Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Грипинська Надія Василівна

УДК 518.12, 517.51

НЕКЛАСИЧНА ТЕОРІЯ МАЖОРАНТ І ДІАГРАМ НЬЮТОНА ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ ТАБЛИЧНО, ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

01.01.07-обчислювальна математика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів – 2002

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі обчислювальної математики Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник –

доктор фізико-математичних наук, професор
Цегелик Григорій Григорович,
завідувач кафедри математичного моделювання соціально економічних процесів Львівського національного університету імені Івана Франка

Офіційні опоненти-

доктор фізико-математичних наук, професор
Сявавко Мар'ян Степанович,
завідувач кафедри інформаційних технологій
Львівського державного аграрного університету;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Кутнів Мирослав Володимирович,
доцент кафедри прикладної математики національного університету "Львівська політехніка".

Провідна установа:
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, кафедра теоретичної кібернетики

Захист відбудеться "__"________2002 р. о 15.20год. на засіданні спеціалізованої вченої ради К 35.051.07
у Львівському національному університеті імені Івана Франка
за адресою: 79000, м.Львів, вул.Університетська,1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: м.Львів, вул.Драгоманова, 5.

Автореферат розісланий "___"__________ 2002 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради ________________Бокало М.М.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Теорію мажорант і діаграм Ньютона, розроблену для степеневих рядів функцій однієї комплексної змінної, широко використовували в своїх дослідженнях Пюізо, Дюма, Адамар, Валірон, О. Островський і інші математики. Дальший розвиток цієї теорії в основному належить О. Костовському та його учням Г. Цегелику, А. Кардашу, І. Чулику. Ними теорія мажорант і діаграм Ньютона перенесена на ряди Лорана і Діріхле, узагальнені степеневі ряди, на степеневі ряди, ряди Лорана і Діріхле функцій двох комплексних змінних. Як застосування, для степеневих рядів, узагальнених степеневих рядів і рядів Діріхле виведені формули для визначення нижніх меж їх нулів; для степеневих рядів, узагальнених степеневих рядів, рядів Лорана і Діріхле встановлені достатні умови існування «максимальних» областей (у вигляді кілець або смуг), в яких ці ряди не приймають нульових значень; для степеневих рядів і рядів Діріхле функцій двох комплексних змінних за допомогою апарату мажорант і діаграм Ньютона виведені рівняння меж їх абсолютної збіжності на діаграмі Рейнхарта, побудовані наближені методи відшукання цих меж, встановлені достатні умови існування «максимальних» областей (у вигляді бікілець або бісмуг), в яких ці ряди не приймають нульових значень. Використовуючи апарат мажорант і діаграм Ньютона степеневих рядів і рядів Діріхле, теорію максимального члена цих рядів, цілий ряд математиків (Дж.Клуні, У.Хейман, П.Розенблум, Т.Кеварі, А.Макінтайр, Л.Сонс, Й.В.Островський, А.А.Гольберг, М.М.Шеремета, О.Б.Скасків, Ш.Стреліц, В.Фукс, П.Ердеш, Ф.Гече та інші) розв'язали низку важливих проблем у теорії функцій.

Ідея класичного підходу до побудови теорії мажорант і діаграм Ньютона степеневих рядів в 1985 р. була використана Г.Г. Цегеликом для розробки апарату так званих некласичних мажорант і діаграм Ньютона (термін введений ним) нескінченних числових послідовностей. Як застосування цього апарату, побудовано клас наближених методів пошуку інформації в файлах баз даних, що використовують характеристики діаграми Ньютона послідовності значень пошукового ключа, яким характеризуються записи файла. Пізніше апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона було узагальнено на функції дійсних змінних, заданих на опуклих множинах евклідового простору, на самі множини цього простору, на числові ряди, а також на функції однієї дійсної змінної, задані таблично. При цьому виявилось, що побудований математичний апарат можна широко використати для розробки нових ефективних чисельних методів розв'язування деяких класів задач алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь тощо. Тому тема дисертаційного дослідження актуальна з двох причин: по-перше, подальшого розвитку набуває сама теорія мажорант і діаграм Ньютона; по-друге, використовуючи апарат мажорант і діаграм Ньютона, будуються нові ефективні чисельні методи розв’язування деяких класів задач алгебри, математичного аналізу та диференціальних рівнянь.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження по темі дисертації входять в тематику наукової роботи кафедри обчислювальної математики Львівського національного університету імені Івана Франка і виконувались в рамках таких держбюджетних тем: «Розробка нових підходів та відповідного програмного забезпечення для чисельного розв’язування граничних задач для диференціальних рівнянь та рівнянь математичної фізики з використанням апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона, методу інтегральних рівнянь та алгоритмів розпаралелювання» (шифр теми Пв-781 Б, номер держреєстрації 0196V017393, 1996-1998 рр.); «Розробка нових підходів та методів чисельного розв’язування задач математичного аналізу, алгебри, диференціальних рівнянь та рівнянь математичної фізики» (шифр теми Пм-56 Б, номер держреєстрації 0100U001425, 2000-2002 рр.).

