УДК 338.24

В. С. МОРОЗ, С. В. МОРОЗ
Хмельницький національний університет

МАРКОВСЬКИЙ ВИПАДКОВИЙ ПРОЦЕС З ДИСКРЕТНИМИ СТАНАМИ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ

Розглянуто актуальність теми та класичні методи прогнозування. Зроблено висновок про їх недосконалість та акцентовано увагу на доцільності викоритання ланцюгів Маркова з дискретними станами в прогнозуванні. При цьому всякий обєкт прогнозування розглядається як деяка стохастична система, що може з обумовленими імовірностями переходити з одного стану до іншого. Для оцінок цих імовірномтей використовуються вектор початкового стану та меториця переходу. Всі теоретичні положення апробовані на статистичному матеріалі. Використання ланцюгів Маркова дозволить поглибити та уточнити важко формалізовані процеси прогнозування, отримати нову інформацію про стани обєктів прогнозування у майбутньому.

Actuality of theme and classic methods of prognostication is considered. A conclusion is done about their imperfection and attention is accented on expedience of vikoritannya chains of Markov with the discrete consisting of prognostication. Thus every obekt prognostication is examined as some stochastic system which can with the conditioned probabilities pass from one state to other. For the estimations of these imovirnomtey used vector of the initial state and metoricya transition. All theoretical positions are approved on statistical material. The use of chains of Markov will allow to deepen and specify the hardness formalized processes of prognostication, get new information about consisting of obektiv prognostication of the future.

Ключові слова: прогнозування, методи прогнозування, випадковий процес, екстраполяція.

Прогнозування як науковий метод передбачення стану певного об’єкта або процесу та шляхів досягнення цього стану, сформувалось на початку XX ст. Роль прогнозування стану економічних систем і процесів значно зросла в останні роки зі становленням ринкових відносин в Україні. Прогнозування стало невідємною складовою індикативного планування і перетворилось в одну із функцій управління.

Бізнес-планування та формування виробничої програми підприємства ґрунтується на вивченні та прогнозуванні попиту та пропозиції. Визначення обсягів та структури продаж, сегментів ринків збуту, своїх ніш у цих сегментах має для підприємства першочергове значення, а проблема прогнозування попиту та пропозиції була, є і ще довго залишиться актуальною. Питанням розробки методичних основ прогнозування, його формалізації та адаптації в конкретних ринкових умовах присвячена велика кількість наукових робіт вітчизняних та зарубіжних вчених, таких як акад. Геєц В.М. та його учнів [2 – 8].

З типологією прогнозування тісно пов’язане питання джерел інформації про майбутнє. Розрізняють три основних джерела прогнозної інформації: накопичений досвід, який базується на знаннях закономірностей протікання і розвитку досліджуваних явищ, процесів, подій; екстраполяція існуючих тенденцій, закон розвитку яких в минулому і сучасному досить відомий; побудова моделей прогнозованих об’єктів відповідно до очікуваних або передбачуваних умов.

Відповідно до цих джерел інформації виділяють три взаємодоповнюючих один одного методи прогнозування: експертний, екстраполяції та моделювання. Експертний метод прогнозування за рівнем формалізації відноситься до інтуїтивних методів, а метод екстраполяції та моделювання – до формалізованих.

Сучасний апарат прогнозування по оцінках зарубіжних та вітчизняних авторів нараховує більше 150 методів. Серед цих методів найбільш розроблений *метод екстраполяції*, який включає такі методи екстраполяції: *метод безпосередньої екстраполяції, лагова (випереджаюча) екстраполяція числових тенденцій, методи екстраполяції по огинаючих кривих, кореляційні і регресійні методи.*

В роботах вітчизняних та зарубіжних вчених майже не приділялась увага методу прогнозування економічних і соціальних процесів ланцюгами Маркова з дискретними станами.

Необхідно відмітити, що більшість економічних і соціальних процесів розвиваються як випадкові процеси під дією випадкових факторів. Щоб спрогнозувати майбутній стан цих процесів, необхідно побудувати їх ймовірнісну модель.

