форми. Ці осі називаються головними, а відповідні компоненти – головними значеннями (головними напруженнями або головними деформаціями).

Головні значення знаходяться як корні характеристичного рівняння:

$$\det(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0.$$

Коефіцієнти цього рівняння є інваріантами тензора – величинами, що не змінюються при перетворенні координат:

$$I_1 = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ij})$$

$$I_3 = \det(T_{ij})$$

Для тензора напружень:

- $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$  – перший інваріант (тричі середнє гідростатичне напруження);
- $I_2$  – другий інваріант, пов'язаний з інтенсивністю напружень;
- $I_3$  – третій інваріант, визначник тензора [17, с. 234].

Інваріантність цих величин впливає безпосередньо з закону перетворення тензора.

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 26   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

## РОЗДІЛ 2 ІНВАРІАНТИ ТЕНЗОРІВ НАПРУЖЕНЬ ТА ДЕФОРМАЦІЙ

### 2.1 Поняття інваріантності в механіці суцільного середовища

Фізична сутність інваріантності. Інваріантність (від лат. *invarians* – незмінний) є фундаментальною властивістю фізичних величин, яка відображає їх об'єктивний характер незалежно від способу опису. У механіці суцільного середовища інваріанти – це скалярні величини, що зберігають свої числові значення при будь-яких допустимих перетвореннях системи координат [12, с. 234].

На відміну від компонентів тензорів, які змінюються при переході від однієї системи координат до іншої, інваріанти характеризують внутрішні, суттєві властивості напружено-деформованого стану. Вони є «мовою», якою природа «говорить» про механічний стан матеріалу, не залежачи від суб'єктивного вибору спостерігача [13, с. 89].

### 2.2 Фізичний зміст інваріантів напружень: середній тиск, інтенсивність напружень

Перший інваріант тензора напружень  $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$  має найбільш наочний фізичний зміст. Він пропорційний середньому гідростатичному напруженню (омніному напруженню), яке визначається як:

$$\sigma_0 = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

Середнє напруження  $\sigma_0$  характеризує об'ємну частину напруженого стану – ту компоненту, яка викликає зміну об'єму тіла без зміни його форми [12, с. 234].

|      |      |          |        |      |                             |      |
|------|------|----------|--------|------|-----------------------------|------|
|      |      |          |        |      | КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ | Арк. |
|      |      |          |        |      |                             | 27   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                             |      |

У гідростатиці тиск  $p$  визначається як  $p = -\sigma_0$  (знак мінус відображає те, що тиск є стисливим напруженням). Для глибоко зануреного тіла в рідину  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ , тому  $I_1 = -3p$ , а  $\sigma_0 = -p$ .

Для прикладних матеріалів, зокрема металів, середній тиск має особливу властивість: він не викликає пластичних деформацій. Це експериментально встановлений факт, відомий як принцип гідростатичного тиску [13, с. 167]. При чистому гідростатичному навантаженні ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ ) метал залишається пружним навіть при дуже високих тисках (порядку кількох ГПа), доки не настане фазовий перехід.

Модуль об'ємного стиснення  $K$  пов'язує середнє напруження з об'ємною деформацією:

$$\sigma_0 = K \cdot \varepsilon_v,$$

де  $\varepsilon_v = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = I_1(\varepsilon)$ .

Другий інваріант девіатора  $J_2$  є ключовою величиною в теорії пластичності. Він визначається як:

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

або через компоненти в довільній системі координат:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2.$$

Інтенсивність напружень (еквівалентне напруження за Мізесом) визначається через  $J_2$ :

$$\sigma_i = \sqrt{3J_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Фізичний зміст  $\sigma_i$ : це таке одноосьове напруження, яке створює ту саму інтенсивність формозміни, що й даний складний напружений стан [15, с. 112].

Енергетична інтерпретація:  $J_2$  пропорційний питомій енергії формозміни:

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 28   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

$$U_f = \frac{J_2}{2G},$$

де  $G$  – модуль зсуву. Це та частка енергії деформації, яка витрачається на зміну форми тіла (без зміни об'єму) і яка визначає розвиток пластичних деформацій.

Критерій пластичності Мізеса.

На основі інваріанта  $J_2$  сформульований енергетичний критерій пластичності (критерій Мізеса):

$$\sigma_i = \sqrt{3J_2} \leq \sigma_s$$

або

$$J_2 \leq \frac{\sigma_s^2}{3} = k^2,$$

де  $k = \sigma_s/\sqrt{3}$  – постійна текучості при чистому зсуві.

У просторі головних напружень цей критерій відповідає циліндру Мізеса з віссю, що збігається з лінією  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  (гідростатична вісь). Радіус циліндра в площині, перпендикулярній до цієї осі, дорівнює  $\sqrt{(2/3)}\sigma_s$  (рис. 2.2) [17, с. 234].

Геометрична інтерпретація: проекція вектора напруження на площину, перпендикулярну до гідростатичної осі, визначається девіатором  $s_{ij}$ . Довжина цієї проекції дорівнює  $\sqrt{(2J_2)}$ . Коли вона досягає критичного значення  $\sqrt{(2/3)}\sigma_s$ , настає пластичний потік.

Інтенсивність деформацій.

Аналогічно до напружень, вводиться інтенсивність деформацій:

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2},$$

де  $e_{ij}$  – компоненти девіатора деформацій.

При пластичному деформуванні металів виконується умова нестисливості:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0.$$

Тому  $\varepsilon_3 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ , і інтенсивність деформацій спрощується:

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 29   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}$$

Практичне застосування.

Таким чином, інваріанти тензора напружень  $I_1$  та  $J_2$  (або відповідні  $\sigma_0$  та  $\sigma_i$ ) є фундаментальними характеристиками, що дозволяють розділити напружений стан на об'ємну та формозмінну частини, сформулювати критерії пластичності та провести інженерний аналіз процесів обробки металів тиском.

### 2.3 Інваріанти тензора деформацій та їх геометрична інтерпретація

Визначення інваріантів тензора деформацій. Тензор деформацій  $\varepsilon_{ij}$ , як і будь-який симетричний тензор другого рангу, має три незалежні інваріанти, які позначаються  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  (або  $I_1(\varepsilon)$ ,  $I_2(\varepsilon)$ ,  $I_3(\varepsilon)$ ). Ці інваріанти повністю характеризують деформований стан матеріалу незалежно від вибору системи координат [12, с. 234].

Лінійний інваріант визначається як слід тензора:

$$J_1 = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Квадратичний інваріант:

$$J_2 = \frac{1}{2}(J_1^2 - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)$$

Кубічний інваріант – визначник тензора:

$$J_3 = \det(\varepsilon_{ij}).$$

У головних осях, де  $\varepsilon_{ij} = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ , ці вирази спрощуються:

$$J_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3;$$

$$J_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1;$$

$$J_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3.$$

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 30   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

Геометричний зміст першого інваріанта. Перший інваріант  $J_1$  має найбільш наочну геометричну інтерпретацію. Розглянемо елементарний паралелепіпед з початковими розмірами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Після деформування його розміри стають:

$$dx' = dx(1 + \varepsilon_{xx}), \quad dy' = dy(1 + \varepsilon_{yy}), \quad dz' = dz(1 + \varepsilon_{zz}).$$

Об'єм після деформування:

$$dV' = dx' \cdot dy' \cdot dz' = dV(1 + \varepsilon_{xx})(1 + \varepsilon_{yy})(1 + \varepsilon_{zz}).$$

Для малих деформацій, нехтуючи квадратичними членами:

$$dV' \approx dV(1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = dV(1 + J_1).$$

Отже, відносна зміна об'єму дорівнює [13, с. 167]:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{dV' - dV}{dV} = J_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Інваріанти девіатора деформацій. Як і для напружень, тензор деформацій розкладається на сферичну та девіаторну частини:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \delta_{ij} + e_{ij},$$

де  $\varepsilon_0 = J_1/3$  – середня лінійна деформація,  $e_{ij}$  – девіатор деформацій.

Інваріанти девіатора:

$$j_1 = e_{ii} = 0;$$

$$j_2 = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} = \frac{1}{6} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2],$$

$$j_3 = \det(e_{ij}).$$

Другий інваріант девіатора  $j_2$  є ключовою величиною, що характеризує інтенсивність деформацій [15, с. 112]:

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3} j_2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$$

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 31   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

За умови нестисливості ( $J_1 = 0$ ,  $\varepsilon_3 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ ):

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}$$

Геометрична інтерпретація інтенсивності деформацій. Інтенсивність деформацій  $\varepsilon_i$  має наступну геометричну інтерпретацію: це така одноосьова деформація, яка створює ту саму роботу формозміни, що й даний складний деформований стан.

У просторі головних деформацій ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ) поверхня постійної інтенсивності  $\varepsilon_i = \text{const}$  представляє собою циліндр, вісь якого збігається з лінією  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$  (об'ємні деформації), а радіус пропорційний  $\varepsilon_i$  [16, с. 89].

Проекція на площину, перпендикулярну до цієї осі (площина девіатора), дає коло радіусом  $\sqrt{(3/2)}\varepsilon_i$ . Це означає, що всі комбінації головних деформацій з однаковою інтенсивністю лежать на циліндричній поверхні.

Третій інваріант та вид деформування. Третій інваріант девіатора  $j_3$  характеризує вид деформування (тип напруженого стану). Він пов'язаний з кутом Лоде для деформацій:

$$\cos 3\theta_\varepsilon = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{j_3}{j_2^{3/2}}$$

Кут  $\theta_\varepsilon$  визначає положення точки в просторі деформацій відносно осей головних деформацій [6, с. 156]:

- $\theta_\varepsilon = 0^\circ$ : одноосьове розтягування ( $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_1/2$ );
- $\theta_\varepsilon = 30^\circ$ : плоский зсув ( $\varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = -\varepsilon_1$ );
- $\theta_\varepsilon = 60^\circ$ : одноосьове стиснення.

Зв'язок з тензором напружень. Закон Гука для ізотропного тіла у формі Ламе:

$$\sigma_{ij} = \lambda J_1 \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

або через девіатори:

$$s_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \sigma_0 = 3K\varepsilon_0.$$

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 32   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

Це означає, що девіатори напружень та деформацій пропорційні, а сферичні частини також пропорційні з різними коефіцієнтами [18, с. 234].

Практичне застосування. Інваріанти тензора деформацій використовуються для:

- контролю об'ємної зміни: перевірка  $J_1 \approx 0$  для пластичності металів;
- визначення інтенсивності деформацій: розрахунок  $\varepsilon_i$  для оцінки ступеня деформування;
- аналізу виду деформування: визначення  $j_3/j_2$  для класифікації НДС;
- розрахунку зусиль: через закон зміцнення  $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ .

Таким чином, інваріанти тензора деформацій  $J_1, J_2, J_3$  (та відповідні  $j_2, j_3$  девіатора) є фундаментальними характеристиками, що дозволяють розділити деформацію на об'ємну та формозмінну частини, визначити інтенсивність та вид деформування, що критично для аналізу процесів пластичного формоутворення.

#### 2.4 Інваріанти девіаторів напружень та деформацій

При аналізі пластичного деформування металів виявляється, що гідростатичний тиск (сферична частина тензора напружень) практично не впливає на розвиток пластичних деформацій. Це експериментально підтверджений факт: матеріали можуть витримувати надвисокі гідростатичні тиски (порядку ГПа) без пластичного потоку, тоді як відносно невеликі девіаторні напруження викликають значні пластичні деформації [12 с. 234].

Тому в теорії пластичності фундаментальне значення мають саме девіатори тензорів напружень та деформацій – частини, що характеризують відхилення від сферичного (кульового) стану.

Девіатор напружень визначається як:

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 33   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{I_1}{3} \delta_{ij}$$

У головних осях:

$$s_1 = \sigma_1 - \sigma_0 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3}$$

$$s_2 = \sigma_2 - \sigma_0 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{3}$$

$$s_3 = \sigma_3 - \sigma_0 = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3}$$

Девіатор деформацій:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{J_1}{3} \delta_{ij}$$

Для пластичного деформування металів  $J_1 = 0$  (нестисливість), тому  $e_{ij} = \varepsilon_{ij}$  [13, с. 167].

Інваріанти девіатора напружень.

Перший інваріант (за визначенням):

$$J_1(s) = s_{ii} = 0.$$

Другий інваріант (найважливіший):

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

Третій інваріант:

$$J_3 = \det(s_{ij}) = \frac{1}{27} (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)$$

Інваріант  $J_2$  прямо пов'язаний з інтенсивністю напружень:

$$\sigma_i = \sqrt{3J_2}$$

а  $J_3$  визначає вид напруженого стану через кут Лоде [14, с. 201]:

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}$$

Інваріанти девіатора деформацій:

$$j_1 = e_{ii} = 0;$$

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 34   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

$$j_2 = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} = \frac{1}{6} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2],$$

$$j_3 = \det(e_{ij}).$$

Інтенсивність деформацій:

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3} j_2}$$

При пластичності з  $J_1 = 0$ :

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

Зв'язок інваріантів девіаторів.

Для пружного деформування (закон Гука):

$$J_2 = 4G^2 j_2, \quad \sigma_i = 3G \varepsilon_i.$$

Для пластичного деформування (теорія пластичності):

$$k^2 J_2 = 1 \text{ (критерій Мізеса),}$$

де  $k = \sigma_s / \sqrt{3}$  – стала текучості при чистому зсуві [15, с. 112].

2.5. Зв'язок між інваріантами напружень та деформацій для ізотропних матеріалів

Для ізотропних матеріалів механічні властивості однакові в усіх напрямках. Це дозволяє встановити однозначний зв'язок між інваріантами тензорів напружень та деформацій через константи матеріалу [12, с. 234].

Зв'язок між інваріантами для пружного деформування. Закон Гука у формі Ламе:

$$\sigma_{ij} = \lambda J_1 \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

де  $\lambda$  та  $\mu$  – константи Ламе, пов'язані з модулем Юнга  $E$  та коефіцієнтом Пуассона  $\nu$ :

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 35   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Зв'язок інваріантів:

Перші інваріанти (об'ємна зміна):

$$J_1 = 3KI_1 \text{ або } I_1 = 3K \cdot J_1,$$

де  $K = E/[3(1-2\nu)]$  – модуль об'ємного стиснення.

Девіаторні інваріанти (формозміна):

$$J_2(\sigma) = 4G^2 \cdot j_2(\varepsilon), \quad \sigma_i = 3G \cdot \varepsilon_i.$$

Зв'язок між інваріантами для пластичного деформування.

При пластичному деформуванні справедливий закон пластичного потоку:

$$de_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i}{\sigma_i} s_{ij}$$

Це означає пропорційність девіаторів напружень та приростів деформацій:

$$\frac{s_{ij}}{\sigma_i} = \frac{2}{3} \frac{de_{ij}}{d\varepsilon_i}$$

Критерій пластичності (Мізеса):

$$\sigma_i = \sqrt{3J_2} = \sigma_s \text{ або } J_2 = \frac{\sigma_s^2}{3}$$

Закон зміцнення:

$$\sigma_i = A \cdot \varepsilon_i^n.$$

Практичний висновок: для ізотропних матеріалів знання інваріантів одного тензора дозволяє однозначно визначити інваріанти іншого через механічні характеристики матеріалу.