Мета і задачі дослідження.

Метою дослідження є дальший розвиток теорії некласичних мажорант і діаграм Ньютона та її використання для побудови нових чисельних методів розв’язування деяких класів задач алгебри, математичного аналізу та диференціальних рівнянь.

Задачами дослідження є:

– подальша розробка апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично, і його використання для: апроксимації функцій; побудови чисельного методу відшукання екстремуму негладких і розривних функцій, заданих на проміжку; виведення формули мажорантного типу для наближеного обчислення визначених інтегралів; побудови чисельних методів розв’язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку; побудови чисельного методу розв’язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь;

– розробка апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично, і його використання для побудови формули мажорантного типу для наближеного обчислення подвійних інтегралів.

Об‘єктом дослідження є апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, і його використання для побудови нових чисельних методів розв’язування задач алгебри, математичного аналізу та диференціальних рівнянь.

Предметом дослідження є розробка нових чисельних методів для обчислення визначених інтегралів, пошуку екстремуму негладких і розривних функцій, розв’язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

Методи дослідження. Для розв'язування сформульованих вище задач застосовуються методи математичного аналізу, теорія чисельних методів, теорія диференціальних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. Всі результати, одержані в дисертаційній роботі, є новими.

В роботі вперше:

– подальшого розвитку набула теорія некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично;

– встановлені теореми про рівномірне наближення функцій за допомогою некласичних мажорант Ньютона в залежності від гладкості функцій;

– побудований чисельний метод відшукання екстремуму негладких і розривних функцій;

– виведені формули мажорантного типу для наближеного обчислення однократних і подвійних визначених інтегралів, знайдена оцінка залишкового члена в залежності від гладкості підінтегральної функції;

– побудовані чисельні методи (інтерполяційний і екстраполяційний) розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, доведена їх збіжність і досліджена обчислювальна стійкість; проведено обгрунтування інтерполяційного методу, встановлена його точність та мажорантна властивість;

– побудований чисельний метод розв'язування задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь, проведено його обгрунтування, встановлена точність і мажорантна властивість.

Практичне значення одержаних результатів. Одержані в дисертаційній роботі результати мають важливе практичне значення. Побудовані чисельні методи можуть успішно бути використані для: наближеного обчислення однократних та подвійних визначених інтегралів; пошуку екстремуму негладких і розривних функцій; апроксимації функцій, заданих аналітично або таблично; розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку та систем звичайних диференціальних рівнянь.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. Науковому керівнику, який є співавтором публікацій, належить постановка задач і перевірка правильності результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційних досліджень доповідались на: семінарах кафедри обчислювальної математики Львівського національного університету імені Івана Франка; семінарах кафедри обчислювальної математики та кафедри математичного аналізу Київського національного університету імені Тараса Шевченка; Всеукраїнських наукових конференціях «Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях» (Львів, 1994;

Львів, 1996; Львів, 1997; Львів, 1999); Міжнародній науковій конференції «Теорія апроксимацій та чисельні методи» (Рівне, 1996); Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 2000; Львів, 2001); Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математики» (Чернівці, 1998); Міжнародній конференції з управління «Автоматика-2000» (Львів, 2000); Всеукраїнській науковій конференції «Нелінійні проблеми аналізу» (Івано-Франківськ, 2000); Міжнародній науковій конференції «Моделювання та оптимізація складних систем» (Київ, 2001); Українському математичному конгресі – 2001 (Київ, 2001); Міжнародній конференції «Функціональні методи в теорії наближень, теорії операторів, стохастичному аналізі і статистиці» (Київ, 2001).

