УДК 539.3

Н.О. ЯРЕЦЬКА, А.О. РАМСЬКИЙ
Хмельницький національний університет

# ВПЛИВ ПОЧАТКОВИХ НАПРУЖЕНЬ НА КОНТАКТНУ ВЗАЄМОДІЮ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ЦІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА ТА ПІВПРОСТОРУ.

*Стаття присвячена дослідженню впливу початкових напружень на контактну взаємодію попередньо напруженого кільцевого штампа та півпростору з початковими (залишковими) напруженнями без урахування сил тертя. Дослідження представлено в загальній формі для теорії великих початкових (кінцевих) деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій в рамках лінеаризованої теорії пружності для довільної структури пружного потенціалу.*

*Робиться припущення, що початкові стани пружного кільцевого штампа та пружного півпростору залишаються однорідними та рівними. Дослідження проводиться за допомогою координат у початковому деформованому стані, які пов'язані з лагранжевими координатами (що відповідають природному стану). Крім того, вплив пружного кільцевого штампа викликає невеликі збурення основного пружного деформованого стану.*

*Також передбачається, що пружний кільцевий штамп та пружний півпростір виготовлені з різних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композиційних матеріалів.*

*Числовий аналіз представлений у вигляді графіків для пружного потенціалу найпростішої структури для ізотропного стисливого тіла та відповідає квадратичному наближенню при використанні алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна. Алгоритм розв'язку цієї задачі реалізується у вигляді комп'ютерної програми у пакеті Maple 15.*

*Досліджено вплив початкового напруження на контактну взаємодію між пружним кільцевим штампом та пружним півпростором у випадку пружного потенціалу конкретної структури.*

*Актуальність проведених досліджень полягає в тому, що врахування впливу початкових (залишкових) напружень у тілах на закон розподілу контактних характеристик пружних тіл у точках їх взаємодії може дозволяти ефективніше враховувати, зносостійкість матеріалів, правильно оцінюючи їх запаси міцності. Також це може в достатній мірі знизити витрату матеріалів, зберігаючи їх необхідні функціональні характеристики.*

*Отже, вплив початкових (залишкових) напружень є суттєвим і його слід враховувати при розрахунку міцності в конструкціях і деталях машин.*

*Ключові слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові напруження), контактна задача, кільцевий штамп, півпростір.*

N.O. YARETSKA, A.O. Ramsky
Khmelnytsky National University

# INFLUENCE OF INITIAL STRESSES ON CONTACT INTERACTION OF PRE-STRESSED ANNULAR STAMP AND HALF SPACE

*The article is devoted to the study of the contact interaction of a pre-stressed annular stamp and a half-space with initial stresses without taking friction forces into account. The study is presented in a general form for the theory of large initial (finite) deformations and* *two versions of the theory of small initial deformations in the framework of the linearized theory of elasticity for an arbitrary structure of the elastic potential.*

*There is assumed that the initial states of the elastic annular stamp and the elastic half-space remain homogeneous and equal. The study is carried out in the coordinates of the initial deformed state, which are interrelated with Lagrange coordinates (natural state). In addition, the influence of the annular stamp causes small perturbations of the basic elastic deformed state.*

*Also, it is assumed that the elastic annular stamp and the elastic half-space are made of different isotropic, transversal-isotropic or composite materials.*

*Numerical analysis is presented in the form of graphs for the elastic potential of the simplest structure for an isotropic compressible body and corresponds to the quadratic approximation using algebraic invariants of the Green's strain tensor. The algorithm for solving this problem is implemented in the form of a computer program in the Maple 15 package*

*The influence of the initial stress on the contact interaction between the elastic annular stamp and the elastic half-space of the potentials of a particular structure is investigated.*

*The value of the studies carried out is that taking into account the influence of the initial (residual) stresses in the bodies on the law of distribution of the contact characteristics of elastic bodies at the points of their interaction can allow us to take into account, more effectively, the wear resistance of materials by properly estimating their strength reserves. Also, it can sufficiently reduce their material consumption, while retaining the necessary functional characteristics of materials.*

*Consequently, the observed effect of the initial (residual) stresses is significant and must be taken into account when calculating the strength in structural details.*

*Key words: the linearized elasticity theory, initial (residual) stresses, contact problem, annular punch, half-space.*

Н.А. ЯРЕЦКАЯ, А.А. РАМСКИЙ
Хмельницкий национальный университет

## ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПА И ПОЛУПРОСТРАНСТВА.

*Статья посвящена исследованию влияния начальных напряжений на контактное взаимодействие предварительно напряженного кольцевого штампа и полупространства с начальными (остаточными) напряжениями без учета сил трения.*