Випадковий процес, що протікає в системі S, називається марковським процесом, якщо для кожного моменту часу t_0 ймовірність будь-якого стану системи в майбутньому (при $t > t_0$) залежить тільки від її стану в теперішньому часі (при $t = t_0$) і не залежить від того, коли і як система прийшла в цей стан. Іншими словами в марковському випадковому процесі майбутній стан системи залежить від теперішнього часу і не залежить від «передісторії» процесу. Найбільший інтерес для економічного прогнозування являє марковський випадковий процес (ланцюги Маркова) з дискретними станами. Будемо вважати, що для кожного стану системи відомі ймовірності переходу в інший стан за один крок. Позначимо через p_{ij}

ймовірність переходу системи S зі стану i в стан j за проміжок часу від t_0 до t. Нехай система S має n можливих станів $S_1, S_2, \cdots, S_n$. Запишемо перехідні ймовірності p_{ij} у вигляді матриці переходу $\left\| p_{ij} \right\|$:

$$\left\| p_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{matrix} \right\| \qquad (1)$$

Сума всіх елементів кожного рядка матриці дорівнює 1, тобто

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, \qquad (2)$$

оскільки за інтервал часу t ланцюг Маркова зі стану i обов'язково перейде в один із допустимих станів j.

Квадратна матриця $\left\| p_{ij} \right\|$ називається стохастичною, оскільки всі її елементи не від'ємні, а сума всіх елементів кожного рядка матриці дорівнює одиниці. Щоб повністю задати марковський ланцюг, необхідно крім матриці перехідних ймовірностей мати вектор початкового стану системи p_i. Вектор-рядок p_i називається ймовірнісним вектором. Очевидно, що всі елементи вектора невід'ємні, а сума елементів дорівнює одиниці, тобто

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t_0) = 1. \qquad (3)$$

Початковий стан системи можна задати за допомогою ймовірнісного вектора-рядка, один із елементів якого дорівнює 1, а всі інші елементи рівні 0.

Доказано, що вектор ймовірностей ланцюга Маркова в момент t дорівнює добутку вектора ймовірностей в початковий момент t_0 на матрицю переходу, тобто

$$p(t) = p(t_0) \cdot \left\| p_{ij} \right\| \qquad (4).$$

Графічно представити перехід системи S_0 в стани S_1, S_2 ,…, S_n можна, побудувавши дерево логічних можливостей.

Не дивлячись на логічність та простоту методу, його застосування на практиці ускладнюються відсутністю необхідної інформації в статистичній та бухгалтерській звітності підприємств. Основним джерелом вхідних даних є аналітично-пошукове та метод експертних оцінок. Хоч експертні оцінки в якійсь мірі є суб'єктивними, але вони дозволяють одразу отримати значення ймовірностей вектора та матриці переходу.

За даними експертних оцінок складемо матрицю переходу. Дослідимо попит на три види конкуруючих виробів x_1, x_2, x_3. В момент часу t_0 було опитано 1000 респондентів. Виявилось, що виріб x_1 купують 500, виріб x_2 – 200, а виріб x_3 – 300 покупців. Позначимо через $p(t_0)$ статистичну ймовірність купівлі виробу x_1 в момент часу t_0, тоді вектор ймовірностей буде мати вид:

$$p(t_0) = (0,5;\ 0,2;\ 0,3).$$

Будемо вважати, що поведінка покупців в кожному наступному місяці обумовлена тільки їх поведінкою в попередньому місяці, тобто має місце ланцюг Маркова. Через місяць виявилось, що з 500 покупців, що купляли виріб x_1, 450 продовжують його купляти, 40 покупців стали купляти виріб x_2 і 10 – виріб x_3. Тоді статистичні імовірності: p_{11}=450/500=0,9; p_{12}= 40/500=0,08; p_{13} = 10/500=0,02.

З 200 покупців, що купляли виріб x_2, 60 чоловік продовжують його купляти, 80 стали купляти виріб x_1, 60 – виріб x_3. Статистичні імовірності: : p_{21}= 80/200 = 0,4; p_{22} = 60/200 = 0,3; p_{23} = 60/200 = 0,3.

З 300 покупців, що купляли виріб x_3, 60 чоловік продовжують його купляти, 210 чоловік стали купляти виріб x_1, 30 чоловік – виріб x_2. Статистичні імовірності: p_{31} = 210/300 = 0,7; p_{32} = 30/300 = 0,1; p_{33} = 60/300 = 0,2.

Побудуємо дерево логічних можливостей, знайдемо ваги гілок та ваги шляхів (рис. 1).

Сформуємо матрицю переходу $\left\| p_{ij} \right\|$ та визначимо, який виріб буде користуватися найбільшим попитом через місяць.

$$p(t) = p(t_0) \cdot \left\| p_{ij} \right\| = (0,5; 0,2; 0,3) \cdot \left| \begin{matrix} 0,9 & 0,08 & 0,02 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,7 & 0,1 & 0,2 \end{matrix} \right| = (0,74; 0,13; 0,13).$$

Отже, через місяць найбільший попит буде мати виріб x_1. Вважаючи, що ланцюг Маркова однорідний по часу, тобто стратегія покупців не зміниться, можна розрахувати, який виріб буде мати найбільший попит через тривалий період часу.