Публікації. По темі дисертації опубліковано 21 наукових праць. З них 13 статей, 8 тез доповідей. Публікацій у фахових виданнях, що входять в перелік ВАК України, – 10.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається із вступу, трьох розділів, висновків і списку використаних джерел. Загальний обсяг – 140 сторінок, список використаних джерел включає 76 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність роботи, сформульовано мету, визначено основні задачі, показано наукову новизну і практичну цінність отриманих результатів.

У першому розділі спочатку розглядається побудова апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично (підрозділи 1.1-1.4). Використовуючи цей апарат, виведені основні співвідношення, які зв'язують коефіцієнти мажоранти Ньютона, числові нахили та відхилення; побудовано алгоритми відшукання на ЕОМ максимального за модулем значення функції, заданої таблично; виведені формули для наближення функції мажорантою Ньютона зовні заданого проміжка і для наближення функції мажорантою Ньютона на проміжку у випадку, коли значення функції в одному з кінців проміжка дорівнює нулю.

У другому розділі, використовуючи апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, встановлено теореми про рівномірне наближення функцій за допомогою некласичних мажорант Ньютона в залежності від гладкості функції (підрозділ 2.1); побудовано чисельний метод відшукання екстремуму негладких і розривних функцій, заданих на проміжку (підрозділі 2.2).

У підрозділі 2.3 побудовано формулу мажорантного типу для наближеного обчислення визначених інтегралів, знайдена оцінка залишкового члена в залежності від гладкості підінтегральної функції, а також визначений клас функцій, на якому мажорантна квадратурна формула є точною.

Якщо проміжок інтегрування $[a, b]$ розбити на n однакових частин довжиною $h = \dfrac{b-a}{n}$ точками $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, ..., n$), де $x_0 = a$, $x_n = b$, то складена формула мажорантного типу для наближеного обчислення визначених інтегралів має вигляд

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = h \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\ln\left(f(x_{i+1}) / f(x_i)\right)} + R_n(f).$$

Якщо функція $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ задовольняє умову Ліпшиця з сталою L і на кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1}]$є монотонною, то залишковий член

$$|\, R_n(f) \,| \le L \frac{(b-a)^2}{n}.$$

Формула мажорантного типу найбільш точна у випадку, коли підінтегральна функція є опуклою. Якщо підінтегральна функція є логарифмічно опуклою, то шукане значення інтеграла наближається зверху. Формула мажорантного типу в цьому випадку має другий порядок точності і дає кращі результати, ніж формула трапецій.

У підрозділі 2.4 апарат некласичних мажорант Ньютона використано для побудови чисельних методів розв'язування задачі Коші для звичайного диференціального рівняння

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

Розв'язок цієї задачі шукається на деякому проміжку $[x_0, x_0 + a]$, де $a > 0$. При цьому припускається, що в області G, яка містить прямокутник $R = \left\{ x_0 \le x \le x_0 + a,\ |\, y - y_0 | \le b \right\}$, функція $f(x, y)$ є неперервною і задовольняє умову Ліпшиця по y з сталою L. На проміжку $[x_0, x_0 + a]$ вибирається система точок $x_0, x_1, ..., x_n$, де $x_k = x_0 + kh$ ($k = 0, 1, ..., n$), $h > 0$, $x_n \le x_0 + a$, і, використовуючи апарат мажорант Ньютона, будується два чисельні методи (інтерполяційний та екстраполяційний) відшукання наближених значень $y_1, y_2, ..., y_n$ точного розв'язку $y = y(x)$ в точках $x_1, x_2, ..., x_n$.