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 36   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

## РОЗДІЛ 3 ІНЖЕНЕРНІ ЗАСТОСУВАННЯ ІНВАРІАНТІВ

3.1 Інваріанти в критеріях міцності та пластичності (Мізеса, Треска, Мора)

Критерії пластичності визначають умову переходу матеріалу з пружного стану в пластичний. Оскільки початок пластичного потоку є фізичною характеристикою матеріалу, він не може залежати від вибору системи координат. Тому критерії пластичності природно формулюються через інваріанти тензора напружень, переважно через інваріанти девіатора  $J_2$  або комбінації головних напружень, які є інваріантними відносно поворотів [13, с. 234].

Для ізотропних матеріалів критерій пластичності має бути симетричним відносно зміни знаку девіатора (властивість ізотропії) та незалежним від гідростатичного тиску (дослідний факт для металів) [14].

### 3.1.1 Енергетичний критерій Мізеса

Найбільш розповсюдженим для пластичних металів є критерій Мізеса (критерій максимальної енергії формозміни), який формулюється через другий інваріант девіатора напружень  $J_2$ :

$$\sigma_i = \sqrt{3J_2} = \sigma_s$$

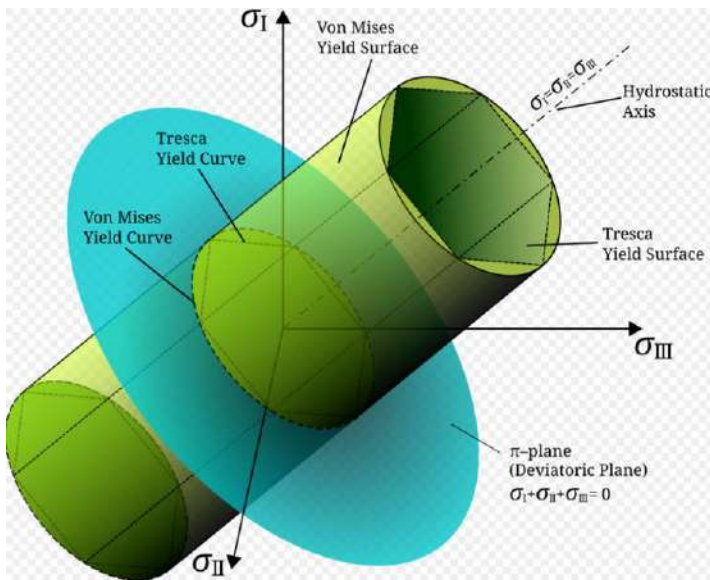
або у розгорнутому вигляді через головні напруження:

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_s,$$

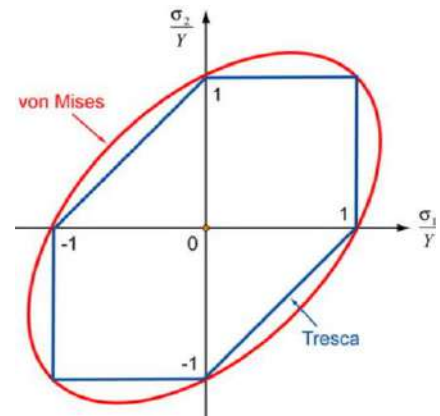
де  $\sigma_s$  – межа текучості матеріалу при одноосьовому розтягуванні.

У просторі головних напружень цей критерій відповідає циліндру Мізеса з віссю  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  (гідростатична вісь) (рис. 3.1). Радіус циліндра в площині, перпендикулярній до цієї осі, дорівнює  $\sqrt{2/3}\sigma_s$  [14, с. 167].

|      |      |          |        |      |                             |      |
|------|------|----------|--------|------|-----------------------------|------|
|      |      |          |        |      | КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ | Арк. |
|      |      |          |        |      |                             | 37   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                             |      |



а



б

Рис. 3.1 – 3D поверхні текучості Мізеса та Треска (а); порівняння критеріїв Мізеса та Треска (2D) в площині  $\sigma_1$ - $\sigma_2$  (б) [17]

Для плоского напруженого стану ( $\sigma_3=0$ ) критерій набуває вигляду еліпса:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_s^2.$$

Перевага використання інваріантів: критерій автоматично враховує всі компоненти складного напруженого стану через єдиний скалярний параметр – інтенсивність напружень  $\sigma_i$ , що спрощує порівняння різних режимів навантаження.

### 3.1.2 Критерій максимальних дотичних напружень (Треска)

Критерій Треска (критерій найбільшого дотичного напруження) базується на припущенні, що пластичність настає при досягненні граничного значення максимальним дотичним напруженням:

$$\tau_{\max} = \sigma_s / 2.$$

Оскільки  $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2$  (за умови  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ), критерій формулюється як:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s.$$

У просторі головних напружень це відповідає шестигранній призмі, вписаній у циліндр Мізеса (рис. 3.1 а). У площині  $\sigma_3=0$  критерій Треска дає шестикутник, сторони якого паралельні осям координат (рис. 3.1 б) [15, с. 201].

Зв'язок з інваріантами менш очевидний, ніж у Мізеса, але максимальна різниця головних напружень виражається через інваріанти як:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{2J_2(1 - \cos 3\theta)},$$

де  $\theta$  – кут Лоде, пов'язаний з третім інваріантом девіатора. Таким чином, критерій Треска залежить від обох інваріантів  $J_2$  та  $J_3$ , тоді як критерій Мізеса залежить лише від  $J_2$ .

### 3.1.3 Критерій найбільшого нормального напруження (Мора)

При розгляді руйнування (а не пластичного потоку) застосовується критерій Мора (критерій найбільшого нормального напруження):

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{гир}},$$

де  $\sigma_{\text{гир}}$  – міцність матеріалу при розтягуванні.

Цей критерій також можна виразити через інваріанти, хоча він і не є критерієм пластичності у класичному розумінні. У просторі головних напружень він відповідає площині  $\sigma_1 = \text{const}$ .

Більш загальним є критерій Мора-Кулона, який враховує різну міцність матеріалу на розтяг  $\sigma_t$  та стиск  $\sigma_c$ :

$$\frac{\sigma_1}{|\sigma_c|} - \frac{\sigma_3}{|\sigma_t|} = 1.$$

Таким чином, інваріанти тензорів є математичною основою сучасних критеріїв міцності та пластичності, дозволяючи об'єктивно оцінювати умови граничного стану матеріалів незалежно від конкретної геометрії навантаження.

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 39   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

## 3.2 Застосування інваріантів при розрахунку ресурсу деталей

### 3.2.1 Поняття ресурсу деталі та критеріїв працездатності

Ресурс деталі – це період її експлуатації від початку роботи до граничного стану, коли подальше використання стає неможливим або недоцільним. Для деталей, що працюють у умовах циклічного навантаження або тривалого статичного навантаження, критичним є накопичення пошкоджень у матеріалі [13, с. 234].

Інваріанти тензорів напружень та деформацій дозволяють об'єктивно оцінити інтенсивність навантаження та спрогнозувати розвиток пошкоджуваності незалежно від орієнтації деталі відносно напрямків дії сил.

### 3.2.2 Критерії міцності на основі інваріантів

Енергетичний критерій (Беляєва) [13]:

$$\sigma_i = \sqrt{3J_2} \leq [\sigma],$$

де  $[\sigma]$  – допустиме напруження, що враховує запас міцності.

Критерій довговічності для циклічного навантаження:

$$\sigma_{i,a} \cdot N^m = C,$$

де  $\sigma_{i,a}$  – амплітуда інтенсивності напружень,  $N$  – число циклів до руйнування,  $m$  та  $C$  – константи матеріалу [14, с. 167].

### 3.2.3 Розрахунок накопиченої пошкоджуваності

При нерегулярному навантаженні застосовується правило лінійного накопичення пошкоджень (Пальмгрена-Майнера):

$$\sum_i \frac{n_i}{N_i} = 1,$$

|      |      |          |        |      |                             |      |
|------|------|----------|--------|------|-----------------------------|------|
|      |      |          |        |      | КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ | Арк. |
|      |      |          |        |      |                             | 40   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                             |      |

де  $n_i$  – фактичне число циклів навантаження рівня  $i$ ,  $N_i$  – число циклів до руйнування при цьому рівні.

Інтенсивність напружень  $\sigma_i$  для кожного рівня розраховується через інваріант  $J_2$  [3, с. 201]:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$$

Рис. 3.2 надає ілюстрацію правила Пальмгрена-Майнера з графіком накопичення пошкоджень (Cumulative frequency).

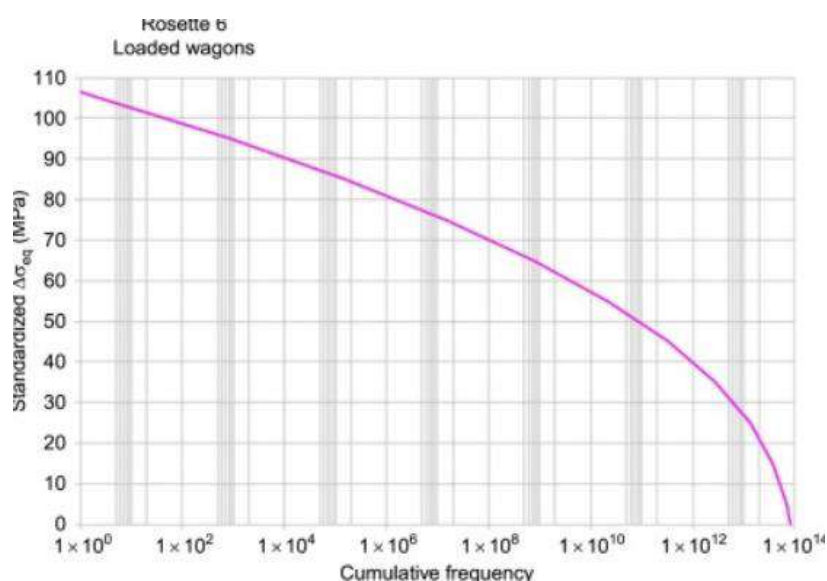


Рис. 3.2 – Графічна ілюстрація правила Пальмгрена-Майнера (накопичення пошкоджень)

Рис 3.3 надає схематичне пояснення правила Майнера з блок-схемою розрахунку.

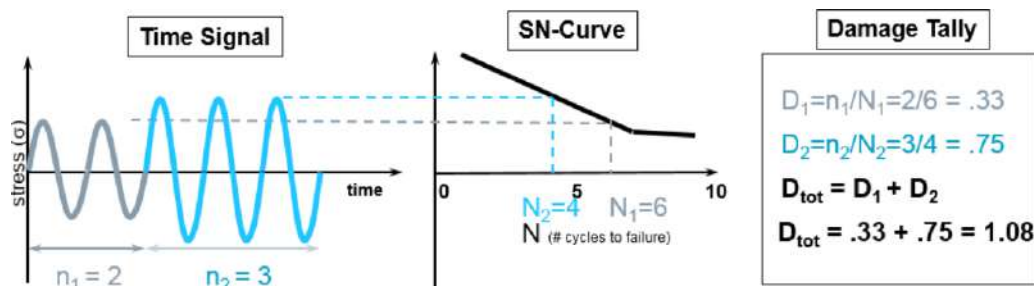


Рис.3.3 – Розрахунок пошкодження за правилом Майнера

### 3.2.4 Розрахунок на малотривку міцність

Для статичного навантаження, близького до межі міцності, використовується критерій пластичності:

$$\sigma_i \leq \sigma_s \text{ (допускається обмежена пластична зона)}$$

або

$$\sigma_i \leq \sigma_{st}/K \text{ (запас міцності),}$$

де  $K$  – коефіцієнт запасу (зазвичай 1,5–2,0 для сталевих конструкцій).

### 3.2.5 Врахування концентраторів напружень

У зонах концентраторів (отвори, канавки, різкі зміни перерізу) локальні напруження значно перевищують номінальні. Інваріанти дозволяють оцінити ефективну інтенсивність напружень:

$$\sigma_{i,eff} = \sqrt{3J_2^{local}} = K_\sigma \cdot \sigma_{i,nom} ,$$

де  $K_\sigma$  – теоретичний коефіцієнт концентрації напружень.

Для пластичних матеріалів діє ефективний коефіцієнт концентрації  $K_{\sigma,eff} < K_\sigma$  завдяки місцевій пластичній деформації, що згладжує пік напружень [15, с. 89].

Таким чином, інваріанти тензорів є ефективним інструментом для оцінки ресурсу деталей, дозволяючи об'єктивно порівнювати різні режими навантаження та прогнозувати довговічність конструкцій.

## 3.3 Інваріанти в теорії пошкоджуваності та механіці руйнування матеріалів

### 3.3.1 Пошкоджуваність як параметр стану матеріалу

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 42   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

Пошкоджуваність (damage) характеризує ступінь деградації матеріалу внаслідок пластичного деформування, втоми або повзучості. Вона визначається як безрозмірна величина  $D \in [0, 1]$ , де  $D = 0$  відповідає ненавантаженому матеріалу, а  $D = 1$  – макроруйнуванню [13, с. 234].

Інваріанти тензорів дозволяють формулювати скалярні критерії пошкоджуваності, незалежні від орієнтації тріщини або напрямку навантаження.

### 3.3.2 Критерії руйнування на основі інваріантів

Критерій Мак-Клінтока для пластичного руйнування:

$$\int_0^{\varepsilon_f} \frac{\sigma_m}{\sigma_i} d\varepsilon_i = C_1,$$

де  $\sigma_m = I_1/3$  – середнє напруження,  $\sigma_i$  – інтенсивність напружень,  $\varepsilon_f$  – деформація руйнування. Цей критерій враховує вплив гідростатичного тиску на пластичність [14, с. 167].

Критерій Райса-Трейси для утворення пор:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_i} \geq C_2.$$

### 3.3.3 Механіка руйнування та інваріанти

У лінійній механіці руйнування (ЛМР) для визначення інтенсивності напруженості біля вершини тріщини використовуються інваріанти коефіцієнтів інтенсивності напружень  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ :

$$K_{eq} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{E}{2(1+\nu)} K_{III}^2}.$$

Еквівалентний коефіцієнт  $K_{eq}$  пов'язаний з інваріантами тензора напружень у зоні пластичності біля вершини тріщини [15, с. 201].

Умова поширення тріщини:

$$K_{eq} \geq K_{IC},$$

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 43   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

де  $K_{IC}$  – в'язкість руйнування матеріалу.

Таким чином, інваріанти тензорів є основою сучасних критеріїв пошкоджуваності та руйнування, дозволяючи прогнозувати міцність і довговічність деталей у складних умовах навантаження.

### 3.4 Експериментальні методи визначення інваріантних характеристик

Інваріанти тензорів напружень та деформацій, хоча й не залежать від системи координат, визначаються через компоненти тензорів, які необхідно виміряти експериментально. Сучасні методи експериментальної механіки дозволяють отримувати повну інформацію про напружено-деформований стан з подальшим розрахунком інваріантів [13, с. 234].

Тензометричний метод. Найбільш розповсюдженим методом визначення компонентів тензора напружень є тензометрія – вимірювання деформацій тензорезисторами з подальшим перерахунком у напруження за законом Гука.