Визначимо вектор граничних ймовірностей як добуток вектора ймовірностей в початковий момент t_0 на матрицю переходу, тобто:

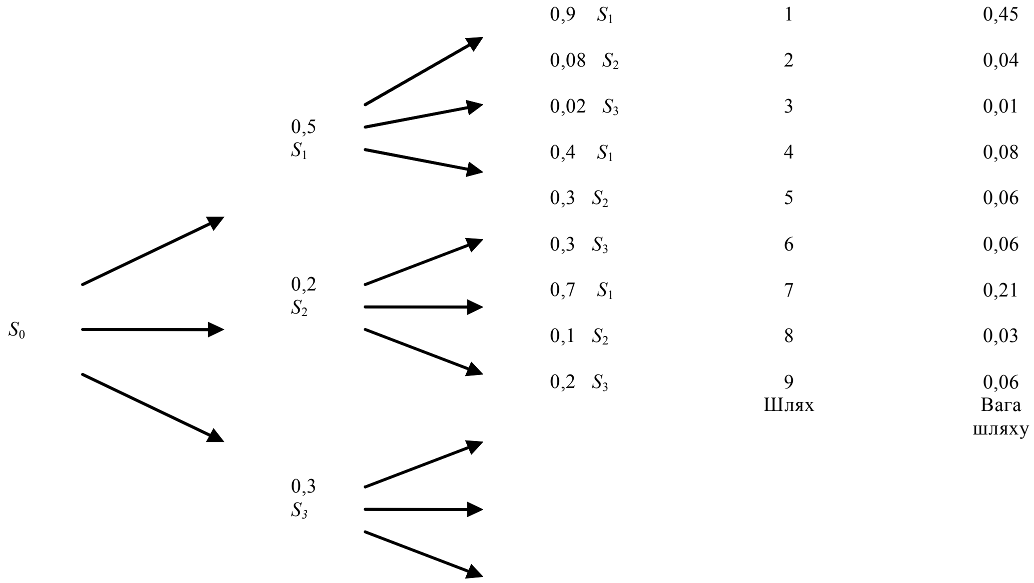

Рис. 1. Дерево логічних можливостей

$$\left(p_1, p_2, \cdots, p_n\right) = \left(p_1, p_2, \cdots, p_n\right) \cdot \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{n1} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Тоді:

$$\begin{cases} p_1 = p_1 p_{11} + p_2 p_{21} + \cdots + p_n p_{n1} \\ p_2 = p_1 p_{12} + p_2 p_{22} + \cdots + p_n p_{n2} \cdot \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_n = p_1 p_{n1} + p_2 p_{2n} + \cdots + p_n p_{nn} \end{cases} \tag{6}$$

Підставимо значення ймовірностей в систему (6). Отримаємо:

$$\begin{cases} p_1 = p_1 \cdot 0{,}9 + p_2 \cdot 0{,}4 + p_3 \cdot 0{,}7 \\ p_2 = p_1 \cdot 0{,}08 + p_2 \cdot 0{,}3 + p_3 \cdot 0{,}1 \\ p_3 = p_1 \cdot 0{,}02 + p_2 \cdot 0{,}3 + p_3 \cdot 0{,}2 \end{cases} \tag{7}$$

Система (7) лінійно залежна. Для її розв'язання третє рівняння замінимо рівнянням

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$

Отримаємо систему :

$$\begin{cases} p_1 = p_1 \cdot 0{,}9 + p_2 \cdot 0{,}4 + p_3 \cdot 0{,}7 \\ p_2 = p_1 \cdot 0{,}08 + p_2 \cdot 0{,}3 + p_3 \cdot 0{,}1 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Рішення системи: p_1 = 0,84; p_2 = 0,10; p_3 = 0,06. Отже, через довгий період часу найбільший попит буде мати виріб x_1.

Знаючи початковий стан системи (вектор ймовірностей $p\left(t_0\right)$) та матрицю переходу $\left\|p_{ij}\right\|$), можна знайти вектори імовірності стану системи $p\left(t_k\right)$ через k кроків : $p\left(t_k\right) = p\left(t_{k-1}\right) \cdot \left\|p_{ij}\right\|$.

В нашому випадку граничні імовірності будуть досягнуті, починаючи з шостого кроку (k=6). Тобто через шість місяців попит на вироби x_1, x_2, x_3 стабілізується, а імовірності купівлі виробів складуть: P_1=0,84; P_2=0,10; P_3=0,06.