Нехай $y = y(x)$ – шуканий розв'язок задачі (1). Підставимо його в рівняння, одержимо тотожність

$$y'(x) \equiv f\big(x, y(x)\big).$$

Проінтегруємо цю тотожність на кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, ..., n-1$). Дістанемо

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\big(x, y(x)\big)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $f\big(x, y(x)\big) > 0$ для всіх $x \in [x_0, x_0 + a]$. Якщо тепер підінтегральну функцію $f\big(x, y(x)\big)$ замінити некласичною мажорантою Ньютона, побудованою за двома точками $\big(\, x_i,\ f\big(x_i, y(x_i)\big)\,\big)$ і $\big(\, x_{i+1},\ f\big(x_{i+1}, y(x_{i+1})\big)\,\big)$, і обчислити інтеграл, то для знаходження наближених значень $y_1, y_2, ..., y_n$ точного розв'язку $y = y(x)$ одержуємо формулу

$$y_{i+1} = y_i + h\,\frac{f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)}{\ln\big(f(x_{i+1}, y_{i+1}) / f(x_i, y_i)\,\big)} \quad (i = 0, 1, ..., n-1), \tag{3}$$

де $y_0 = y(x_0)$. Формула (3) становить інтерполяційний метод для чисельного розв'язування задачі (1). Достатня умова збіжності цього методу виражається наступною теоремою.

Теорема 2.5. Якщо в області G, яка містить прямокутник $R = \big\{\, x_0 \le x \le x_0 + a,\ |\, y - y_0| \le b \,\big\}$, функція $f(x, y)$ неперервна, задовольняє умову Ліпшиця за y зі сталою L і

$$\left| \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\, f \right| \le N_1 < \infty$$

де N_1 – деяка стала, то наближені значення $y_1, y_2, ..., y_n$, знайдені за формулою (3), при $h \to 0$ рівномірно відносно x збігаються до точного розв'язку $y = y(x)$ задачі (1).

Для похибки наближеного значення розв'язку $y = y(x)$ задачі (1) в точці $x = x_n$ виконується нерівність

$$|\,\varepsilon_n| \le \frac{1}{L}\left(\frac{1}{2}Nh + \delta(h)\right)\cdot\left(\mathrm{e}^{aL} - 1\right),$$

де $\delta(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Нами доведена обчислювальна стійкість методу. Встановлено також, що якщо функція $f(x, y)$ в області

$$\overline{\Omega} = \left\{ (x,y) : x \in [x_0, T]\,,\ |\,y\,| \le |\,y_0| + NT \right\}$$

задовольняє умови

$$\begin{aligned} &1 \le f(x,y) < N \\ &|\,f(x,y) - f(x,\bar{y})| \le L|y - \bar{y}|, \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}, \end{aligned} \tag{4}$$

і крок сітки h такий, що виконується умова

$$q_1 = q_1(h) = \frac{hL(N-1)}{\ln N} < 1, \tag{5}$$

то для кожного $i = 0, 1, \ldots, n-1$ рівняння (3) має єдиний розв'язок y_{i+1}, який задовольняє нерівність

$$|\,y_{i+1}| \le |\,y_0| + Nh(i+1)$$

і може бути знайдений методом послідовних наближень. Точність методу і його мажорантна властивість виражені в наступній теоремі.

Теорема 2.9. Якщо виконуються умови (4),(5) і для всіх $(x, y) \in \overline{\Omega}$ нерівності

$$f(x,y)f''(x,y) - \left(f'(x,y)\right)^2 > 0,$$

$$|\,f_x'(x,y)| \le M\,,$$

то метод (3) має перший порядок точності і мажорує на сітці точний розв'язок задачі (1) зверху.

Встановлено, що якщо виконуються умови теореми 2.9 і $f(x,y) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, то метод (3) має другий порядок точності.

Оскільки формула (3) є фактично рівнянням для знаходження y_{i+1}, то для обчислення y_{i+1} пропонується використовувати ітераційний процес

$$y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + h\,\frac{f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}) - f(x_i, y_i)}{\ln\left(f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}) / f(x_i, y_i)\right)} \quad (k = 0, 1, \ldots\ ),$$

де $y_{i+1}^{(0)}$ – вибране нульове наближення. Цей ітераційний процес збігається, якщо виконується умова $hL < 1$.