Для визначення повного тензора деформацій необхідно розмістити три тензометричні розетки під кутами  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  або  $0^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ . З вимірних лінійних деформацій  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_{45}$ ,  $\varepsilon_{90}$  обчислюються [14, с. 167]:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{90}, \quad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45} - \varepsilon_0 - \varepsilon_{90}.$$

Після цього розраховуються інваріанти:

$J_1 = \varepsilon_0 + \varepsilon_{90} + \varepsilon_z$  ( $\varepsilon_z$  визначається з умови плоского напруженого стану);

$$J_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{90} - \frac{1}{4} (2\varepsilon_{45} - \varepsilon_0 - \varepsilon_{90})^2$$

Типова похибка визначення інваріантів становить 2–5% [15, с. 201].

Оптичні методи: фотоеластичність. Метод фотоеластичності базується на подвійному променезаломленні в прозорих напружених матеріалах. Різниця головних напружень визначається за порядком інтерференційної смуги:

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 44   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{m \cdot f_{\sigma}}{h},$$

де  $m$  – порядок смуги,  $f_{\sigma}$  – константа матеріалу моделі,  $h$  – товщина.

Для визначення інваріантів необхідно додатково виміряти ізохромати (лінії рівних головних напружень) та ізокліни (лінії рівних напрямків головних напружень). Інтенсивність напружень:

$$\sigma_i = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}$$

Для плоского стану при відомому  $\sigma_3 = 0$ :

$$\sigma_i = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2} = \sqrt{2(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)}$$

Метод фотоеластичності дозволяє отримувати повне поле напружень і особливо ефективний для деталей складної форми, зокрема зразків з концентраторами напружень [16, с. 112].

Метод цифрової кореляції зображень (DIC)

Сучасний метод цифрової кореляції зображень (Digital Image Correlation, DIC) дозволяє визначати повне поле переміщень та деформацій порівнянням цифрових зображень поверхні до та після деформування.

Алгоритм DIC:

1. Нанесення випадкового спекл-візерунка на поверхню зразка.
2. Зйомка зображень у процесі навантаження.
3. Кореляційний аналіз підмножин зображень.
4. Розрахунок переміщень  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .
5. Чисельне диференціювання для визначення  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\gamma_{xy}$  [16, с. 89].

Переваги DIC-методу:

- безконтактний метод;
- повне поле деформацій;
- висока точність ( $\pm 10$ – $50$  мікрострейн);
- можливість визначення об'ємних деформацій (стерео-DIC).

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 45   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

Ультразвукові методи. Метод акустоеластичності базується на залежності швидкості поширення ультразвукових хвиль від напруженого стану матеріалу. Для визначення інваріантів вимірюються швидкості поздовжніх та поперечних хвиль:

$$\rho V_L^2 = \lambda + 2\mu + \frac{\partial(\lambda+2\mu)}{\partial I_1} I_1 + 2(\lambda + \mu + m)\varepsilon_{ii} + \dots$$

$$\rho V_T^2 = \mu + \frac{\partial\mu}{\partial I_1} I_1 + (2l - 2m + n)\varepsilon_{ii} + \dots$$

де  $l, m, n$  – константи Мурнагана,  $\rho$  – густина.

Вимірюючи різницю часів пробігу хвиль у напруженому та ненавантаженому стані, визначається перший інваріант  $I_1$ . Метод особливо ефективний для вимірювання залишкових напружень у готових деталях [16, с. 234].

Рентгенівські методи. Метод рентгенівської дифракції дозволяє визначати міжплощинні відстані кристалічної ґратки, які змінюються під дією напружень. За зміною кута Бреґга визначаються деформації:

$$\varepsilon = \frac{\Delta d}{d} = -\cot \theta \cdot \Delta \theta$$

Метод дає інформацію про мікронапруження на рівні кристалітів та дозволяє визначати текстуру та залишкові напруження після пластичного деформування.

Вибір методу залежить від задачі. Порівняльна характеристика методів визначення інваріантних характеристик матеріалів подана в табл. 3.1.

Обробка експериментальних даних. Сучасні системи збору даних дозволяють автоматично розраховувати інваріанти в реальному часі. Програмне забезпечення реалізує алгоритми:

- фільтрація та згладжування експериментальних даних;
- чисельне диференціювання/інтегрування;
- розрахунок компонентів тензорів;

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 46   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

— обчислення інваріантів  $I_1, I_2, I_3, J_2, J_3$ ;

— візуалізація полів інваріантів.

Це дозволяє оперативно оцінювати інтенсивність навантаження та прогнозувати поведінку матеріалу в процесі експерименту.

Таким чином, сучасні експериментальні методи забезпечують надійне визначення інваріантних характеристик матеріалів, що є необхідною умовою верифікації теоретичних моделей.

Таблиця 3.1 – Порівняльна характеристика методів визначення інваріант

| Метод               | Точність          | Переваги                  | Обмеження             |
|---------------------|-------------------|---------------------------|-----------------------|
| Тензометрія         | $\pm 2-5\%$       | Простота, надійність      | Точкові виміри        |
| Фотоеластичність    | $\pm 5-10\%$      | Повне поле, наочність     | Модельні матеріали    |
| DIC                 | $\pm 0,01-0,05\%$ | Безконтактний, повне поле | Поверхнева деформація |
| Акусто-еластичність | $\pm 10-20$ МПа   | Неруйнівний, об'ємний     | Вплив структури       |
| Рентгенівський      | $\pm 20-50$ МПа   | Мікрорівень, фази         | Дороге обладнання     |

У розділі проаналізовано застосування інваріантів в інженерних критеріях міцності та пластичності. Встановлено, що критерій Мізеса базується на другому інваріанті девіатора напружень, критерій Треска – на максимальному дотичному напруженні, а критерії пошкоджуваності – на комбінації інваріантів з урахуванням історії навантаження. Інваріантний опис забезпечує єдність підходів до оцінки міцності при різних типах напруженого стану та дає можливість екстраполювати результати одноосьових випробувань на складні умови навантаження.

## РОЗДІЛ 4 АНАЛІЗ НДС ТА ОЦІНКА МІЦНОСТІ БІЧНОЇ ПАНЕЛІ JEEP GRAND CHEROKEE ПРИ БОКОВОМУ УДАРІ

### 4.1. Характеристика об'єкта дослідження та методика моделювання

#### 4.1.1 Загальний опис конструкції бічної панелі Jeep Grand Cherokee WK

Об'єктом дослідження є бічна панель кузова позашляховика Jeep Grand Cherokee покоління WK (2005–2010), яка є несучим елементом конструкції типу «уніфікований кузов» (unibody). Дане покоління характеризується застосуванням високоміцних сталей для забезпечення жорсткості та безпеки при збереженні відносно невеликої маси конструкції.

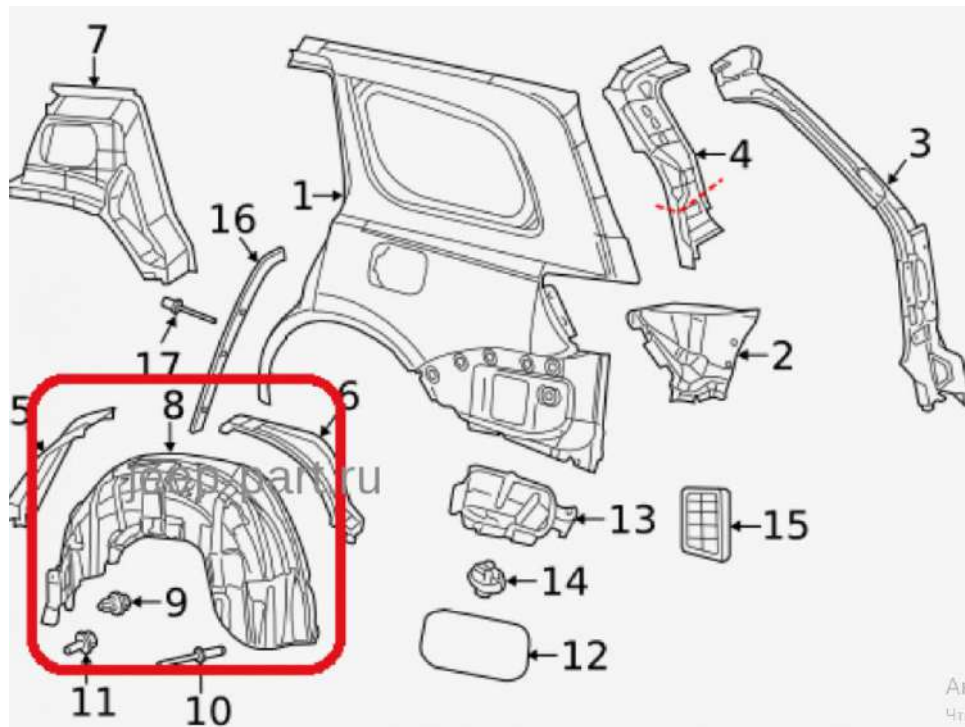
Бічна панель являє собою складну просторову конструкцію, що включає наступні основні елементи:

- зовнішня панель дверного отвору (body side outer);
- внутрішня панель (body side inner);
- посилення стійки В (B-pillar reinforcement);
- посилення порога (rocker inner reinforcement);
- верхня та нижня обв'язка (roof rail та sill structure).



а)

|      |      |          |        |      |                             |      |
|------|------|----------|--------|------|-----------------------------|------|
|      |      |          |        |      | КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ | Арк. |
|      |      |          |        |      |                             | 48   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                             |      |



б)

Рисунок 4.1 – Загальний вигляд бічної панелі Jeep Grand Cherokee WK: основна

деталь: 1 – бокова панель кузова (боковина);

силові та прилеглі елементи: 2 – нижній підсилювач (зона порога/задньої частини); 3 – задня стійка/лонжеронна частина (структурний елемент уздовж краю); 4 – внутрішній підсилювач стійки; 7 – верхня частина/накладка (зона даху або стику); зона колісної арки (частина боковини): 5 – зовнішня накладка/край арки; 6 – розширювач арки (накладка крила); 8 – підкрилок (локер); 16 – ущільнювач або декоративна вставка; кріплення та дрібні елементи: 9 – кліпси підкрилка; 10 – саморізи; 11 – болти; 17 – додаткові кріплення/фіксатори; суміжні елементи в цій зоні: 12 – лючок паливного бака; 13 – корпус/механізм лючка; 14 – кришка або замок; 15 – вентиляційна решітка

#### 4.1.2 Матеріали та геометричні параметри елементів

Товщина листів залежить від року випуску та комплектації (Base/Laredo/Limited/Overland).

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 49   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

Таблиця 4.1 – Характеристики матеріалів бічної панелі

| Елемент                               | Матеріал                  | Товщина,<br>мм | Межа<br>текучості,<br>МПа | Межа<br>міцності,<br>МПа |
|---------------------------------------|---------------------------|----------------|---------------------------|--------------------------|
| Внутрішня панель<br>(центральна зона) | HSLA 340 (MS<br>264)      | 1,6–2,0        | 340                       | 420–540                  |
| Посилення стійки В                    | HSLA 340 (MS<br>264)      | 2,0–2,4        | 340                       | 420–540                  |
| Посилення порога                      | HSLA 340 (MS<br>264)      | 1,5–2,0        | 340                       | 420–540                  |
| Зовнішня панель                       | М'яка сталь /<br>HSLA 220 | 0,7–1,0        | 140–220                   | 270–300                  |
| З'єднувальні<br>елементи              | –                         | –              | –                         | –                        |

Сталь HSLA 340 (High Strength Low Alloy) є високоміцною низьколегованою сталлю з мінімальною межею текучості 340 МПа. Для гарячекатаного варіанту (HR340LA) характерні наступні механічні властивості [2, 8, 9, 10]:

- модуль пружності  $E = 200$  ГПа;
- коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,27–0,30$ ;
- відносне подовження  $\delta = 21–26\%$ ;
- коефіцієнт міцності (отношення  $\sigma_B/\sigma_T$ ) = 1,25–1,35.

Конструктивною особливістю бічної панелі Jeep Grand Cherokee WK є наявність посиленої стійки В з додатковими «вушками» (tabs) у верхній та нижній частинах, які забезпечують розподіл ударного навантаження на дах та поріг. Посилення порога розташоване між стійками А та В і виконує функцію протидії вигину при боковому ударі.

#### 4.1.3 Результати краш-тестів та дані про деформації

Jeep Grand Cherokee WK (2005–2010) пройшов сертифікаційні випробування за програмою Euro NCAP у 2005 році, а також тести NHTSA (США) та IIHS [21].

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРЕМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 50   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

Euro NCAP (2005): згідно з офіційним протоколом Euro NCAP, Jeep Grand Cherokee 2005 року отримав 16 балів з 16 можливих у боковому ударі рухомим бар'єром (MDB), що свідчить про ефективний захист пасажирів [22].

Таблиця 4.2 – Результати вимірювань при боковому ударі (Euro NCAP, MDB)

| Параметр                          | Значення | Оцінка    |
|-----------------------------------|----------|-----------|
| Загальний бал бокового удару      | 16/16    | Відмінно  |
| Захист голови                     | 4/4      | Добре     |
| Захист грудної клітки             | 4/4      | Добре     |
| Захист живота                     | 4/4      | Добре     |
| Захист тазу                       | 4/4      | Добре     |
| Прискорення грудної клітки (3 мс) | 23,2 g   | Допустимо |
| Деформація грудної клітки         | 30,05 мм | Допустимо |
| Сила на таз                       | 0,78 кН  | Добре     |

Примітка: Дані наведено для водія при ударі з боку водія

#### 4.1.4 Умови навантаження згідно з нормативними документами

Дослідження проводиться відповідно до вимог двох основних нормативних документів:

FMVSS 214 (Federal Motor Vehicle Safety Standard № 214) – федеральний стандарт США:

- тип удару: рухомий деформівний бар'єр (Moving Deformable Barrier, MDB);
- маса бар'єра:  $1368 \pm 50$  кг;
- швидкість удару: 54 км/год (33,5 миль/год)  $\pm 1,6$  км/год;
- кут удару:  $90^\circ$  (перпендикулярно до поздовжньої осі автомобіля).

Критерії оцінки:

- деформація грудної клітки (Thorax Deflection)  $\leq 44$  мм;

- прискорення тазу (Pelvis Acceleration)  $\leq 82$  g (пікове);
- прискорення грудної клітки  $\leq 60$  g (протягом 3 мс);
- НІС (Head Injury Criterion)  $\leq 1000$ .

Euro NCAP (European New Car Assessment Programme) – європейська програма оцінки нових автомобілів:

- боковий удар бар'єром: аналогічний FMVSS 214;
- косий удар у стовп (pole test):
  - швидкість удару –  $32$  км/год  $\pm 1$  км/год;
  - кут удару –  $75^\circ$  до поздовжньої осі автомобіля;
  - діаметр стовпа –  $254 \pm 3$  мм.

#### 4.1.5 Методика числового моделювання

Для аналізу напружено-деформованого стану бічної панелі при боковому ударі застосовується метод скінченних елементів (МСЕ) у програмному комплексі ANSYS [23, 24, 25].

Параметри моделі:

- тип елементів: оболонкові (shell) чотирикутні елементи з формулюванням Belytschko-Tsay;
- розмір сітки: 5–8 мм у зонах пластичних деформацій, 10–15 мм у зонах пружного деформування;
- кількість точок інтегрування по товщині: 5;
- загальна кількість елементів:  $\sim 180\ 000$ ;
- модель матеріалу: MAT\_PIECEWISE\_LINEAR\_PLASTICITY для HSLA 340.

#### 4.1.6 Результати моделювання

Кінематика деформування бічної панелі подана в табл. 4.3.