*Исследование представлено в общей форме для теории больших начальных (конечных) деформаций и двух вариантов теории малых начальных деформаций в рамках линеаризованной теории упругости для произвольной структуры упругого потенциала.*

*Делается предположение, что начальные состояния упругого кольцевого штампа и упругого полупространства остаются однородными и равными. Исследование проводится с помощью координат в начальном деформированном состоянии, которые связанны с лагранжевыми координатами (естественного состояния). Кроме того, влияние кольцевого штампа вызывает небольшие возмущения основного упругого деформированного состояния.*

*Также предполагается, что упругий кольцевой штамп и упругое полупространство изготовлены из различных изотропных, трансверсально-изотропных или композиционных материалов.*

*Численный анализ представлен в виде графиков для упругого потенциала простейшей структуры для изотропного сжимаемого тела и отвечает квадратичному приближению при использовании алгебраических инвариантов тензора деформаций Грина. Алгоритм решения этой задачи реализуется в виде компьютерной программы пакета Maple 15.*

*Исследовано влияние начального напряжения на контактное взаимодействие между упругим кольцевым штампом и упругим полупространством в случае потенциалов конкретной структуры.*

*Актуальность проведенных исследований заключается в том, что учет влияния начальных (остаточных) напряжений в телах на закон распределения контактных характеристик упругих тел в точках их взаимодействия может позволять эффективно учитывать, износостойкость материалов, правильно оценивая их запасы прочности. Также это может в достаточной мере снизить расход материалов, сохраняя их необходимые функциональные характеристики.*

*Следовательно, влияние начальных (остаточных) напряжений является существенным и его следует учитывать при расчете прочности в конструкциях и деталях машин.*

*Ключевые слова: линеаризованная теория упругости, начальные (остаточные) напряжения, контактная задача, кольцевой штамп, полупространство.*

## Постановка проблеми

Вплив початкових напружень на контактну взаємодію пружних тіл є одним із важливих факторів, які діють на розподіл напружень та переміщень. Початкові напруження практично завжди присутні в реальних конструкціях і деталях машин, тому розробка ефективних методів розрахунку напружено-деформованого стану з врахуванням початкових деформацій є актуальною і важливою науково-технічною проблемою.

Особливу зацікавленість у зв'язку із впровадженням у виробництво нових штучних матеріалів, які можуть витримувати великі початкові деформації, викликає дослідження контактних задач для попередньо напружених тіл. Таким чином, механіка композиційних матеріалів, сейсмологія, механіка матеріалів і елементів конструкцій, геофізика, механіка гірських порід, руйнівні методи визначення напружень, біомеханіка і ряд інших - далеко неповний перелік наукових напрямків фундаментального і прикладного характеру, в яких виникли проблеми, пов'язані з необхідністю дослідження впливу початкових напружень або деформацій.

## Аналіз останніх досліджень і публікацій

Кількість публікацій з механіки контактної взаємодії безперервно збільшується, що пояснюється актуальністю розглянутих проблем для інженерної діяльності. Як наслідок отримані результати із широкого кола питань, що представлені працями [1–5]. Існує також ряд узагальнюючих публікацій [6], які повністю або частково пов'язані з тематикою даного дослідження.

Досить детальний огляд робіт пов'язаних із контактним тиском жорстких штампів (у тому числі і кільцевих) у разі відсутності початкових напружень наведено в монографіях [1-3].

Дослідження контактної взаємодії жорстких і пружних штампів із попередньо напруженими тілами представлені в [1–5]. Причому розглядаються або пружні потенціали конкретної структури, або завдання ставиться в загальному вигляді для стислих (нестисливих) тіл із потенціалом довільної структури на основі лінеаризованої теорії пружності.

Вплив початкових напружень на контактну взаємодію жорсткого кільцевого штампа на пружний півпростір з початковими напруженнями представлено в роботі [7].