Некласична мажоранта Ньютона складається із опуклих дуг, тому побудований чисельний метод найбільш ефективний в тому випадку, коли функція, що замінюється некласичною мажорантою Ньютона, є опуклою. В цьому випадку побудований чисельний метод є кращим, ніж відомі двоточкові методи, і конкурує з багатоточковими методами. Крім того, якщо функція, що апроксимується некласичною мажорантою Ньютона, має вигляд $f(x) = a\exp\,(bx + c)$, то побудований чисельний метод є точним.

Якщо в (2) підінтегральну функцію $f\big(x, y(x)\big)$ замінити некласичною мажорантою Ньютона, побудованою за двома точками $\big(x_{i-1}, f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))\big)$ і $(x_i, f(x_i, y(x_i)))$, і обчислити інтеграл, то одержимо формулу

$$y_{i+1} = y_i + h\,\frac{f(x_i, y_i)}{f(x_{i-1}, y_{i-1})} \cdot \frac{f(x_{i-1}, y_{i-1}) - f(x_i, y_i)}{\ln\left(f(x_{i-1}, y_{i-1}) / f(x_i, y_i)\right)},$$

де $i = 0, 1, \ldots, n-1$, яка виражає екстраполяційний метод для чисельного розв’язування задачі (1).

В підрозділі 2.5, використовуючи аппарат некласичних мажорант Ньютона, побудовано інтерполяційний метод чисельного розв’язування задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n)\,, \qquad y_i(x_0) = y_{i,0}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{6}$$

Цей метод виражається формулою

$$y_{i,k+1} = y_{i,k} + h_{k+1}\,\frac{f\big(x_{k+1}, y_{1,k+1}, \ldots, y_{n,k+1}\big) - f\big(x_k, y_{1,k}, \ldots, y_{n,k}\big)}{\ln\Big(f\big(x_{k+1}, y_{1,k+1}, \ldots, y_{n,k+1}\big) / f\big(x_k, y_{1,k}, \ldots, y_{n,k}\big)\Big)} \tag{7}$$

де $i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 0, 1, \ldots, N$; $y_{i,k}$ – наближене значення точного розв’язку $y_i(x)$ задачі (6), обчисленого у вузлі x_k сітки

$$\overline{\hat{\omega}} = \left\{\; x_i : i = \overline{0, N},\; x_i - x_{i-1} = h_i > 0,\; \sum_{i=1}^{N} h_i = \delta \right\};$$

$\left[x_0, x_0+\delta\right]$- проміжок, для якого виконуються умови теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Показано, що при виконанні певних умов нелінійна система (7) має єдиний розв'язок при будь-якому k $(0 \le k < N)$ і цей розв'язок може бути отриманий методом послідовних наближень

$$y_{i,k+1}^{(m+1)} = y_{i,k} + h_{k+1}\frac{f\left(x_{k+1}, y_{1,k+1}^{(m)}, \ldots, y_{n,k+1}^{(m)}\right) - f\left(x_k, y_{1,k}, \ldots, y_{n,k}\right)}{\ln\left(f\left(x_{k+1}, y_{1,k+1}^{(m)}, \ldots, y_{n,k+1}^{(m)}\right) / f\left(x_k, y_{1,k}, \ldots, y_{n,k}\right)\right)},$$

де $i = 1, 2, ..., n$, $m = 0, 1, ...$; $y_{i,k+1}^{(0)} = y_{i,k}$ ($i = 1, 2, ..., n$).

Розглянуто питання стійкості методу і швидкості збіжності. Показано, що метод є А-стійким і при виконанні певних умов має другий порядок точності. Встановлені достатні умови, при виконні яких розв'язок системи (7) мажорує зверху на сітці розв'язок задачі (6). Якщо розв'язок системи (6) має вигляд

$$y_i(x) = a_i + b_i \exp(c_i x + d_i) \ \ (i = 1,2,...,n),$$

то метод є точним.

В розділі 3 побудовано апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично. Вивчено властивості мажоранти і діаграми Ньютона, встановлено необхідні і достатні умови існування діаграми Ньютона, виведено рівняння мажоранти Ньютона, визначеної на трикутнику, через значення функції у вершинах трикутника.

Нехай (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) - координати вершин трикутника Δ в площині xy, а значення функції $f(x, y)$ в цих точках відповідно такі: $f(a_1, b_1) = A$, $f(a_2, b_2) = B$, $f(a_3, b_3) = C$. Введемо позначення

$$h_{ij}(x, y) = \begin{vmatrix} x - a_i & y - b_i \\ a_j - a_i & b_j - b_i \end{vmatrix},$$

де $i, j = 1, 2, 3$; $i \ne j$.