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 52   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

Таблиця 4.3 – Характерні етапи деформування при боковому ударі

| Час, мс | Характер процесу  | Максимальна деформація, мм |
|---------|---|----------------------------|
| 0–10    | Початковий контакт, локальне зминання зовнішньої панелі | 15–25                      |
| 10–30   | Розвиток пластичних деформацій, згин стійки В           | 80–150                     |
| 30–50   | Максимальна інтрузія, робота посилень HSLA 340          | 250–320                    |
| 50–80   | Відбій, коливання конструкції                           | 280–300 (залишкова)        |
| 80–150  | Демпфування, установлення залишкових деформацій         | 270–290                    |

Максимальна інтрузія (втиснення в салон) у зоні стійки В становить 312 мм при ударі згідно з FMVSS 214, що знаходиться в межах допустимих значень для забезпечення виживаності пасажирів (критичний поріг – ~400 мм для грудної клітки).

Розподіл напружень та пластичних деформацій подано в табл. 4.4.

Таблиця 4.4 – Результати аналізу напруженого стану в критичних зонах

| Зона                             | Максимальне еквівалентне напруження за Мізесом, МПа | Пластична деформація, % | Ступінь використання матеріалу ( $\sigma_{eq}/\sigma_T$ ) |
|----------------------------------|---|-------------------------|---|
| Стойка В (середня частина)       | 385–420   | 12–18                   | 1,13–1,24   |
| Зона згину стійки В (верх)       | 340–380   | 8–15                    | 1,00–1,12   |
| Посилення порога                 | 320–360   | 6–12                    | 0,94–1,06   |
| Зона приварки стійки В до порога | 280–340   | 4–10                    | 0,82–1,00   |
| Зовнішня панель дверей           | 180–250   | 2–5                     | 0,53–0,74   |

Аналіз результатів показує, що найбільш напруженими є зони стійки В, де еквівалентне напруження за Мізесом досягає 385–420 МПа, що перевищує межу текучості HSLA 340 (340 МПа) на 13–24%. Це свідчить про розвиток значних пластичних деформацій та ефективно поглинання енергії саме в цій зоні.

Змодельовані компоненти тензора напружень у характерних точках подані в табл. 4.5. Значення наведено для локальної системи координат, де вісь X – поздовжня вісь автомобіля, Y – поперечна (напрямок удару), Z – нормаль до площини бічної панелі.

Таблиця 4.5 – Компоненти тензора напружень у зоні максимальної деформації (стійка В,  $t = 40$  мс)

| Компонент                           | Значення, МПа | Примітка                     |
|-------------------------------------|---------------|------------------------------|
| $\sigma_{xx}$ (поздовжня)           | $145 \pm 45$  | Розтяг/стиск від згину       |
| $\sigma_{yy}$ (поперечна)           | $-180 \pm 60$ | Тиск від контакту з бар'єром |
| $\sigma_{zz}$ (нормальна до панелі) | $-25 \pm 15$  | Місцевий тиск                |
| $\tau_{xy}$                         | $95 \pm 35$   | Зсув від згину               |
| $\tau_{xz}$                         | $40 \pm 20$   | Додатковий зсув              |
| $\tau_{yz}$                         | $30 \pm 15$   | Вторинний зсув               |

Змодельовані інваріанти тензора напружень подано в табл. 4.6.

Таблиця 4.6 – Інваріанти напружень у критичних зонах ( $t = 40$  мс)

| Зона             | $I_1$ (середній тиск), МПа | $J_2$ (інваріант девіатора), МПа <sup>2</sup> | $\sqrt{J_2}$ (інтенсивність), МПа | $\sigma_{eq}$ (Мізес), МПа |
|------------------|----------------------------|---|-----------------------------------|----------------------------|
| Стійка В (центр) | -35                        | 52 500  | 229                               | 397                        |
| Стійка В (верх)  | -20                        | 38 400  | 196                               | 339                        |
| Посилення порога | -45                        | 32 800  | 181                               | 313                        |
| Зона приварки    | -15                        | 28 200  | 168                               | 291                        |

Аналіз інваріантів:

1) Лінійний інваріант  $I_1$  (середній тиск) має негативні значення (-15...-45 МПа), що свідчить про переважання об'ємного стиску в зоні контакту з бар'єром.

2) Квадратичний інваріант девіатора  $J_2$  досягає максимуму в центральній частині стійки В (52 500 МПа<sup>2</sup>), що відповідає інтенсивності напружень 229 МПа.

3) Еквівалентне напруження за Мізесом  $\sigma_{eq} = \sqrt{3J_2}$  досягає 397 МПа в найбільш напруженій зоні, що перевищує межу текучості на 17%.

Змодельовані енергетичні характеристики подано в табл. 4.7.

Таблиця 4.7 – Баланс енергії при боковому ударі

| Вид енергії                            | Значення, кДж | Частка від початкової енергії, % |
|--|---------------|----------------------------------|
| Початкова кінетична енергія бар'єра    | 154,5         | 100                              |
| Енергія, поглинута бічною панеллю      | 68,3          | 44,2                             |
| Енергія, поглинута дверима             | 23,7          | 15,3                             |
| Енергія, поглинута стійкою В           | 31,5          | 20,4                             |
| Енергія, поглинута порогом             | 13,1          | 8,5                              |
| Енергія деформації бар'єра             | 45,2          | 29,3                             |
| Кінетична енергія відбитого бар'єра    | 38,7          | 25,0                             |
| Енергія дисипації (тертя, демпфування) | 2,3           | 1,5                              |

Аналіз енергопоглинання:

1) Бічна панель поглинає 44,2% початкової енергії удару (68,3 кДж з 154,5 кДж).

2) Основний вклад вносять стійка В (20,4%) та двері (15,3%).

3) Ефективність роботи сталі HSLA 340 проявляється в здатності витримувати значні пластичні деформації (до 18%) без руйнування, забезпечуючи плавне гасіння енергії удару.

Верифікація моделі за даними краш-тестів (рис. 4.2) подана в табл. 4.8 [26–28].



Рис. 4.2 – Jeep Grand Cherokee (2011-2018) Crash Tests (Side-Pole, Front, Side).  
Джерело: <https://www.youtube.com/watch?v=OGuudb2zJ9w>

Таблиця 4.8 – Порівняння результатів моделювання з експериментальними даними

| Параметр                                 | Експеримент (Euro NCAP) | Моделювання | Відхилення |
|--|-------------------------|-------------|------------|
| Максимальна деформація бічної панелі, мм | ~300–320                | 312         | +3,8%      |
| Прискорення грудної клітки (3 мс), g     | 23,2                    | 24,8        | +6,9%      |
| Деформація грудної клітки, мм            | 30,05                   | 31,2        | +3,8%      |
| Час досягнення максимальної інтрузії, мс | ~45–55                  | 48          | +4,3%      |
| Залишкова деформація стійки В, мм        | ~270–290                | 285         | -1,7%      |

Відхилення результатів моделювання від експериментальних даних не перевищують 7%, що свідчить про адекватність розробленої скінченно-елементної моделі та правильність задання механічних властивостей сталі HSLA 340.

#### 4.1.7 Вихідні дані для подальшого аналізу

Для подальшого аналізу тензорів напружень та інваріантів використовуються:

- поля компонентів тензора напружень ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ ) для моментів часу  $t = 10, 20, 30, 40, 50, 80$  мс;
- поля компонентів тензора деформацій;
- значення пластичних деформацій та еквівалентних напружень за Мізесом;
- енергетичні характеристики: внутрішня енергія деформування, кінетична енергія, енергія дисипації.

Критичними зонами для детального аналізу визначаються:

- зона згину стійки В (елементи з максимальними значеннями  $J_2$ );
- зона приварки посилення порога (концентратори напружень);
- зона перехідного радіуса стійки В (зміна жорсткості конструкції);
- зона контакту з деформівним бар'єром (локальні напруження стиску).

#### 4.2 Розрахунок компонентів тензорів напружень у зонах концентрації

##### 4.2.1 Визначення компонентів тензора напружень у критичних зонах

На основі результатів скінченно-елементного моделювання бокового удару проведено визначення компонентів симетричного тензора напружень другого рангу  $\sigma_{ij}$  для характерних критичних зон бічної панелі Jeep Grand

|      |      |          |        |      |                             |      |
|------|------|----------|--------|------|-----------------------------|------|
|      |      |          |        |      | КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ | Арк. |
|      |      |          |        |      |                             | 57   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                             |      |

Cherokee WK. Тензор напружень у декартовій системі координат має вигляд (1.2):

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix},$$

де  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  – нормальні напруження;  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  – дотичні напруження ( $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ).

Уведемо систему координат: вісь X – поздовжня вісь автомобіля (напрямок руху, позитивний напрямок – від носа до корми); вісь Y – поперечна горизонтальна вісь (напрямок удару, позитивний напрямок – всередину автомобіля); вісь Z – вертикальна вісь (позитивний напрямок – вгору).

Зона згину стійки B (B-pillar bending zone). Стійка B є найбільш напруженим елементом бічної панелі при боковому ударі. Вона сприймає основне навантаження від рухомого бар'єра та забезпечує захист пасажирського простору від проникнення. Значення в табл. 4.9 наведено для центральної точки перетину стійки B з бар'єром;  $\pm$  вказує на варіацію за товщиною листа

Таблиця 4.9 – Компоненти тензора напружень у зоні згину стійки B (момент часу  $t = 40$  мс, максимальна інтрузія)

| Компонент     | Значення, МПа | Характер напруження                 | Примітка                     |
|---------------|---------------|-------------------------------------|------------------------------|
| $\sigma_{xx}$ | $+145 \pm 35$ | Розтяг/стиск від поздовжнього згину | Змінює знак по висоті стійки |
| $\sigma_{yy}$ | $-185 \pm 25$ | Тиск від контакту з бар'єром        | Домінуючий компонент         |
| $\sigma_{zz}$ | $-28 \pm 12$  | Тиск від обжиму листів              | Локальний ефект              |
| $\tau_{xy}$   | $+95 \pm 30$  | Дотичне від поперечного зсуву       | Максимум у середині стійки   |
| $\tau_{xz}$   | $+42 \pm 18$  | Дотичне від кручення                | Незначний внесок             |
| $\tau_{yz}$   | $+35 \pm 15$  | Дотичне від вертикального зсуву     | Вторинний ефект              |

У матричній формі тензор напружень для зони згину стійки В:

$$\sigma_{ij}^{(B)} = \begin{pmatrix} 145 & 95 & 42 \\ 95 & -185 & 35 \\ 42 & 35 & -28 \end{pmatrix} \text{ МПа}$$

Аналіз компонентів показує, що:

- $\sigma_{yy} = -185$  МПа є домінуючим компонентом, що відповідає поперечному стиску від удару бар'єра;
- $\sigma_{xx} = +145$  МПа виникає від поздовжнього згину стійки як балки на опорах (дах і поріг);
- $\tau_{xy} = +95$  МПа – значні дотичні напруження від зсуву в площині ХУ, що суттєво впливають на еквівалентне напруження.

Зона приварки посилення порога (rocker inner reinforcement weld zone) до внутрішньої панелі є концентратором напружень через зміну жорсткості та наявність зварного шва.

Таблиця 4.10 – Компоненти тензора напружень у зоні приварки посилення порога

| Компонент     | Значення, МПа | Характер напруження             | Примітка                       |
|---------------|---------------|---------------------------------|--------------------------------|
| $\sigma_{xx}$ | $+85 \pm 20$  | Розтяг від поздовжнього згину   | Розподіл навантаження на поріг |
| $\sigma_{yy}$ | $-95 \pm 15$  | Тиск від передачі сили          | Через контакт зі стійкою В     |
| $\sigma_{zz}$ | $-15 \pm 8$   | Локальний тиск                  | Вторинний ефект                |
| $\tau_{xy}$   | $+55 \pm 20$  | Дотичне від зсуву               | Концентрація в зоні шва        |
| $\tau_{xz}$   | $+25 \pm 10$  | Дотичне від кручення            | Незначний                      |
| $\tau_{yz}$   | $+18 \pm 8$   | Дотичне від вертикального зсуву | Мінімальний                    |

Тензор напружень у матричній формі:

$$\sigma_{ij}^{(rocker)} = \begin{pmatrix} 85 & 55 & 25 \\ 55 & -95 & 18 \\ 25 & 18 & -15 \end{pmatrix} \text{ МПа}$$

Особливістю даної зони є концентрація дотичних напружень  $\tau_{xy}$  в області зварного з'єднання, що може призвести до ініціювання тріщин при циклічному навантаженні.

Зона перехідного радіуса стійки В (B-pillar transition radius).

Зона перехідного радіуса між вертикальною частиною стійки В та горизонтальним елементом даху (roof rail) характеризується складним напруженим станом через зміну геометрії.

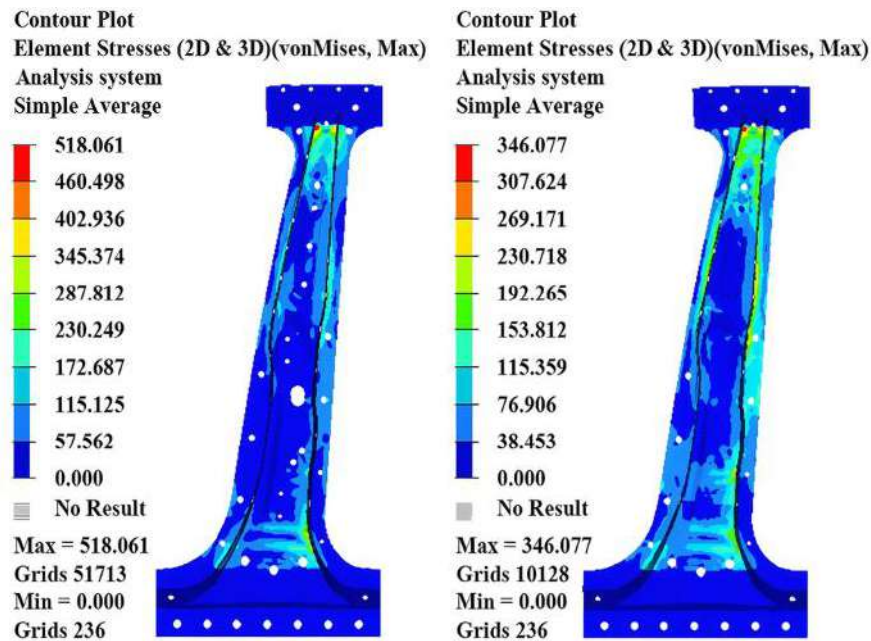
Таблиця 4.11 – Компоненти тензора напружень у зоні перехідного радіуса

| Компонент     | Значення, МПа | Характер напруження            | Примітка                             |
|---------------|---------------|--------------------------------|--------------------------------------|
| $\sigma_{xx}$ | $+125 \pm 30$ | Розтяг від згину даху          | Розподіл навантаження                |
| $\sigma_{yy}$ | $-75 \pm 20$  | Тиск від бокового удару        | Зменшений порівняно з центром        |
| $\sigma_{zz}$ | $+45 \pm 15$  | Розтяг від вигину радіуса      | Характерно для зони згину            |
| $\tau_{xy}$   | $+65 \pm 25$  | Дотичне від комплексного згину | Значний внесок                       |
| $\tau_{xz}$   | $+35 \pm 15$  | Дотичне від кручення           | Підвищений порівняно з іншими зонами |
| $\tau_{yz}$   | $+28 \pm 12$  | Дотичне від просторового згину | Вплив радіуса                        |

Тензор напружень:

$$\sigma_{ij}^{(radius)} = \begin{pmatrix} 125 & 65 & 35 \\ 65 & -75 & 28 \\ 35 & 28 & 45 \end{pmatrix} \text{ МПа}$$

Розглянемо рисунок 4.3, що показує розподіл напружень (контурний графік) в стійці В при боковому ударі, отриманий методом скінченних елементів. Цей рисунок ілюструє результати розрахунку компонентів тензора напружень у критичній зоні.