**Мета дослідження**

У рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями [1, 3] представити постановку та розв’язок задачі про тиск попередньо напруженого кільцевого штампа на півпростір з початковими напруженнями без урахування сил тертя. Дослідження виконати у загальному вигляді для стислих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Отримати числові та графічні результати досліджень для пружного потенціалу найпростішої структури для ізотропного стисливого тіла, що відповідає випадку нерівних коренів визначального рівняння [1], а також зробити висновки про вплив початкових напружень на контактну взаємодію тіл.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

Нехай скінченний попередньо напружений кільцевої штамп з плоскою основою, геометрична вісь симетрії якого збігається з віссю $y_3$ циліндричної системи координат ($r$, $\theta$, $y_3$), спрямована усередину півпростору (рис.1) і тисне на півпростір з силою $P$, після виникнення там початкового деформованого стану. $R_1$, $R_2$ –внутрішній і зовнішній радіуси штампа, відповідно. Будемо вважати, що зовнішнє навантаження прикладене тільки до вільного торця пружного штампа. Під дією навантаження всі точки торця штампа переміщаються у напрямку осі симетрії $y_3$ на одну і ту ж величину $\varepsilon$. Будемо вважати, що поверхні поза областю контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а у зоні контакту переміщення і напруження – неперервні.

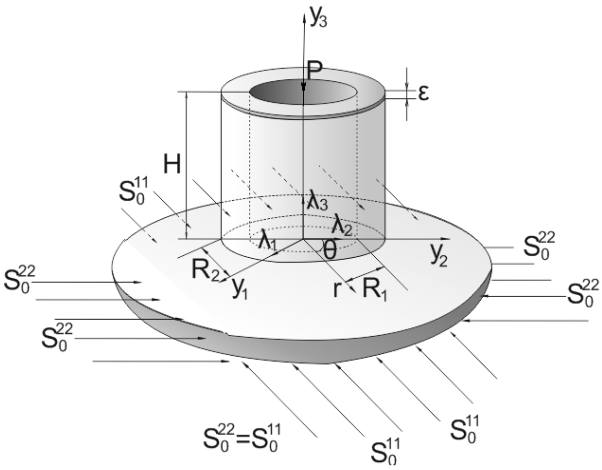


**Рис. 1. Тиск пружного кільцевого штампа на пружний півпростір.**

На рис. 1. $\lambda_i$ ($i$=1,2,3) – коефіцієнти видовження, які визначають переміщення початкового стану, а $S_0^{11}, S_0^{22}$ – компоненти симетричного тензора початкових напружень.

Припустимо, що початкові стани контактуючих тіл – однорідні та рівні, а пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовані функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [1]. Матеріали тіл, вважаємо ізотропним стисливими або нестисливими з довільною структурою пружного потенціалу.

Нехай виконуються співвідношення [1]:

$$y_m = x_m + U_m^0, \quad U_m^0 = \delta_{mi}(\lambda_m - 1)\lambda_i^{-1} y_i \quad (i, m = \overline{1,3}).$$

Тоді основне рівняння в переміщениях [1] для стисливих тіл має вигляд

$$L'_{m\alpha} U_\alpha = 0, \; L'_{m\alpha} = \omega'_{ij\alpha\beta}\, \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta, \; (i, m, \alpha, \beta = \overline{1,3}), \tag{1}$$

а для нестисливих тіл виконується умова нестисливості:

$$L'_{m\alpha} U_\alpha + q'_{\alpha m}\, \partial p' / \partial y_\alpha = 0, \quad L'_{m\alpha} = \kappa'_{im\alpha\beta}\, \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta, \tag{2}$$

$$q'_{ij}\, \partial U_j / \partial y_i = 0, \; q'_{ij} = \lambda_i q_{ij}, \quad (i, j, m, \alpha, \beta = \overline{1,3}).$$

Вирази для визначення складових тензора напружень для стислих і нестисливих тіл запишемо у вигляді:

$$Q'_{ij} = \omega'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta}, \; Q'_{ij} = \kappa_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta} + q'_{ij} p, \; \omega'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta}, \kappa'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \kappa_{ij\alpha\beta}.$$

У випадку однорідних початкових деформаціях вважаємо, що виконується умова $S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \; S_0^{33} = 0; \; \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. При цьому розв'язок рівнянь (1), (2) представимо за допомогою функції $\chi$, що задовольняє рівняння

$$(\Delta_1 + \xi_2'^2\, \partial^2 / \partial y_3^2)(\Delta_1 + \xi_3'^2\, \partial^2 / \partial y_3^2)\chi = 0, \tag{3}$$

де $\Delta_1 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1}\, \partial / \partial r$.

В даній статті розглянемо випадок нерівних коренів характеристичного рівняння, яке відповідає рівнянню (3).