	P_1	P_2	P_3
K=1	0,5	0,2	0,3
K=2	0,74	0,13	0,13
K=3	0,809	0,1112	0,0798
K=4	0,82844	0,10606	0,0655
K=5	0,83387	0,104643	0,061487
K=6	0,835381	0,104251	0,060368
K=7	0,835801	0,104143	0,060057
K=8	0,835917	0,104113	0,05997
K=9	0,83595	0,104104	0,059946
K=10	0,835959	0,104102	0,059939

Можлива інша постановка проблеми. Нехай попит на певний товар за даними експертних оцінок може оцінюватись станами: значний, змінний, спадаючий, понижений та відсутність попиту. Якщо у початковий момент попит значний, то імовірності станів попиту складуть: (0,42; 0,15; 0,20; 0,15; 0,08); аналогічно отримаємо імовірності станів попиту при змінному, спадаючому, пониженому попитах та відсутності попиту. За даними опитування експертів сформуємо матрицю переходу:

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} 0{,}42 & 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}08 \\ 0{,}28 & 0{,}25 & 0{,}24 & 0{,}13 & 0{,}10 \\ 0{,}26 & 0{,}18 & 0{,}26 & 0{,}18 & 0{,}12 \\ 0{,}14 & 0{,}16 & 0{,}23 & 0{,}25 & 0{,}22 \\ 0{,}16 & 0{,}11 & 0{,}25 & 0{,}28 & 0{,}20 \end{vmatrix}$$

Будемо вважати, що в початковий момент часу система буде знаходитись в стані S_0 (попит значний). Імовірність стану $p_{(0)} = 1$. Запишемо вектор початкових станів: $p_{(0)} = |1;0;0;0;0|$. Тоді вектор станів через один крок:

$$p_{(1)} = p_{(01)} \cdot \|p_{ij}\| = |1;0;0;0;0| \cdot \begin{vmatrix} 0,42 & 0,15 & 0,2 & 0,15 & 0,08 \\ 0,28 & 0,25 & 0,24 & 0,13 & 0,10 \\ 0,26 & 0,18 & 0,26 & 0,18 & 0,12 \\ 0,14 & 0,16 & 0,23 & 0,25 & 0,22 \\ 0,16 & 0,11 & 0,25 & 0,28 & 0,20 \end{vmatrix} = |0,42;0,15;0,2;0,15;0,08|.$$

Імовірності станів попиту через сім кроків показують, що марковський стохастичний процес стабілізувався уже на п’ятому кроці. Отже, через п'ять кроків ймовірність того, що попит буде значним

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
K=1	0,42	0,15	0,20	0,15	0,08
K=2	0,30	0,17	0,23	0,18	0,12
K=3	0,28	0,17	0,23	0,19	0,13
K=4	0,27	0,17	0,23	0,19	0,13
K=5	0,27	0,17	0,23	0,19	0,14
K=6	0,27	0,17	0,23	0,19	0,14
K=7	0,27	0,17	0,23	0,19	0,14

складає 0,27, змінним – 0,17, спадаючим – 0,23, пониженим – 0,19, відсутність попиту – 0,14. Виразимо імовірності станів попиту в днях року. Значний попит буде тривати 99 днів, змінний попит – 62 дні, спадаючий – 85 днів, понижений – 69 днів, відсутність попиту – 50 днів. Отримана інформація дозволить підприємству розробити певну стратегію стабілізації попиту.

Таким чином, проблема прогнозування актуальна та складна. Для її вирішення останнім часом з'явились нові методи прогнозування (теорія нечітких множин, нейроні мережі та ін.).

Література

1. Економіка України: стратегія і політика довгострокового розвитку / За ред. акад. НАН України В.М. Гейця. – К.: Ін-т економ. прогнозув.; Фенікс, 2003. – 1008 с.
2. Грабовецький Б.Є. Економічне прогнозування й планування: Навч. посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2003. – 188 с.
3. Єріна А.М. Статистичне моделювання та прогнозування: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2001. – 170 с.
4. Четыркин Е.М. Статистические методы прогнозирования. – 2-е изд.., перераб. и доп. – М.: Статистика, 1977. – 200 с.
5. Статистические модели управления и прогнозирования: Учебн. Пособие / Под ред. А.Г. Гранберга. – М.: Финансы и статистика, 1990. – 383 с.
6. Економічне прогнозування: Вступ / К. Холден, Д.А. Піл, Дж.Л. Томсон. – К.: Інформтехніка-ЕМЦ, 1996. – 216 с.
7. Математическая статистика: Учебник / Иванова В.М., Калинина В.Н., Нешумова Л.А. и др. – 2-е изд.,перераб. и доп. – М.: Высш. школа,1981. – 371 с.
8. Завгородня Т.П., Григорук П.М., Григорук С.С. Дослідження операції: Навч. посібник. – Хмельницький, 2009. – 204 с.

Надійшла 17.11.2009