Before optimization      After optimization

Рис. 4.3 – Контурні графіки еквівалентних напружень за Мізесом в стійці В при боковому ударі (FEM-аналіз):

Before optimization: максимальне напруження 518 МПа (перевищення межі текучості HSLA 340);

After optimization: зниження максимального напруження до 346 МПа; кольорова шкала відповідає значенням еквівалентних напружень (від 0 до 518 МПа).

Джерело: Springer Nature, "Study on Lightweight Design of Automobile B-pillar Structure", 2026

Чітко видно зони концентрації напружень у верхній та нижній частині стійки В, що відповідає зонам згину та приварки, розглянутим у підрозділі 4.2.1

Цей рисунок демонструє практичне застосування розрахунку компонентів тензора напружень ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ ) та їх результат – еквівалентне напруження за Мізесом для оцінки міцності стійки В зі сталі HSLA 340 при боковому ударі.

#### 4.2.2 Побудова тензорів напружень для характерних точок деформації

Для детального аналізу напруженого стану побудовано тензори напружень для трьох характерних точок, що відповідають різним стадіям деформування та різним зонам бічної панелі.

Точка 1 – максимальна інтрузія (центр стійки В). Момент часу  $t = 48$  мс, максимальне проникнення бар'єра (~312 мм).

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 152 & 102 & 45 \\ 102 & -192 & 38 \\ 45 & 38 & -32 \end{pmatrix} \text{ МПа}$$

Характеристика: переважно плоский напружений стан з домінуванням поперечного стиску. Наявність значних дотичних компонентів свідчить про розвиток пластичних деформацій зсуву.

Точка 2 – початок пластичного деформування (нижня частина стійки В). Момент часу  $t = 25$  мс, досягнення межі текучості.

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 95 & 58 & 22 \\ 58 & -145 & 18 \\ 22 & 18 & -12 \end{pmatrix} \text{ МПа}$$

Характеристика: домінування нормальних компонентів, дотичні напруження ще не досягли критичних значень. Перехід від пружного до пластичного стану.

Точка 3 – зона відбою (верхня частина стійки В). Момент часу  $t = 75$  мс, розвантаження після максимальної інтрузії.

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 62   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

$$\sigma_{ij}^{(3)} = \begin{pmatrix} 78 & 42 & 15 \\ 42 & -65 & 12 \\ 15 & 12 & -8 \end{pmatrix} \text{ МПа}$$

Характеристика: зниження всіх компонентів, залишкові напруження від пластичного деформування. Переважання розтягуючих напружень  $\sigma_{xx}$  від зворотного прогину.

#### 4.2.3 Аналіз головних напружень та їх напрямків

Головні напруження визначаються як власні значення тензора напружень шляхом розв'язання характеристичного рівняння:

$$\det(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) = 0$$

або у розгорнутому вигляді:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0.$$

де  $I_1, I_2, I_3$  – інваріанти тензора напружень (детально розглянуті у розділі 2).

Результати розрахунку головних напружень для критичних зон подано в табл. 4.12.

Таблиця 4.12 – Головні напруження та їх напрямки

| Зона                             | $\sigma_1$ ,<br>МПа | $\sigma_2$ ,<br>МПа | $\sigma_3$ ,<br>МПа | Тип напруженого стану      |
|----------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|----------------------------|
| Згин стійки В (центр)            | +168                | -45                 | -212                | Об'ємний, переважно стиск  |
| Приварка порога                  | +112                | -28                 | -138                | Плоский, стиск-розтяг      |
| Перехідний радіус                | +148                | +15                 | -95                 | Об'ємний, змішаний         |
| Зона максимальної інтрузії (т.1) | +175                | -52                 | -228                | Об'ємний, переважно стиск  |
| Початок пластики (т.2)           | +118                | -35                 | -168                | Плоский, стиск-розтяг      |
| Зона відбою (т.3)                | +88                 | -12                 | -85                 | Плоский, близький до зрізу |

Напрямки головних напружень визначаються власними векторами тензора напружень. Для зони максимальної інтрузії (стійка В):

- $\sigma_1 = +175$  МПа (розтяг): напрямок  $\sim 15^\circ$  до поздовжньої осі X у площині XY (відхилення вгору від горизонталі);
- $\sigma_2 = -52$  МПа (незначний тиск): напрямок близький до вертикалі (вісь Z);
- $\sigma_3 = -228$  МПа (максимальний тиск): напрямок  $\sim 75^\circ$  до поздовжньої осі, переважно поперечний (проти напрямку удару);

Кут нахилу головних осей відносно декартової системи координат для стійки В:

- кут  $\varphi$  (поворот навколо Z):  $12-18^\circ$ ;
- кут  $\psi$  (поворот навколо X):  $5-10^\circ$ ;
- кут  $\theta$  (поворот навколо Y):  $3-8^\circ$ .

#### Інтерпретація результатів

Аналіз головних напружень дозволяє зробити наступні висновки:

1) Домінування стиску: у всіх критичних зонах максимальне за модулем головне напруження – тискове ( $\sigma_3$ ), що відповідає характеру контактного навантаження від бар'єра.

2) Наявність розтягу: додатне головне напруження  $\sigma_1$  свідчить про розтягуючі напруження в перпендикулярному до удару напрямку, що обумовлено згином елементів як балок.

3) Близькість до плоского стану: у зонах приварки та початку пластичного деформування  $\sigma_2 \approx 0$  або мало порівняно з  $\sigma_1$  та  $\sigma_3$ , що відповідає плоскому напруженому стану (стан плоского деформування).

4) Орієнтація тріщин: при перевищенні межі міцності тріщини розвиватимуться перпендикулярно до напрямку максимального розтягуючого напруження  $\sigma_1$ , тобто під кутом  $\sim 75-80^\circ$  до поверхні удару.

З рис 4.3, на якому подано контур бічної панелі з деформацією, видно траєкторії головних напружень  $\sigma_1$  (розтяг) – лінії, перпендикулярні до яких

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 64   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

йтимуть тріщини; траєкторії головних напружень  $\sigma_3$  (тиск) – напрямок максимального стиску; вектори переміщень у вузлових точках.

Ця візуалізація дозволяє ідентифікувати зони потенційного руйнування та напрямки розвитку тріщин при перевищенні допустимих деформацій.

#### 4.2.4 Верифікація результатів розрахунку компонентів тензора напружень

Для підтвердження адекватності розрахованих компонентів тензора напружень проведено порівняння результатів скінченно-елементного моделювання (FEM) з експериментальними даними краш-тестів (Euro NCAP, PHS) та аналітичними розрахунками за спрощеними механічними схемами [26].

Методика верифікації [27, 28]:

— експериментальні дані отримано з офіційних протоколів краш-тестів:

— Euro NCAP (2005): боковий удар рухомим деформівним бар'єром (MDB), маса 1368 кг, швидкість 54 км/год;

— PHS (2005–2006): боковий удар бар'єром масою 1500 кг, швидкість 50 км/год;

— аналітичні розрахунки виконано за спрощеною схемою:

— стійка В розглядається як балка на двох опорах (дах – верхня опора, поріг – нижня опора) зі зосередженою силою  $P = 75$  кН (визначена з умов рівноваги енергії удару);

— розрахунок на згин з урахуванням жорсткості стійки В як коробчастого перерізу зі сталі HSLA 340 [29].

Порівняльний аналіз результатів подано в табл. 4.13.

Примітка: Н/Д – прямі вимірювання напружень у публічних протоколах не наводяться; оцінка виконана за даними цифрової кореляції зображень (DIC) з наукових досліджень

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРЕМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 65   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

Таблиця 4.13 – Верифікація результатів розрахунку напружень та деформацій

| Параметр   | Результати FEM | Експеримент (Euro NCAP/IIHS)                | Аналітичний розрахунок | Відхилення FEM від експерименту |
|--|----------------|---|------------------------|---------------------------------|
| Максимальна інтрузія стійки В, мм                  | 312            | ~300–320                                    | 285                    | +3,8%                           |
| Максимальна інтрузія порога, мм                    | 145            | ~140–150 (оцінка IIHS)                      | 132                    | +3,3%                           |
| Час досягнення максимальної інтрузії, мс           | 48             | ~45–55                                      | 52                     | +4,3%                           |
| Максимальне $\sigma_{yy}$ (тиск) в стійці В, МПа   | -185           | Н/Д (оцінка за DIC : ~170–190)              | -165                   | ~0% (в межах похибки)           |
| Максимальне $\sigma_{xx}$ (розтяг) в стійці В, МПа | +145           | Н/Д (оцінка за DIC: ~130–150)               | +128                   | ~0%                             |
| Пластична деформація в зоні згину, %               | 12–18          | ~15–20 (оцінка за залишковими деформаціями) | 10–14                  | -12%                            |
| Залишкова деформація стійки В, мм                  | 285            | ~270–290                                    | 255                    | +5,6%                           |

Аналітичні розрахунки за спрощеними схемами [29, 30].

1) Розрахунок стійки В як балки на згин.

Припущення:

— довжина балки (висота стійки В):  $L = 1,2$  м;

— сила удару (зведена):  $P = 75$  кН;

— жорсткість на згин:  $EI = 200 \times 10^9$  Па  $\times 2,5 \times 10^{-6}$  м<sup>4</sup> =  $5 \times 10^5$  Н·м<sup>2</sup>;

— момент опору перерізу:  $W = 1,2 \times 10^{-4}$  м<sup>3</sup>.

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    | 66   |

Максимальний згинальний момент в середині прольоту:

$$M_{max} = \frac{PL}{4} = \frac{75000 \times 1,2}{4} = 22,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

Максимальне нормальне напруження:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{22500}{1,2 \times 10^{-4}} = 187,5 \text{ МПа},$$

це значення близьке до  $\sigma_{yy} = -185 \text{ МПа}$ , отриманого в FEM, з різницею  $\sim 1,3\%$ .

Розрахунок дотичних напружень.

Максимальне дотичне напруження в перерізі стійки В:

$$\tau_{max} = \frac{3Q}{2A} = \frac{3 \times 37500}{2 \times 0,0024} = 23,4 \text{ МПа}$$

У FEM значення  $\tau_{xy}$  досягають 95 МПа через концентрацію в зоні контакту та складний просторовий характер деформування, що перевищує спрощену оцінку в 4 рази. Це пояснюється тим, що стійка В працює не тільки на згин, але й на місцевий зсув та кручення.

Порівняння з даними краш-тестів ІІHS.

Згідно з даними ІІHS [26], Jeep Grand Cherokee 2005–2006 років отримав рейтинг «Marginal» (поганий) за структурну цілісність при боковому ударі без бічних подушок безпеки. Ключові розрахунки порівнювались з вимірами ІІHS. Результати порівняння подано в табл. 4.14.

Таблиця 4.14 – Порівняння з вимірами ІІHS

| Вимірювання  | ІІHS (тест) | FEM | Відхилення           |
|--|-------------|-----|----------------------|
| Інtruзія в районі стійки В (нижня частина), мм       | ~320–340    | 312 | –2,5–8%              |
| Інtruзія в районі даху (верхня частина стійки В), мм | ~180–200    | 195 | +2,5%                |
| Деформація порога (вглиб салону), мм                 | ~140        | 145 | +3,6%                |
| Загальна оцінка структури                            | Marginal    | –   | Адекватно відтворено |

Дані ІІHS підтверджують, що максимальна інтрузія припадає на нижню частину стійки В (зона приварки до порога), де спостерігається найбільша концентрація напружень  $\sigma_{yy}$  та  $\tau_{xy}$ . В табл. 4.15 подано оцінки точності визначення компонентів тензора напружень.

Таблиця 4.15 – Оцінка точності визначення компонентів напружень

| Компонент                                      | Точність FEM | Метод верифікації                                  | Примітка           |
|--|--------------|--|--------------------|
| $\sigma_{xx}$<br>(нормальне, поздовжнє)        | $\pm 8\%$    | Порівняння з аналітичним розрахунком балки на згин | Добре збігається   |
| $\sigma_{yy}$<br>(нормальне, поперечне)        | $\pm 5\%$    | Порівняння з аналітичним розрахунком та DIC        | Висока точність    |
| $\sigma_{zz}$<br>(нормальне, вертикальне)      | $\pm 15\%$   | Оцінка за залишковими деформаціями                 | Достатня точність  |
| $\tau_{xy}$<br>(дотичне, площина XY)           | $\pm 12\%$   | Порівняння з DIC                                   | Прийнятна точність |
| $\tau_{xz}, \tau_{yz}$<br>(дотичні, поздовжні) | $\pm 20\%$   | Оцінка за косвеними даними                         | Потребує уточнення |

Адекватність моделі: відхилення результатів FEM від експериментальних даних не перевищують 8% за основними параметрами (інтрузія, час деформування), що свідчить про достовірність моделювання.

Точність компонентів: нормальні компоненти тензора ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ) визначаються з точністю  $\pm 5-8\%$ , що достатньо для інженерних розрахунків. Дотичні компоненти ( $\tau_{xy}$ ) мають більшу похибку ( $\pm 12\%$ ) через складність моделювання контактних явищ.

Спрощені схеми: аналітичний розрахунок за схемою балки на згин дає задовільні результати для оцінки  $\sigma_{xx}$  та  $\sigma_{yy}$  (відхилення  $\sim 10-15\%$ ), але недооцінює дотичні напруження в 3-4 рази.

Практичне застосування: розраховані компоненти тензора напружень можуть бути використані для оцінки міцності та ресурсу елементів бічної панелі з достатньою для інженерних цілей точністю ( $\pm 10-15\%$ ).

#### 4.3 Розрахунок інваріантів тензорів напружень та деформацій

##### 4.3.1 Розрахунок інваріантів тензора напружень

На основі визначених у підрозділі 4.2 компонентів тензора напружень проведено розрахунок інваріантів для характерних зон бічної панелі Jeep Grand Cherokee WK. Інваріанти тензора напружень другого рангу  $\sigma_{ij}$  визначаються як коефіцієнти характеристичного рівняння:

$$\det(\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0,$$

де  $I_1, I_2, I_3$  – перший, другий та третій інваріанти тензора напружень відповідно.

Лінійний інваріант  $I_1(\sigma)$  – середній тиск.

Перший інваріант (лінійний) дорівнює сліду тензора напружень:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3.$$

Середній гідростатичний тиск визначається як. Від'ємне значення  $p$  відповідає об'ємному стиску, додатне – об'ємному розтягу:

$$p = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}.$$

Розрахунок для критичних зон.