Запишемо граничні умови, що у системі циліндричних координат $(r, \theta, z_i)$, де $z_i = v_i^{-1} y_3, \; v_i = \sqrt{n_i}, \; (i = 1, 2), \; n_1 = \xi_2'^2, \; n_2 = \xi_3'^2$ відповідають даній постановці задачі:

$$U_3^{(1)} = -\varepsilon, \quad Q_{3r}^{(1)} = 0 \quad (R_1 < r < R_2), \; z_1 = H v_1^{-1}, \tag{4}$$

$$U_3^{(1)} = U_3^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{33}^{(1)} = \tilde{Q}_{33}^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (R_1 < r < R_2), \; z_i = 0 \; (i = 1,2), \tag{5}$$

$$\tilde{Q}_{33}^{(2)} = 0, \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 < r < R_1 \quad R_2 < r < \infty), \; z_2 = 0, \tag{6}$$

$$\tilde{Q}_{rr}^{(1)} = 0, \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \le z_i \le H v_i^{-1}), \; r = R_1, \; r = R_2. \tag{7}$$

Умова рівноваги, що визначає зв'язок між осадом торця та рівнодіючим навантаженням $P$ має вигляд:

$$P = -2\pi \int_{R_1}^{R_2} r Q_{33}^{(2)}(0, r)\, dr. \tag{8}$$

Для визначення напружено-деформованого стану в пружному кільцевому штампі з початковими напруженнями використовуємо лінеаризовані рівняння (1) – (3). З цих рівнянь слідують вирази для компонентів вектора переміщення та тензора напруження для стислих і нестисливих тіл. Тоді загальний розв'язок $\chi = \chi_1 + \chi_2$ приймемо у вигляді

$$\chi_1 = 0.25\varepsilon\theta_8^{-1}(r^2 - 2z_1^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ \tilde{C}_0^{(k)} \Big[ (3H\theta_6\theta_8^{-1} + z_1)(r^2 - 2z_1^2) + 2z_1 r^2 \Big] +$$

$$+ \tilde{A}_k I_0(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k v_1 z_1) + J_0(\alpha_k r) \tilde{S}_2(\alpha_k z_1) \Big\} M_k,$$

$$\chi_2 = 0.25\varepsilon\theta_8^{-1}(r^2 - 2z_2^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ \tilde{C}_0^{(k)} \Big[ (3H\theta_6\theta_8^{-1} + z_2)(r^2 - 2z_2^2) + 2z_2 r^2 \Big] +$$

$$+ \tilde{B}_k I_0(\gamma_k v_2 r) \sin(\gamma_k v_2 z_2) + J_0(\alpha_k r) \tilde{S}_3(\alpha_k z_2) \Big\} M_k,$$

де $\alpha_k, \gamma_k$ – власні значення задачі (4) – (7), $\theta_8 = m_1 n_1^{-1} + m_2 n_2^{-1}$,

$$\tilde{S}_2 = \tilde{E}_k sh(\alpha_k H v_1^{-1}) - \frac{s_0 n_1}{n_2} ch(\alpha_k H v_1^{-1}),\ \tilde{S}_3 = \tilde{N}_k sh(\alpha_k H v_2^{-1}) - ch(\alpha_k H v_2^{-1}),\ \tilde{A}_k = -\frac{s_0 I_1(\gamma_k v_2 R_2)}{I_1(\gamma_k v_1 R_1)},$$

$$\tilde{C}_0^{(k)} = -\frac{1}{6 n_2 \theta_7} J_0(\mu_k)\theta_{10},\ \theta_{10} = (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) v_1 s_0 - (\tilde{c}_2 - \tilde{c}_0) v_2,$$

$$\tilde{B}_k = \frac{J_0(\mu_k)}{n_2 \alpha_k}\{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) s_0 \left[cth(\alpha_k H v_1^{-1})(v_1 + H sh(\alpha_k H v_1^{-1}) - v_1 ch(\alpha_k H v_1^{-1})) - \right.$$
$$- \alpha_k H ch(\alpha_k H v_1^{-1}) + v_1 sh(\alpha_k H v_1^{-1}) - 0.5 H^2 \alpha_k v_1^{-1}\big] + (\tilde{c}_2 - \tilde{c}_0)\left[\alpha_k H ch(\alpha_k H v_2^{-1}) - \right.$$
$$\left. - v_2 sh(\alpha_k H v_2^{-1}) + 0.5 H \alpha_k (1 - \alpha_k cth(\alpha_k H v_2^{-1}))\right],\ \theta_6 = m_1 v_1^{-3} + m_2 v_2^{-3},$$
$$\theta_7 = (1 + \tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_1) v_1^{-1} + (1 + \tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_2) v_2^{-1}.$$