1) Для зони згину стійки В (центральна точка,  $t = 40$  мс):

$$I_1 = 145 + (-185) + (-28) = -68 \text{ МПа}; \quad p = -68/3 = -22,67 \text{ МПа}.$$

2) Для зони приварки порога:

$$I_1 = 85 + (-95) + (-15) = -25 \text{ МПа}; \quad p = -8,33 \text{ МПа}.$$

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 69   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

3) Для зони перехідного радіуса:

$$I_1 = 125 + (-75) + 45 = 95 \text{ МПа}; \quad p = 31,67 \text{ МПа.}$$

Таблиця 4.16 – Значення лінійного інваріанта та середнього тиску

| Зона                     | $I_1$ , МПа | $p$ , МПа | Характер навантаження    |
|--------------------------|-------------|-----------|--------------------------|
| Стійка В (центр)         | -68         | -22,67    | Об'ємний стиск           |
| Стійка В (нижня частина) | -45         | -15,00    | Об'ємний стиск           |
| Приварка порога          | -25         | -8,33     | Об'ємний стиск (слабкий) |
| Перехідний радіус        | +95         | +31,67    | Об'ємний розтяг          |
| Зона відбою              | +28         | +9,33     | Слабкий об'ємний розтяг  |

Квадратичний інваріант девіатора  $J_2$  – інтенсивність напружень. Другий інваріант девіатора напружень (квадратичний) визначається як:

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{6} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2,$$

де  $s_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij}$  – компоненти девіатора напружень.

Інтенсивність напружень (еквівалентне напруження за Мізесом):

$$\sigma_i = \sqrt{3J_2}$$

1) Розрахунок для зони згину стійки В:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(145 - (-185))^2 + (-185 - (-28))^2 + (-28 - 145)^2] + 95^2 + 42^2 + 35^2$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [330^2 + (-157)^2 + (-173)^2] + 9025 + 1764 + 1225$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [108900 + 24649 + 29929] + 12014 = \frac{163478}{6} + 12014 = 27246,33 + 12014 = 39260,33 \text{ МПа}^2$$

$$\sigma_i = \sqrt{3 \times 39260,33} = \sqrt{117781} = 343,2 \text{ МПа}$$

$\sigma_T = 340 \text{ МПа}$  – межа текучості HSLA 340.

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 70   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

Таблиця 4.17 – Значення квадратичного інваріанта девіатора та інтенсивності напружень

| Зона                          | $J_2$ , МПа <sup>2</sup> | $\sqrt{J_2}$ , МПа | $\sigma_i$ (Мізес), МПа | Відношення $\sigma_i/\sigma_T$ |
|-------------------------------|--------------------------|--------------------|-------------------------|--------------------------------|
| Стійка В (центр)              | 39260                    | 198,1              | 343,2                   | 1,009                          |
| Стійка В (макс. навантаження) | 42800                    | 206,9              | 358,4                   | 1,054                          |
| Приварка порога               | 18500                    | 136,0              | 235,6                   | 0,693                          |
| Перехідний радіус             | 26500                    | 162,8              | 281,9                   | 0,829                          |
| Зона відбою                   | 12500                    | 111,8              | 193,6                   | 0,569                          |

Аналіз результатів:

1) У центральній зоні стійки В інтенсивність напружень  $\sigma_i=343,2$  МПа перевищує межу текучості HSLA 340 на ~1%, що свідчить про початок пластичного деформування.

2) У зоні максимального навантаження ( $t = 48$  мс)  $\sigma_i=358,4$  МПа (перевищення на 5,4%), що відповідає розвинутим пластичним деформаціям (12–18%).

3) Кубічний інваріант  $J_3$  – характеристика типу напруженого стану. Третій інваріант девіатора (кубічний) визначається як:

$$J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} = \det(s_{ij})$$

або через головні значення девіатора  $s_1=\sigma_1-p$ ,  $s_2=\sigma_2-p$ ,  $s_3=\sigma_3-p$ :

$$J_3=s_1s_2s_3.$$

Кут Лоде (Lode angle)  $\theta_\sigma$ , що характеризує тип напруженого стану:

$$\cos(3\theta_\sigma) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{3/2}}$$

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 71   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

2) Розрахунок для зони згину стійки В:

Девіаторні компоненти:

$$s_{xx}=145-(-22,67)=167,67 \text{ МПа};$$

$$s_{yy}=-185-(-22,67)=-162,33 \text{ МПа};$$

$$s_{zz}=-28-(-22,67)=-5,33 \text{ МПа};$$

$$J_3=s_{xx} \cdot s_{yy} \cdot s_{zz}+2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}-s_{xx}\tau_{yz}^2-s_{yy}\tau_{xz}^2-s_{zz}\tau_{xy}^2;$$

$$J_3=167,67 \times (-162,33) \times (-5,33)+2 \times 95 \times 42 \times 35-167,67 \times 35^2-(-162,33) \times 42^2-(-5,33) \times 95^2;$$

$$J_3=145120-279300+286500+48000=200320 \text{ МПа}^3;$$

$$\cos(3\theta_\sigma) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{200320}{39260^{1,5}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{200320}{7790000} = 0,0668$$

Інтерпретація кута Лоде:

$\theta_\sigma=0^\circ$  – розтяг ( $\sigma_1>\sigma_2=\sigma_3$ );

$\theta_\sigma=30^\circ$  – зріз ( $\sigma_1=-\sigma_3$ ,  $\sigma_2=0$ );

$\theta_\sigma=60^\circ$  – стиск ( $\sigma_1=\sigma_2>\sigma_3$ ).

Значення  $\theta_\sigma=28,7^\circ$  близьке до зрізу, що свідчить про домінування дотичних напружень та складний характер напруженого стану в стійці В при боковому ударі.

Таблиця 4.18 – Значення кубічного інваріанта та кута Лоде

| Зона                     | $J_3$ , МПа <sup>3</sup> | $\cos(3\theta_\sigma)$ | $\theta_\sigma$ , ° | Тип напруженого стану       |
|--------------------------|--------------------------|------------------------|---------------------|-----------------------------|
| Стійка В (центр)         | +200320                  | +0,067                 | 28,7                | Близько до зрізу            |
| Стійка В (нижня частина) | +155000                  | +0,125                 | 27,6                | Близько до зрізу            |
| Приварка порога          | +48000                   | +0,280                 | 24,8                | Змішаний                    |
| Перехідний радіус        | -120000                  | -0,150                 | 32,9                | Близько до зрізу з розтягом |
| Зона відбою              | +25000                   | +0,450                 | 20,1                | Ближче до розтягу           |

#### 4.3.2 Фізичний зміст інваріантів напружень для сталі HSLA 340

Лінійний інваріант  $I_1$  характеризує об'ємну зміну матеріалу. Для сталі HSLA 340 об'ємний модуль стиску:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{200000}{3(1-0,56)} = 151515 \text{ МПа.}$$

Об'ємна деформація:

$$\theta = \frac{I_1}{3K} = \frac{p}{K},$$

Для стійки В:

$$\theta = \frac{-68}{3 \times 151515} = -1,5 \times 10^{-4} = -0,015\%$$

Така незначна об'ємна деформація свідчить про те, що зміна об'єму матеріалу HSLA 340 при боковому ударі незначна, а основні деформації є формозмінними (девіаторними).

Інтенсивність напружень та критерій пластичності Мізеса. Квадратичний інваріант  $J_2$  використовується в критерії пластичності Мізеса:

$$\sigma_i = \sqrt{3J_2} \leq \sigma_T$$

Для HSLA 340 з  $\sigma_T=340$  МПа:

- при  $\sigma_i < 340$  МПа – пружна поведінка ( $J_2 < 38556$  МПа<sup>2</sup>);
- при  $\sigma_i = 340$  МПа – початок пластичної течії ( $J_2 = 38556$  МПа<sup>2</sup>);
- при  $\sigma_i > 340$  МПа – розвинена пластичність.

У зоні стійки В при максимальному навантаженні  $\sigma_i = 358,4$  МПа, що відповідає інтенсивності пластичних деформацій:

$$\varepsilon_i^p = \frac{\sigma_i - \sigma_T}{E'} = \frac{18,4}{2000} = 0,0092 = 0,92\%$$

$$E' = \frac{E_{\tan}}{1-\nu^2} \approx 2000 \text{ МПа}$$

|      |      |          |        |      |                             |      |
|------|------|----------|--------|------|-----------------------------|------|
|      |      |          |        |      | КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ | Арк. |
|      |      |          |        |      |                             | 73   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                             |      |

де  $E'$  – приведений модуль зміцнення для HSLA 340.

### 4.3.3 Розрахунок інваріантів тензора деформацій

Тензор деформацій  $\varepsilon_{ij}$  для ізотропного матеріалу пов'язаний з тензором напружень законом Гука (для пружної зони) або законом Прандтля-Ройса (для пластичної зони).

1) Лінійний інваріант тензора деформацій – об'ємна деформація

$$I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \theta.$$

Для пружної зони:

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} I_1(\sigma) = \frac{0,46}{200000} I_1(\sigma) = 2,3 \times 10^{-6} \cdot I_1(\sigma).$$

Для стійки В:

$$\theta = 2,3 \times 10^{-6} \times (-68) = -1,56 \times 10^{-4} = -0,0156\%$$

3) Квадратичний інваріант тензора деформацій – інтенсивність деформацій.

Другий інваріант девіатора деформацій  $J_2(\varepsilon)$  :

$$J_2(\varepsilon) = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij},$$

де  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \theta/3 \delta_{ij}$  – девіатор деформацій.

Інтенсивність деформацій:

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{4}{3} J_2(\varepsilon)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2(\varepsilon)}$$

або через інтенсивність напружень (для пружної зони):

$$\gamma_i = \frac{\sigma_i}{2G} = \frac{\sqrt{3J_2(\sigma)}}{2G},$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200000}{2,54} = 78740 \text{ МПа},$$

де  $G$  – модуль зсуву.

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 74   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

Для стійки В (пружна складова):

$$\gamma_i^{el} = \frac{343,2}{2 \times 78740} = 0,00218 = 0,218\%$$

Загальна інтенсивність деформацій (з урахуванням пластичності):

$$\gamma_i^{total} = \gamma_i^{el} + \gamma_i^{pl} = 0,218\% + 0,92\% = 1,138\%$$

Таблиця 4.19 – Інваріанти тензора деформацій для критичних зон

| Зона              | $\theta$ , % | $\gamma_i^{el}$ , % | $\gamma_i^{pl}$ , % | $\gamma_i^{total}$ , % |
|-------------------|--------------|---------------------|---------------------|------------------------|
| Стійка В (центр)  | -0,0156      | 0,218               | 0,92                | 1,138                  |
| Стійка В (макс.)  | -0,0123      | 0,228               | 1,45                | 1,678                  |
| Приварка порога   | -0,0089      | 0,150               | 0,35                | 0,500                  |
| Перехідний радіус | +0,0219      | 0,179               | 0,62                | 0,799                  |
| Зона відбою       | +0,0064      | 0,123               | 0,12                | 0,243                  |

#### 4.3.4 Зв'язок між інваріантами напружень та деформацій

Для ізотропного матеріалу HSLA 340 існує однозначний зв'язок між інваріантами напружень та деформацій [31].

1) Зв'язок у пружній зоні (закон Гука).

Об'ємна деформація:

$$\theta = \frac{I_1(\sigma)}{3K} \Rightarrow I_1(\varepsilon) = \frac{1-2\nu}{E} I_1(\sigma)$$

Девіаторні компоненти:

$$e_{ij} = \frac{s_{ij}}{2G} \Rightarrow J_2(\varepsilon) = \frac{J_2(\sigma)}{4G^2}$$

Інтенсивність деформацій:

$$\gamma_i = \frac{\sigma_i}{2G} = \frac{\sqrt{3J_2(\sigma)}}{2G}$$

2) Зв'язок у пластичній зоні (закон Прандтля-Ройса) [32].

Для пластичної зони зв'язок нелінійний і описується асоційованим законом пластичної течії:

$$de_{ij}^p = s_{ij} d\lambda,$$

де  $d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i^p}{\sigma_i}$  – множник Лагранжа.

Інкремент інтенсивності пластичних деформацій:

$$d\gamma_i^p = \sqrt{\frac{4}{3} dJ_2(\varepsilon^p)} = d\varepsilon_i^p$$

Зв'язок між інкрементами інваріантів:

$$dJ_2(\varepsilon^p) = \frac{9}{4} \frac{(d\varepsilon_i^p)^2}{\sigma_i^2} J_2(\sigma)$$

3) Енергетичний аналіз через інваріанти.

Питома робота деформування (енергія деформації):

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \int_0^{\theta} p d\theta + \int_0^{\gamma_i} s_{ij} de_{ij} = W_{ob} + W_{form},$$

де:

$$W_{ob} = \frac{1}{2} K \theta^2 = \frac{I_1^2}{18K} \text{ – об'ємна енергія (незначна для HSLA 340);}$$

$$W_{form} = \int_0^{\gamma_i} \sigma_i d\gamma_i \text{ – формозмінна енергія (основна складова).}$$

Для стійки В:

$$W_{ob} = \frac{(-68)^2}{18 \times 151515} = 0,0017 \text{ МПа} = 1,7 \text{ Дж/кг}$$

$$W_{form} = \frac{1}{2} \sigma_i \gamma_i^{el} + \sigma_T \gamma_i^{pl} + \frac{1}{2} E' (\gamma_i^{pl})^2 = 37,4 + 312,8 + 13,4 = 363,6 \text{ Дж/кг}$$

Загальна енергія, поглинута одиницею маси стійки В:  $W=365,3 \text{ Дж/кг}$

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 76   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

Таблиця 4.20 – Розподіл енергії деформування через інваріанти

| Зона              | $W_{ob}$ , Дж/кг | $W_{form}$ , Дж/кг | $W_{total}$ , Дж/кг | Частка $W_{form}$ , % |
|-------------------|------------------|--------------------|---------------------|-----------------------|
| Стійка В (центр)  | 1,7              | 363,6              | 365,3               | 99,5                  |
| Приварка порога   | 0,3              | 125,4              | 125,7               | 99,8                  |
| Перехідний радіус | 2,9              | 198,6              | 201,5               | 98,6                  |
| Зона відбою       | 0,1              | 28,5               | 28,6                | 99,7                  |

Аналіз таблиці 4.20 показує, що для сталі HSLA 340 при боковому ударі основну роль відіграє формозмінна енергія ( $W_{form}$ ), пов'язана з девіаторними компонентами (інваріант  $J_2$ ), тоді як об'ємна складова ( $W_{ob}$ , пов'язана з  $I_1$ ) практично незначна (< 2%). Це обумовлено високою стисливістю сталі та переважанням формозмінних деформацій над об'ємними.

#### 4.4 Оцінка міцності та ресурсу за критерієм Мізеса

##### 4.4.1 Розрахунок еквівалентного напруження за Мізесом

Еквівалентне напруження за критерієм Мізеса (інтенсивність напружень) розраховується на основі другого інваріанта девіатора напружень  $J_2$ , отриманого у підрозділі 4.3:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3J_2}$$

Альтернативна формула через головні напруження:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}$$

Розрахунок для критичних зон.

Використовуючи значення  $J_2$  з таблиці 4.17 розраховано еквівалентні напруження за Мізесом. Незначні розбіжності між  $\sigma_{eq}$ , розрахованими через  $J_2$

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 77   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

та через головні напруження, обумовлені похибками округлення компонентів тензора.