Тоді напружено-деформований стан в попередньо напруженому кільцевому штампі для стислих (нестисливих) тіл та нерівних коренів, з урахуванням (4) - (7), представимо у вигляді

$$U_r^{(1)} = -\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{6\tilde{C}_0^{(k)} r \theta_+ + \gamma_k^2\left[v_1 \tilde{A}_k I_1(v_1\gamma_k r)\cos(\gamma_k v_1 z_1) + \tilde{B}_k v_2 I_1(v_2 \gamma_k r)\cos(\gamma_k v_2 z_2)\right] -$$
$$-\alpha_k^2 J_1(\alpha_k r)\left(v_1^{-1}\tilde{S}_4(\alpha_k z_1) + v_2^{-1}\tilde{S}_5(\alpha_k z_2)\right)\Big\} M_k,$$
$$U_3^{(1)} = -2\varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{12\tilde{C}_0^{(k)}(m_1 z_1 n_1^{-1} + m_2 z_2 n_2^{-1} - H\theta_6) + \tag{9}$$
$$+\gamma_k^2\left[\tilde{A}_k m_1 I_0(\gamma_k v_1 r)\sin(\gamma_k v_1 z_1) + \tilde{B}_k m_2 I_0(\gamma_k v_2 r)\sin(\gamma_k v_2 z_2)\right] -$$
$$-\alpha_л^2 J_0(\alpha_k r)\left[m_1 n_1^{-1}\tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + m_2 n_2^{-1}\tilde{S}_3(\alpha_k z_2)\right]\Big\} M_k,$$
$$Q_{33}^{(1)} = C_{44}(1+m_1) l_1 \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{12\tilde{C}_0^{(k)}\left[v_1^{-1} + s v_2^{-1}\right] + \gamma_k^3\left[\tilde{A}_k n_1 I_0(\gamma_k v_1 r)\cos(\gamma_k v_1 z_1) + \right.$$
$$\left. + s n_2 \tilde{B}_k I_0(\gamma_k v_2 r)\cos(\gamma_k v_2 z_2)\right] - \alpha_k^3 J_0(\alpha_k r)\left[\tilde{S}_4(\alpha_k z_1) v_1^{-1} + s\tilde{S}_5(\alpha_k z_2) v_2^{-1}\right]\Big\} M_k,$$
$$Q_{3r}^{(1)} = C_{44}(1+m_1)\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\gamma_k^3\left[\tilde{A}_k v_1 I_1(\gamma_k v_1 r)\sin(\gamma_k v_1 z_1) + s_0 v_2 \tilde{B}_k I_1(\gamma_k v_2 r)\sin(\gamma_k v_2 z_2)\right] +$$
$$+\alpha_k^3 v_1^{-1} J_1(\alpha_k r)\left(n_1^{-1}\tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + s_0 n_2^{-1}\tilde{S}_3(\alpha_k z_1)\right)\Big\} M_k,$$

Де $\tilde{S}_4 = \frac{n_1 s_0}{n_2}\left[cth(\alpha_k H v_1^{-1}) ch(\alpha_k z_1) - sh(\alpha_k z_1)\right]$, $\tilde{S}_5 = sh(\alpha_k z_2) - cth(\alpha_k H v_2^{-1})$, $\tilde{E}_k = \frac{n_1 s_0}{n_2} cth(\alpha_k H v_1^{-1})$, $\tilde{N}_k = -cth(\alpha_k H v_2^{-1})$, $\theta_+ = v_2^{-1} + 2 v_1^{-1}$, $J_v(x)$, $I_v(x)$ – функції Бесселя, значення $D_{44}, C_{44}, l_1, l_2, m_1, m_2, s_0$ визначаються із [1].

Напружено-деформований стан в попередньо напруженому півпросторі з урахуванням (4) - (7) і $z_1 = 0$, представимо у вигляді [1, 7]

$$Q_{33}^{(2)} = \frac{\omega_3}{R_2 - R_1}\int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta r) d\eta,\quad U_3^{(2)} = -\frac{1}{\omega_3}\int_0^{\infty}\frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta r) d\eta,\ U_r^{(2)} = \omega_1\int_0^{\infty}\frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta r) d\eta, \tag{10}$$

де $\omega_3 = c_{44} l_1 (1 + m_1)(s - s_0)$, $\omega_1 = s_0 - 1$, $s = s_0 l_2 l_1^{-1}$, $F(\eta)$ – невідома функція.

Використовуючи розв'язок для штампа (9) і задовольняючи другій умові (4), другій умові (7), знаходимо власні значення задачі (4) – (7) для $n_1 \neq n_2$:

$$\gamma_k = \frac{\pi(2k+1)}{H},\quad \alpha_k = \frac{\mu_k}{R_1}\quad (J_1(\mu_k) = 0).$$

Врахувавши перші умови (5) и (6), визначимо невідому функцію $F(\eta)$ для (10) із парних інтегральних рівнянь:

$$\int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta r) d\eta = f(r) \quad (R_1 < r < R_2),$$

$$\int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r) d\eta = 0 \quad (0 < r < R_1, R_2 < r < \infty), \tag{11}$$

де $f(r) = \omega_2 \left( \varepsilon - \frac{2H\theta_6\theta_{10}}{n_2\theta_7} \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k) M_k + \frac{m_1 s_0 - m_2}{n_2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 J_0(\alpha_k r) M_k \right)$.

Застосування формули звернення до (11) приводить її до співвідношення для функції $F(\eta)$, тобто

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = \frac{2\omega_2}{\pi} \left\langle \varepsilon\psi(\eta,0) - \frac{2H\theta_6\theta_{10}}{n_2\theta_7} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ J_0(\mu_k)\psi(\eta,0) + (m_1 s_0 - m_2) R n_2^{-1} \alpha_k^2 \psi(\eta,\mu_k) \right] M_k \right\rangle \tag{12}$$

$$\left( \psi(x,y) = \frac{x \sin x \cos y - y \sin y \cos x}{x^2 - y^2}, \quad \psi(x,0) = \frac{\sin x}{x} \right).$$

Врахувавши другу граничну умову (5), маємо

$$\int_0^\infty F(\eta) \int_{R_1}^{R_2} r J_0(\mu_n r) J_0(\eta r) dr d\eta = \frac{R_2 - R_1}{s - s_3} \left\langle -\frac{2\theta_{10}}{\theta_7} \left( \frac{1}{\nu_1} - \frac{s}{\nu_2} \right) \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k) \tilde{g}_k M_k + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^3 \left[ \tilde{A}_k n_1 t_{kn}^{(1)} + s n_2 t_{kn}^{(2)} \right] \tilde{B}_k - \frac{\alpha_k}{\nu_2} \tau_{kn} \left[ \frac{\nu_1 s_0}{\nu_2} cth\left( \frac{\alpha_k H}{\nu_1} \right) - s \cdot cth\left( \frac{\alpha_k H}{\nu_2} \right) \right] \right\} M_n \right\rangle$$

$$\Big( \tilde{g}_k = [R_2 J_1(\mu_k R_2) - R_1 J_1(\mu_k R_1)] \mu_k^{-1},$$

$$t_{kn}^{(i)} = [R_2 I_0(\gamma_k \nu_i R_2) \mu_n J_1(\mu_n R_2) + R_2 I_1(\gamma_k \nu_i R_2) \gamma_k \nu_i J_0(\mu_n R_2) -$$

$$- R_1 I_0(\gamma_k \nu_i R_1) \mu_n J_1(\mu_n R_1) - R_1 I_1(\gamma_k \nu_i R_1) \gamma_k \nu_i J_0(\mu_n R_1)] (\nu_i^2 \gamma_k^2 + \mu_n^2)^{-1},$$

$$\tau_{kn} = [R_1 J_1(\mu_n R_1) \mu_n J_0(\mu_k R_1) + R_2 J_1(\mu_k R_2) \mu_k J_0(\mu_n R_2) -$$

$$- R_1 J_1(\mu_k R_1) \mu_k J_0(\mu_n R_1) - R_2 J_1(\mu_n R_2) \mu_n J_0(\mu_k R_2)] (\mu_k^2 + \mu_n^2)^{-1} \Big).$$

Задовольнивши перші дві граничні умови (5), з урахуванням ортогональності Беселевих функцій $J_0(\mu_k\rho)$ для визначення сталих $M_i$ ($i$ = 0,1,2,…), які входять в (9) - (11), отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь:

$$a_k M_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} M_n = \beta_k \quad (k = 0,1,2,...). \tag{13}$$