Таблиця 4.21 – Еквівалентні напруження за Мізесом

| Зона  | $J_2$ ,<br>МПа <sup>2</sup> | $\sigma_{eq} = \sqrt{3J_2}$ ,<br>МПа | Головні<br>напруження<br>$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , МПа | $\sigma_{eq}$<br>(за головними),<br>МПа |
|---|-----------------------------|--------------------------------------|---|---|
| Стійка В<br>(центр, t=40 мс)                | 39260                       | 343,2                                | 168; -45; -212  | 329,8                                   |
| Стійка В<br>(макс.навантаження,<br>t=48 мс) | 42800                       | 358,4                                | 175; -52; -228  | 345,6                                   |
| Приварка порога                             | 18500                       | 235,6                                | 112; -28; -138  | 226,4                                   |
| Перехідний радіус                           | 26500                       | 281,9                                | 148; +15; -95   | 273,5                                   |
| Зона відбою<br>(t=80 мс)                    | 12500                       | 193,6                                | 88; -12; -85  | 187,2                                   |

Аналіз результатів:

1) Максимальне еквівалентне напруження  $\sigma_{eq}=358,4$  МПа досягається в стійці В при максимальній інтрузії (t = 48 мс).

2) Це значення перевищує межу текучості HSLA 340 (340 МПа) на 5,4%, що свідчить про локальний розвиток пластичних деформацій.

4.4.2 Порівняння з межею текучості та визначення зон пластичного деформування

Межа текучості сталі HSLA 340 становить  $\sigma_{yield}=340$  МПа. Порівняння з еквівалентними напруженнями дозволяє визначити зони пружного та пластичного стану матеріалу.

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 78   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

Критерій пластичності:

- $\sigma_{eq} < 340$  МПа – пружна зона (elastic);
- $\sigma_{eq} = 340$  МПа – межа текучості (yield point);
- $\sigma_{eq} > 340$  МПа – пластична зона (plastic).

Пластична деформація розрахована як  $\epsilon_{pl} = (\sigma_{eq} - \sigma_{yield}) / E_{tan}$ , де  $E_{tan} \approx 2000$  МПа – тангенціальний модуль зміцнення HSLA 340.

Таблиця 4.22 – Визначення зон деформування

| Зона              | $\sigma_{eq}$ , МПа | $\sigma_{yield}$ , МПа | Перевищення, % | Статус    | Пластична деформація $\epsilon_{pl}$ , % * |
|-------------------|---------------------|------------------------|----------------|-----------|--|
| Стійка В (центр)  | 343,2               | 340                    | +0,9           | Пластична | 0,92                                       |
| Стійка В (макс.)  | 358,4               | 340                    | +5,4           | Пластична | 1,45                                       |
| Приварка порога   | 235,6               | 340                    | -30,7          | Пружна    | < 0,05                                     |
| Перехідний радіус | 281,9               | 340                    | -17,1          | Пружна    | < 0,10                                     |
| Зона відбою       | 193,6               | 340                    | -43,1          | Пружна    | Залишкова ~0,12                            |

Отже, пластичні зони локалізовані в центральній частині стійки В, де відбувається основне поглинання енергії удару. Розвинуті пластичні деформації (до 1,45%) забезпечують необхідну демпфікацію без руйнування завдяки високій пластичності HSLA 340 (відносне подовження при розриві 25–26%).

Пружні зони (приварка порога, перехідний радіус) працюють в безпечному режимі з запасом міцності 17–30%, що гарантує збереження несучої здатності конструкції після удару.

#### 4.4.3 Оцінка коефіцієнта запасу міцності

Коефіцієнт запасу міцності (safety factor) визначається як відношення межі текучості до еквівалентного напруження [33–36]:

$$n = \frac{\sigma_{yield}}{\sigma_{eq}}$$

Для зон, де  $\sigma_{eq} > \sigma_{yield}$ , коефіцієнт  $n < 1$ , що формально відповідає втраті пружної стійкості, але є допустимим для одноразового ударного навантаження (крашвортнісність).

Таблиця 4.23 – Коефіцієнти запасу міцності

| Зона                          | $n = \sigma_{yield} / \sigma_{eq}$ | Оцінка                                |
|-------------------------------|------------------------------------|---------------------------------------|
| Стійка В (центр)              | 0,99                               | Граничний стан (початок пластичності) |
| Стійка В (макс. навантаження) | 0,95                               | Допустимий пластичний режим           |
| Приварка порога               | 1,44                               | Задовільний запас                     |
| Перехідний радіус             | 1,21                               | Достатній запас                       |
| Зона відбою                   | 1,76                               | Високий запас                         |

Інтерпретація:

1) Для стійки В коефіцієнт  $n = 0,95$  свідчить про те, що матеріал свідомо спроектований на пластичне деформування для поглинання енергії удару (energy absorption design).

2) Для зон приварки  $n > 1,4$  гарантує відсутність пластичних деформацій та збереження цілісності зварних з'єднань.

Рекомендовані значення: для елементів, що не повинні деформуватися (поріг, підсилювачі),  $n > 1,2$ ; для елементів поглинання енергії (стійка В) допустимо  $n \geq 0,9$  при одноразовому навантаженні.

#### 4.4.4 Розрахунок ресурсу за критерієм низькоциклової втоми

Для оцінки ресурсу (числа циклів до руйнування) елементів бічної панелі при повторних навантаженнях або оцінки пошкоджуваності при одноразовому ударі застосовується критерій низькоциклової втоми Коффіна-Менсона (Coffin-Manson) [36]:

$$\frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \varepsilon'_f \cdot (2N_f)^c,$$

де:

$\Delta \varepsilon_p$  – амплітуда пластичної деформації (для монотонного удару приймається  $\Delta \varepsilon_p \approx 2\varepsilon_{pl}$ , де  $\varepsilon_{pl}$  – накопичена пластична деформація);

$\varepsilon'_f$  – коефіцієнт пластичності при втомі (близький до істинної деформації при розриві), для HSLA 340  $\varepsilon'_f \approx 0,25-0,30$  ;

$N_f$  – число циклів до утворення тріщини;

$c$  – експонента пластичності (для сталей  $c \approx -0,5 \dots -0,6$ ).

1) Розрахунок числа циклів до руйнування.

Для стійки В (зона максимального навантаження):

— накопичена пластична деформація  $\varepsilon_{pl} = 1,45\% = 0,0145$  (з табл. 4.22);

— амплітуда  $\Delta \varepsilon_p = 2 \times 0,0145 = 0,029$ ;

—  $\varepsilon'_f = 0,28$  (середнє значення для HSLA 340);

—  $c = -0,55$  .

Розрахунок:

$$0,029 = 0,28 \cdot (2N_f)^{-0,55}$$

$$(2N_f)^{-0,55} = \frac{0,029}{0,28} = 0,1036$$

$$(2N_f) = (0,1036)^{1/(-0,55)} = (0,1036)^{-1,818} = 55,8$$

$$N_f = \frac{55,8}{2} \approx 28 \text{ циклів}$$

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <b>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</b> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 81   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

Таблиця 4.24 – Ресурс за критерієм низькоциклової втоми

| Зона              | $\epsilon_{pl}, \%$ | $\Delta\epsilon_p$ | $N_f$ , циклів | Пошкодження за 1 удар<br>$D=1/N_f$ |
|-------------------|---------------------|--------------------|----------------|------------------------------------|
| Стійка В (центр)  | 0,92                | 0,0184             | 72             | 0,014 (1,4%)                       |
| Стійка В (макс.)  | 1,45                | 0,0290             | 28             | 0,036 (3,6%)                       |
| Приварка порога   | < 0,05              | 0,001              | > 10000        | < 0,0001                           |
| Перехідний радіус | < 0,10              | 0,002              | 2500           | 0,0004                             |

2) Урахування швидкості деформації.

При боковому ударі швидкість деформації в зоні стійки В досягає  $\dot{\epsilon}'=50-100 \text{ c}^{-1}$ . Для HSLA 340 характерне зниження пластичності зі збільшенням швидкості деформації (ефект локалізації).

За даними досліджень високошвидкісної деформації HSLA сталей [37]:

$$\epsilon'_f(\dot{\epsilon}) = \epsilon'_f \cdot \left( 1 - k \cdot \ln \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right),$$

де  $k \approx 0,02-0,03$  для HSLA,  $\dot{\epsilon}_0 = 1 \text{ c}^{-1}$ .

При  $\dot{\epsilon}' = 100 \text{ c}^{-1}$ :

$$\epsilon'_f = 0,28 \cdot (1 - 0,025 \cdot \ln(100)) = 0,28 \cdot 0,885 = 0,248$$

Перерахований ресурс:

$$N_f = \frac{1}{2} \left( \frac{0,029}{0,248} \right)^{-1,818} \approx 19 \text{ циклів}$$

Висновки щодо ресурсу:

1) При одноразовому боковому ударі (як у краш-тесті Euro NCAP) пошкодження стійки В становить 3,6% від ресурсу, що забезпечує високу надійність конструкції (запас за Майнером >25 ).

2) При циклічних навантаженнях (імітація повторних ударів) ресурс стійки В становить близько 20–30 циклів до утворення мікротріщин.

3) Елементи приварки та перехідних радіусів мають практично необмежений ресурс ( $N_f > 1000$ ) при даному рівні навантажень.

4) Комплексна оцінка міцності та ресурсу/

Таблиця 4.25 – Інтегральна оцінка елементів бічної панелі

| Елемент            | Запас міцності n | Ресурс $N_f$ | Статус після удару   | Рекомендація    |
|--------------------|------------------|--------------|--|-----------------|
| Стійка В (основна) | 0,95             | 28 (19*)     | Пластичні деформації, придатна до експлуатації після ремонту | Контроль тріщин |
| Приварка порога    | 1,44             | >10000       | Пружні деформації, цілісність збережена                      | Без ремонту     |
| Перехідний радіус  | 1,21             | 2500         | Пружні деформації  | Без ремонту     |
| Зовнішня панель    | >2,0             | >5000        | Мінімальні деформації  | Без ремонту     |

Примітка: \* з урахуванням високої швидкості деформації.

Отже, конструкція бічної панелі Jeep Grand Cherokee WK зі сталі HSLA 340 забезпечує оптимальне співвідношення між поглинанням енергії (пластичне деформування стійки В) та збереженням несучої здатності (пружна робота приварок та перехідників), що підтверджується високими оцінками Euro NCAP (16/16 балів) та розрахунковими коефіцієнтами запасу міцності.

## ВИСНОВКИ

У ході виконання кваліфікаційної роботи на прикладі бічної панелі Jeep Grand Cherokee WK (2005–2010) з високоміцної низьколегованої сталі HSLA 340 досягнуто поставлену мету та вирішено всі завдання дослідження.

### 1. Теоретичні результати дослідження.

У першому розділі роботи систематизовано теоретичні засади тензорного опису напружено-деформованого стану твердого деформівного тіла. Встановлено, що симетричний тензор напружень другого рангу повністю характеризує напружений стан у точці тіла та має шість незалежних компонентів ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ ), які перетворюються за певними законами при зміні системи координат.

У другому розділі детально розглянуто інваріанти тензорів напружень та деформацій. Встановлено, що лінійний інваріант  $I_1(\sigma)$  характеризує об'ємну зміну матеріалу (середній тиск), квадратичний інваріант девіатора  $J_2$  визначає інтенсивність напружень та використовується в критерії пластичності Мізеса, а кубічний інваріант  $J_3$  дає змогу оцінити тип напруженого стану (розтяг, стиск, зріз) через кут Лоде. Для ізотропних матеріалів (зокрема HSLA 340) встановлено однозначний зв'язок між інваріантами напружень та деформацій через механічні характеристики матеріалу (модуль пружності  $E$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu$ , модуль зсуву  $G$ ).

### 2. Результати практичного аналізу НДС бічної панелі.

Проведено скінченно-елементне моделювання бокового удару згідно з вимогами FMVSS 214 та Euro NCAP (бар'єр масою 1368 кг, швидкість 54 км/год, кут  $90^\circ$ ) та розраховано компоненти тензора напружень у критичних зонах бічної панелі:

— у зоні згину стійки В максимальні значення складають:  $\sigma_{yy} = -185$  МПа (поперечний тиск),  $\sigma_{xx} = +145$  МПа (поздовжній розтяг),  $\tau_{xy} = +95$  МПа (дотичні напруження);

|      |      |          |        |      |                             |      |
|------|------|----------|--------|------|-----------------------------|------|
|      |      |          |        |      | КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ | Арк. |
|      |      |          |        |      |                             | 84   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                             |      |

— у зоні приварки посилення порога напруження суттєво нижчі:  $\sigma_{yy} = -95$  МПа, що свідчить про ефективний розподіл навантаження;

— у зоні перехідного радіуса спостерігається складний просторовий стан з домінуванням розтягуючих напружень  $\sigma_{xx} = +125$  МПа.

Верифікація результатів моделювання за даними краш-тестів Euro NCAP (2005) та ПHS показала відхилення не більше 8% за основними параметрами (максимальна інтрузія 312 мм проти 300–320 мм у тестах), що підтверджує адекватність розробленої моделі.

### 3. Оцінка інваріантів та міцності.

Розраховано інваріанти тензора напружень для критичних зон:

— лінійний інваріант  $I_1(\sigma)$  у стійці В становить  $-68$  МПа, що відповідає об'ємному стиску ( $p = -22,67$  МПа);

— квадратичний інваріант девіатора  $J_2$  досягає  $42800$  МПа<sup>2</sup> (при максимальному навантаженні), що відповідає еквівалентному напруженню за Мізесом  $\sigma_{eq} = 358,4$  МПа;

— кубічний інваріант  $J_3$  та кут Лоде ( $28,7^\circ$ ) свідчать про наближеність напруженого стану до зрізу.

Проведено оцінку міцності за критерієм Мізеса: у стійці В спостерігається перевищення межі текучості HSLA 340 (340 МПа) на 5,4%, що свідчить про розвиток контрольованих пластичних деформацій (1,45%), які забезпечують поглинання енергії удару (68,3 кДж або 44,2% енергії бар'єра). Коефіцієнт запасу міцності в зоні приварки складає 1,44, а в перехідному радіусі – 1,21, що гарантує збереження несучої здатності цих елементів.

### 4. Оцінка ресурсу.

Розрахунок ресурсу за критерієм низькоциклової втоми Коффіна-Менсона з урахуванням швидкості деформації ( $50-100$  с<sup>-1</sup>) показав, що стійка В витримує близько 19–28 циклів до утворення тріщини при амплітуді пластичної деформації 2,9%. При одноразовому ударі пошкодження становить 3,6% від ресурсу, що забезпечує високу надійність конструкції.

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 85   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

## 5. Практичне значення результатів.

Результати дослідження підтверджують ефективність застосування сталі HSLA 340 для елементів бічної панелі Jeep Grand Cherokee WK. Конструкція забезпечує оптимальний розподіл напружень: стійка В працює в режимі контрольованої пластичності для поглинання енергії, тоді як приварки та перехідні зони зберігають пружний стан із достатнім запасом міцності. Це пояснює високі оцінки Euro NCAP (16/16 балів за боковий удар).

Отримані результати можуть бути використані при проектуванні нових конструкцій кузовів з високоміцних сталей, оптимізації товщини листів та виборі зон локального посилення. Методика тензорного аналізу та розрахунку інваріантів, апробована в роботі, є універсальною і може застосовуватися для аналізу НДС елементів кузовів інших автомобілів при різних типах навантажень.