Коефіцієнти системи мають вигляд

$$\beta_0 = -\frac{2\omega_2 \varepsilon}{\pi}, \;\; \beta_k = \frac{2\omega_2}{\pi} \left( \frac{\alpha_k^2}{n_2} \frac{(1+m_2)m_1}{1+m_1} - \varepsilon \right) \psi(0,\alpha_k), \;\; a_0 = 0,$$

$$a_k = \frac{4\omega_2 H\theta_6\theta_{10}}{\pi\theta_7 n_2} J_0(\mu_k)\psi(0,\mu_k) - \frac{2\theta_{10}(R_2 - R_1)}{(s - s_3)\theta_7} (\nu_1^{-1} -$$

$$- s\nu_2^{-1}) J_0(\mu_k) \mu_k^{-1} (R_2 J_1(\mu_k R_2) - R_1 J_1(\mu_k R_1)),$$

$$a_{kn} = \frac{R_2 - R_1}{s - s_3} \left( \gamma_k^3 [\tilde{A}_k n_1 t_{kn}^{(1)} + s n_2 t_{kn}^{(2)}] \tilde{B}_n - \alpha_k^3 \nu_2^{-1} [\nu_1 \nu_2^{-1} s_0 cth(\alpha_k H \nu_1^{-1}) - \right.$$

$$- s \cdot cth(\alpha_k H \nu_2^{-1})] \tau_{kn} + 2(m_2 - m_1 s_0)(n_2\pi)^{-1} \alpha_k^2 \psi(\mu_n, \mu_k),$$

$$a_{n0} = \frac{4\omega_2 H\theta_6\theta_{10}}{\pi\theta_7 n_2} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) J_0(\mu_n) + \frac{2\omega_2 (m_2 - m_1 s_0)}{n_2 \pi} \alpha_k^2 \psi(0,\mu_n) -$$

$$-\frac{\omega_3}{s-s_0}\left\{\frac{\theta_{10}}{\theta_7 n_2}\left(\frac{1}{\nu_1}+\frac{s}{\nu_2}\right)J_0(\mu_n)(R_2^2-R_1^2)+\gamma_n^2(\ddot{A}_n\nu_1+s\nu_2)[R_2 I_1(\gamma_n R_2\nu_2)-\right.$$

$$\left.-R_1 I_1(\gamma_n R_1\nu_1)]\widetilde{B}_n-\alpha_k^2 n_2^{-1}[R_2 J_1(\alpha_n R_2)-R_1 J_1(\alpha_n R_1)][\nu_1 s_0 cth(\alpha_k H\nu_1^{-1})-s\nu_2 cth(\alpha_k H\nu_1^{-1})]\right\}.$$

Використовуючи умову рівноваги (8), встановимо зв'язок між осадом торця та рівнодіючим навантаженням *P* у вигляді

$$P=4\varepsilon\omega_2^2(R_2-R_1)^{-1}((1-R_2^2)^{-0.5}-(1-R_1^2)^{-0.5}).$$

Визначивши невідомі сталі $M_i$ ($i$ = 0,1,2,..) із системи (13), можна обчислити контактні характеристики як у пружному штампі, так і у пружному півпросторі за формулами (9) – (10). В результаті цього, розв'язок представимо у вигляді рядів через нескінченну систему констант, що визначається із (13). Зауважимо, що в (13) коефіцієнти $\beta_k$ $a_{kn}$ залежать від величин, що визначають структуру пружного потенціалу та висоту пружного штампа $H$, а вільні члени залежать тільки від от $n_1$, $n_2$.

В роботі проведено чисельний розв'язок системи (13) методом редукції для пружного потенціалу найпростішої структури для ізотропного стисливого тіла, що відповідає квадратичному наближенню при використанні алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна у формі [ф-ла 1.46, 1] та таких значеннях параметрів: $R_2R_1^{-1}=2$, $\varepsilon=10^{-4}$, $\lambda_1=0.7;0.8;0.9;1;1.1;1.2;1.3$, де $0\le\rho\le1$, $\rho=(r-R_1)(R_2-R_1)^{-1}$. Алгоритм розв'язку реалізовано у Maple 15.

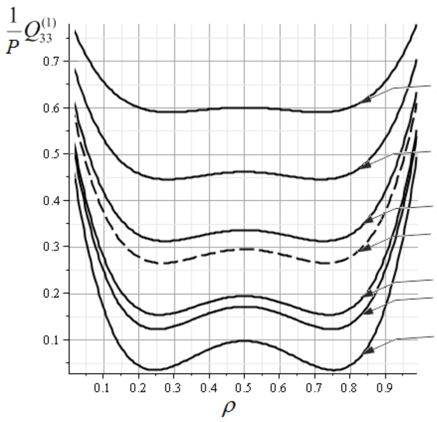


**Рис. 2. Контактні напруження $Q_{33}^{(1)}$.**

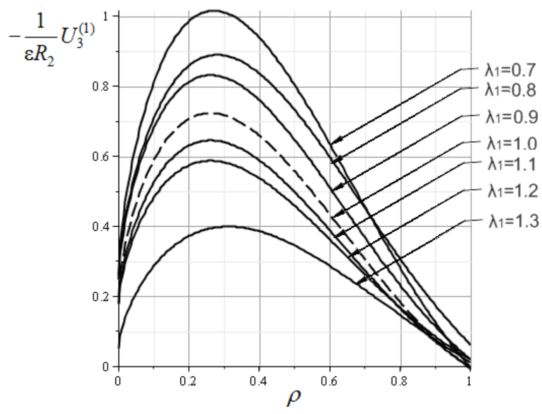


**Рис. 3. Контактні переміщення $U_3^{(1)}$.**

На рис. 2, 3 представлено розподіли нормальних контактних напружень $P^{-1}Q_{33}^{(1)}$ та переміщень $-(\varepsilon R_2)^{-1}U_3^{(1)}$ під кільцевим штампом в зоні контакту у безрозмірних координатах. Причому, початок координат по осі ρ відповідають значенню $r=R_1$. Пунктирні криві відповідають випадку відсутності початкових напружень ($\lambda_1$=1), а суцільні – з початковими напруженнями.

## Висновки

На підставі проведеного чисельного аналізу можна стверджувати, що при постійному зовнішньому навантаженні початкові (залишкові) напруження істотно впливають на основні контактні характеристики (особливо для нестисливих тіл). Крім цього, даний вплив полягає у тому, що: початкові напруження у півпросторі та штампі зменшуються у випадку стиску ($\lambda_1$<1) та збільшуються при розтягуванні ($\lambda_1$>1), що видно із рис. 2; при стисканні ($\lambda_1$<1) початкові напруження у півпросторі та штампі призводять до збільшення переміщень по абсолютній величині, а у випадку розтягування ($\lambda_1$>1) – до їх зменшення, що видно із рис. 3.

Таким чином, отримані результати з урахуванням попередньо напруженого стану при контактній взаємодії пружного штампа і пружного півпростору можуть бути використані для регулювання контактних напружень і переміщень при розрахунках конструкцій та деталей машин на міцність.

**Список використаної літератури**


1. Гузь А.Н, Рудницкий В.Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями : монографія. Хмельницький: вид. ПП Мельник, 2006. 710 с.
2. Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов : Вища шк., 1981. 136 с.
3. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Германия : Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
4. Babich. S. Yu., Dikhtyaruk N. N., Degtyar S. V. Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55, No 6. P. 629 – 635.
5. Yaretskaya N.A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *International Applied Mechanics*. 2014. Vol. 50, №4. P. 378-388.
6. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Рудницкий В.Б. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными (остаточными) напряженими. *Развитие идей Л.А. Галина в механике.* 2013. 480 с.
7. Yaretskaya N.A. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2018. Vol. 54, No 5. P. 539–543.


**References**


1. Guz A.N, Rudnitskiy V.B. Osnovyi teorii kontaktnogo vzaimodeystviya uprugih tel s nachalnyimi (ostatochnyimi) napryazheniyami : monografIya. Hmelnitskiy: vid. PP Melnik, 2006. 710 s.
2. Grilitskiy D.V., Kizyima Ya.M. Osesimmetrichnyie kontaktnyie zadachi teorii uprugosti i termouprugosti. Lvov : Vischa shk., 1981. 136 s.
3. Guz A.N., Babich S.Yu., Gluhov Yu.P. Smeshannyie zadachi dlya uprugogo osnovaniya s nachalnyimi napryazheniyami. Germaniya : Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 c.
4. Babich. S. Yu., Dikhtyaruk N. N., Degtyar S. V. Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55, No 6. P. 629 – 635.
5. Yaretskaya N.A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *International Applied Mechanics*. 2014. Vol. 50, №4. P. 378-388.
6. Guz A.N., Babich S.Yu., Rudnitskiy V.B. Kontaktnoe vzaimodeystvie uprugih tel s nachalnyimi (ostatochnyimi) napryazhenimi. Razvitie idey L.A. Galina v mehanike. 2013. 480 s.
7. Yaretskaya N. F. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2018. Vol. 54, №5. P. 539 – 543.


**Ярецька Наталія Олександрівна** – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики та комп’ютерних застосувань Хмельницького національного університету, e-mail: massacran2@ukr.net, **ORCID: 0000-0002-3726-2878.**

**Рамський Андрій Олександрович** – к.ф.-м.н., доцент, завідувач кафедри вищої математики та комп’ютерних застосувань Хмельницького національного університету, e-mail: ramsky@ukr.net, **ORCID:** 0000-0001-9624-5018