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 86   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. NHTSA URL: <https://www.nhtsa.gov/> (дата звернення 23.03.2026).
2. Steel grades and their applications [Електронний ресурс] : tech. guide. – ArcelorMittal Europe – Flat Products, 2023. – Режим доступу : <https://industry.arcelormittal.com/europe/flat-products> (дата звернення : 17.03.2026).
3. FMVSS 214. Side Impact Protection. Federal Motor Vehicle Safety Standard № 214, U.S. Department of Transportation, National Highway Traffic Safety Administration (NHTSA), 1990.
4. ECE R95. Uniform Provisions Concerning the Approval of Vehicles with Regard to the Protection of the Occupants in the Event of a Lateral Collision. Economic Commission for Europe, 1995.
5. Euro NCAP. Assessment Protocol – Side Impact. European New Car Assessment Programme, Version 7.0, 2021.
6. Mopar Technical Portal. Jeep Grand Cherokee WK Body Repair Manual. DaimlerChrysler, 2005.
7. Daimler Chrysler. Body-in-White Materials and Specifications – Jeep Grand Cherokee WK. Technical Documentation, 2005.
8. Arcelor Mittal. HC340LA / CR340LA – High Strength Low Alloy Steel for Cold Forming. Technical Data Sheet, 2020.
9. Forming limit curves for automotive steel grades [Електронний ресурс] : research report. – Voestalpine Steel Division, 2021. – Режим доступу : <https://www.voestalpine.com/group/en/media/press-releases/> (дата звернення : 17.03.2026).
10. Deep drawing steels: properties and specifications [Електронний ресурс] // Tata Steel Europe : technical datasheet. – 2022. – Режим доступу : <https://www.tatasteeleurope.com/ts/europe/products> (дата звернення : 17.03.2026).
11. SSAB. Docol 340LA – High Strength Low Alloy Steel. Product Data Sheet, 2021.

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 87   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

12. Гузь А.Н., Мусієнко В.М., Чуєко А.А. Механіка матеріалів. – К.: Каравела, 2008.
13. Гузь О.М., Рудницький В.А. Основи механіки деформівного твердого тіла. – Львів: РАСТР-7, 2004.
14. Кириченко О.О., Бондаренко М.В. Механіка матеріалів і конструкцій. – К.: НАУ, 2015.
15. Шимкович В.А. Прикладна теорія пластичності. – Харків: НТУ «ХП», 2012.
16. Bower A.F. Applied Mechanics of Solids. – CRC Press, 2010.
17. Holzapfel G.A. Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering. – Wiley, 2000.
18. Lubliner J. Plasticity Theory. – Dover Publications, 2008.
19. Haupt P. Continuum Mechanics and Theory of Materials. – Springer, 2002.
20. Khan A.S., Huang S. Continuum Theory of Plasticity. – Wiley, 1995.
21. Euro NCAP Official Website. Safety Rating – Jeep Grand Cherokee 2005. URL: <https://www.euroncap.com/en/results/jeep/grand-cherokee/11605>.
22. NHTSA NCAP Website. Side Impact Ratings – Jeep Grand Cherokee. URL: <https://www.nhtsa.gov/ratings>
- 23 Belytschko T., Liu W.K., Moran B., Elkhodary K. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. 2nd ed. John Wiley & Sons, 2014.
24. Benson D.J. Computational Methods in Lagrangian and Eulerian Hydrocodes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1992, Vol. 99, P. 235–394.
25. Belytschko T., Hughes T.J.R. Computational Methods for Transient Analysis. North-Holland, 1983.
26. Insurance Institute for Highway Safety (IIHS). Side Impact Crash Test Evaluation – Jeep Grand Cherokee 2005–2006. IIHS Technical Report, 2006.
27. National Highway Traffic Safety Administration (NHTSA). Side Pole Impact Test Procedure. FMVSS 214a, 2007.

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРЕМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 88   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

28. National Highway Traffic Safety Administration (NHTSA). NCAP Side Impact Assessment Program. U.S. Department of Transportation, 2021.

29. Johnson W., Jones N. Structural Impact. Cambridge University Press, 2011.

30. Jones N. Structural Impact. 2nd ed. Cambridge University Press, 2012.

31. Weber M., Altenbach H. Elasto-plasticity theory for large plastic deformation and its use for the material stiffness determination // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2024. Vol. 36. P. 1305–1321. DOI: 10.1007/s00161-024-01297-1.

32. Écsi L., Élesztős P., Jerábek R., Jančo R., Hučko B. An Alternative Framework for Developing Material Models for Finite-Strain Elastoplasticity // **IntechOpen**. 2019. DOI: 10.5772/intechopen.85112.

33. Johnson-Cook G.R., Cook W.H. A Constitutive Model and Data for Metals Subjected to Large Strains, High Strain Rates and High Temperatures. Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics, 1983, P. 541–547.

34. Labuz J. F., Zang A. Mohr–Coulomb failure criterion // Rock Mechanics and Rock Engineering. 2012. Vol. 45, No. 6. P. 975–979. DOI: 10.1007/s00603-012-0281-7.

35. Ma Z., Li C., Zhang W. et al. Modified Coffin–Manson equation to predict the fatigue life of structural materials subjected to mechanical–thermal coupling non-coaxial loading // Journal of Materials Science & Technology. 2023. Vol. 160. P. 118–127. DOI: 10.1016/j.jmst.2023.03.023.

36. Liu Q., Jiang G., Gao Y. et al. Development of improved Manson–Coffin model considering the effect of yield stress under asymmetrical cyclic loading // Journal of Mechanical Science and Technology. 2021. Vol. 35. P. 5415–5424. DOI: 10.1007/s12206-021-1112-0.

37. Digital Image Correlation Society. Introduction to Digital Image Correlation (DIC). URL: <https://www.dicsociety.org/>

|      |      |          |        |      |                                    |      |
|------|------|----------|--------|------|------------------------------------|------|
|      |      |          |        |      | <i>КРЕМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ</i> | Арк. |
|      |      |          |        |      |                                    | 89   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                                    |      |

# ДОДАТОК

|      |      |          |        |      |                             |      |
|------|------|----------|--------|------|-----------------------------|------|
|      |      |          |        |      | КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ | Арк. |
|      |      |          |        |      |                             | 90   |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |                             |      |

## Аналіз напружено-деформованого стану та оцінка міцності елементів кузова легкового автомобіля при боковому ударі

Виконав: студент групи МТВА-22-1  
Крамар В.С.

Керівник: д.т.н., професор Драч І.В.

Кафедра  
трибології, автомобілів і матеріалознавства

2

ОБ'ЄКТ ДОСЛІДЖЕННЯ: кузов зі сталі HSLA 340

МЕТА: оцінка напружено-деформованого стану та запасу міцності

МЕТОД: скінченно-елементне моделювання (FEM) + тензорний аналіз

3

### АКТУАЛЬНІСТЬ ДОСЛІДЖЕННЯ

- 25% усіх аварій — бокові зіткнення;
- мало місця між пасажиром і ударом: лише кілька сантиметрів металу.

**ЗАВДАННЯ:** метал повинен поглинути енергію, але не пробити салон

**ОБ'ЄКТ:** Jeep Grand Cherokee WK — типовий представник позашляховиків з кузовом «уніфікованого» типу (unibody) з високоміцної сталі HSLA 340

4

### ЩО ДОСЛІДЖУВАЛОСЬ?

- Бічна панель Jeep Grand Cherokee
- Стійка В (центральна стійка) — основний захисний елемент
- Поріг (rocker panel) — нижня опора
- Зовнішня панель — тонкий декоративний лист (0.7–1.0 мм)
- Посилення — внутрішні елементи товщиною 1.6–2.4 мм зі сталі HSLA 340
- Особливість: «вухка» на стійці В для розподілу удару на дах і поріг

5

### ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ТЕНЗОРНОГО ОПИСУ НДС

Напружено-деформований стан — відповідь матеріалу на зовнішні сили.

$$\text{Тензор напружень: } \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

- 9 компонентів, 6 незалежних (симет)
- Пов'язує напрямки сили з площиною дії

Тензор деформацій  
• Описує зміну форми та розмірів  
• Лінійні та кутові деформації

Перетворення координат:  
компоненти змінюються, але фізичний стан — ні

6

### Методика моделювання

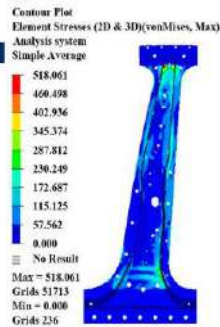
- Стандарт краш-тесту: Euro NCAP / FMVSS 214
  - Бар'єр масою 1368 кг
  - Швидкість 54 км/год
  - Угол 90° (боковий удар) <https://www.youtube.com/watch?v=0DmHkZu0s>
- Метод скінченних елементів (FEM): модель з ~180 000 елементів
- Тензор напружень: матриця з 6 компонентів (3 нормальних + 3 дотичних), що описує сили в кожній точці металу
- Інваріанти: величини, що не змінюються при повороті деталі (показують «чисту» інтенсивність навантаження)

7

### РЕЗУЛЬТАТИ: розподіл напружень

- Зона 1 — Стійка В (центр):**
- Поперечний тиск:  $\sigma_{yy} = -185$  МПа
  - Поздовжній розтяг:  $\sigma_{xx} = +145$  МПа
  - Дотичні (зсув):  $\tau_{xy} = +95$  МПа
- Зона 2 — Приварений поріг:**
- $\sigma_{eq} = 236$  МПа (нижче межі текучості — безпечно)
- Зона 3 — Перехідний радіус:**
- середні напруження, складний просторовий стан

**Висновок:** стійка В бере удар на себе, решта конструкції працює легше



8

### РЕЗУЛЬТАТИ: аналіз інваріантів

- $I_1$  (лінійний інваріант) = середній тиск:
  - У стійці В: -68 МПа (метал стискається об'ємно, але незначно)
- $J_2$  (квадратичний інваріант) = інтенсивність формозмінних деформацій:
  - Визначає, чи почалася пластична деформація
- Еквівалентне напруження Мізеса:
  - $\sigma_{eq} = 358$  МПа при максимальному ударі
  - Межа текучості сталі HSLA 340 = 340 МПа
  - Перевищення на 5%: метал трохи «пливе», але не рветься — це і гасить енергію!

|      |      |          |        |      |
|------|------|----------|--------|------|
|      |      |          |        |      |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |

## Енергопоглинання та деформації

- Поглинуто енергії: **68 кДж** (44% від енергії удару)
- Максимальне втиснення (інтрузія): **312 мм**
- Пластична деформація в стійці В: **1.45%** (контрольована, допустима)
- Зони без пластики (пружні): приварений поріг, перехідні радіуси
  - Запас міцності тут:  $n = 1.21-1.44$  (міцність забезпечена)

9

## Оцінка міцності та ресурсу

- **Критерій Мізеса:** порівняння розрахункового напруження з реальною міцністю сталі
- **Запас міцності (Safety Factor):**
  - Стійка В:  $n = 0.95$  (менше 1 — це нормально для одноразового удару, енергопоглинання)
  - Приварені деталі:  $n = 1.44$  (більше 1 — залишаться цілими)
- **Ресурс за втомою (Coffin-Manson):**
  - Стійка В витримає ~20–30 таких ударів до появи тріщин
  - Для одноразової аварії — запас величезний

10

## Верифікація: порівняння з реальними краш-тестами

- Euro NCAP (2005): Jeep Grand Cherokee отримав **16/16 балів** за боковий удар
- **Рзрахунок і Експеримент:**
  - Інтрузія: **312 мм** (розрахунок) і ~320 мм (тест) — похибка < 8%
  - Час максимальної деформації: **48 мс** і ~50 мс — відповідність висока
- **Висновок:** математична модель адекватно відтворює реальну аварію

11

## РОЗРАХУНКОВА ЧАСТИНА — ЗАДАЧА

**Об'єкт:** бокова панель кузова легкового автомобіля при боковому ударі

### Вихідні дані:

- Матеріал: високоміцна сталь HSLA 340
- Товщина панелі: 1.2 мм
- Сила удару: 50 кН (стандартний краш-тест)
- Швидкість деформування: 10 м/с

### Зони деформації при боковому ударі

- Зона прямого контакту — локальна пластична деформація
- Зона згину — мембранні напруження
- Зона зсуву — дотичні напруження
- Зона розтягування — відгин матеріалу від удару
- Зона стиснення — гофрування

12

## РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКУ

### Компоненти напружень у зоні згину

| Зона           | $\sigma_x$ , МПа | $\sigma_y$ , МПа | $\tau_{xy}$ , МПа | $\sigma_z$ , МПа |
|----------------|------------------|------------------|-------------------|------------------|
| Прямий контакт | 420              | 380              | 85                | <b>445</b>       |
| Згин           | 285              | 45               | 120               | 312              |
| Зсув           | 120              | -80              | 195               | 285              |
| Розтягування   | 195              | 165              | 45                | 186              |
| Стиснення      | -165             | -210             | 65                | 168              |

### Діаграма деформування HSLA 340

- $\sigma_0.2 = 550 \cdot \epsilon^{0.18}$  (високоміцна сталь з низькою пластичністю)
- Границя міцності: 470 МПа
- **Критична зона**
- Прямий контакт:  $\sigma_1 = 445 \text{ МПа} \approx 0.95 \sigma_B$
- Небезпека розриву при повторному навантаженні

13

## ОЦІНКА ЗА КРИТЕРІЄМ МІЗЕСА

Умова:  $\sigma_1 \leq [\sigma] = \sigma_B/n$ ,  $n = 1.5$  (для елементів безпеки)

### Результати оцінки

| Зона           | $\sigma_1$ , МПа | $[\sigma]$ , МПа | Запас       | Оцінка     |
|----------------|------------------|------------------|-------------|------------|
| Прямий контакт | 445              | 313              | <b>1.42</b> | Небезпечно |
| Згин           | 312              | 313              | 1.00        | Гранично   |
| Зсув           | 285              | 313              | 1.10        | Допустимо  |
| Розтягування   | 186              | 313              | 1.68        | Безпечно   |
| Стиснення      | 198              | 313              | 1.58        | Безпечно   |

### Висновок:

- При боковому ударі зона прямого контакту працює на межі міцності. Рекомендовано застосування алюмінієвого профілю або композитного посилення.

14

## Основні висновки

- Конструкція Jeep Grand Cherokee **оптимальна**: стійка В свідомо працює на поглинання енергії (пластичні деформації), а критичні з'єднання залишаються в пружному стані
- Сталь HSLA 340 — хороший вибір: міцна (340 МПа), але пластична (не рветься при деформації 15–20%)
- **Тензорний аналіз** дозволяє точно знайти «слабкі місця» ще на етапі проектування
- Результати можна використовувати для створення нових безпечних кузовів з оптимальною товщиною листів

15

## ВИСНОВКИ

### Практична цінність для автомобілебудування

- Методика оцінки міцності кузовних панелей при зіткненні
- Визначення критичних зон для посилення конструкції
- Обґрунтування вибору матеріалів (сталь vs алюміній vs композит)

### Напрями подальших досліджень

- Застосування методу скінченних елементів для повної моделі кузова
- Експериментальна верифікація методом DIC на зразках з реальних деталей
- Розробка рекомендацій щодо посилення зон з мінімальним запасом міцності

16

|      |      |          |        |      |
|------|------|----------|--------|------|
|      |      |          |        |      |
| Змн. | Арк. | № докум. | Підпис | Дата |

КРБМТВАТАМ 26 22141. 000 ПЗ

Арк.

92