Теорема 3.5. Якщо $|A| \ne |B|$, $|A| \ne |C|$, то мажоранта Ньютона $\mathrm{M}_f(x, y)$ функції $z = f(x, y)$, заданої своїми значеннями в вершинах трикутника Δ, визначається за формулою

$$\mathrm{M}_f(x, y) = \left(|A|^{h_{32}(x,y)} |B|^{h_{13}(x,y)} |C|^{h_{21}(x,y)}\right)^{\frac{1}{h_{13}(a_2, b_2)}}$$

Наслідок 3.1. Якщо $|A| = |B|$, то

$$\mathrm{M}_f(x,y)=|A|\cdot\left|\frac{A}{C}\right|^{\frac{h_{12}(x,y)}{h_{13}(a_2,b_2)}};$$

якщо $|A|=|C|$, то

$$\mathrm{M}_f(x,y)=|A|\cdot\left|\frac{B}{A}\right|^{\frac{h_{13}(x,y)}{h_{13}(a_2,b_2)}};$$

якщо ж $|A|=|B|=|C|$, то

$$\mathrm{M}_f(x,y)=|A|.$$

Розглянуто питання точності наближення функцій від двох змінних некласичними мажорантами Ньютона. Нехай область, в якій треба наблизити функцію $f(x,y)$, є прямокутник $\overline{D}=\{(x,y): a\le x\le b, c\le y\le d\}$. Розіб'ємо цю область прямими $x=x_i$, $i=\overline{1,N_1-1}$, $y=y_j$, $j=\overline{1,N_2-1}$, на прямокутнички, де $h_{1i}=x_i-x_{i-1}>0$, $i=\overline{1,N_1}$, $\sum_{i=1}^{N_1}h_{1i}=b-a$;

$h_{2j}=y_j-y_{j-1}>0$, $j=\overline{1,N_2}$, $\sum_{j=1}^{N_2}h_{2j}=d-c$. Кожний прямокутничок розіб'ємо на два трикутнички, на кожному з яких наближемо функцію $f(x,y)$ некласичною мажорантою Ньютона. Припустимо, що виконуються умови

$$1\le f(x,y)\le M,\quad \forall(x,y)\in\overline{D}, \tag{8}$$

$$|f(\bar{x},\bar{y})-f(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}})|\le L\left(|\bar{x}-\bar{\bar{x}}|+|\bar{y}-\bar{\bar{y}}|\right),\ \forall(\bar{x},\bar{y}),(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}})\in\overline{D}.$$

Теорема 3.6. Нехай виконуються умови (8), тоді точність наближення $\mathrm{M}_f(x,y)$ до функції $f(x,y)$ визначається нерівністю

$$\left\|f(x,y)-\mathrm{M}_f(x,y)\right\|_{C(\overline{D})}\le L(2+M+M^2)|h|,$$

де $|h|=\max\left\{\max\limits_{1\le i\le N_1}h_{1i},\ \max\limits_{1\le j\le N_2}h_{2j}\right\}$.

Властивості мажоранти Ньютона виражаються в наступних лемах.

Лема 3.1. Якщо $f(x,y)\equiv k_0\exp(k_1x+k_2y)$, де k_i, $i=\overline{0,2}$ – довільні сталі, то має місце тотожність $f(x,y)\equiv\mathrm{M}_f(x,y)$,

Лема 3.2. Функція $\mathrm{M}_f(x,y) \in C(\overline{D})$.

Лема 3.3. Нехай функція $f(x,y)$ має наступні властивості:

1) $f(x,y)$ при кожному фіксованому y є логарифмічно опуклою по x і при кожному фіксованому x є незростаючою по y;

2) $f(x,y)$ при кожному фіксованому x є логарифмічно опуклою по y і при кожному фіксованому y є незростаючою по x.

Тоді буде мати місце властивість мажорантності

$$f(x,y) \le \mathrm{M}_f(x,y), \quad \forall (x,y) \in \overline{D}.$$

Як застосування побудованого апарату мажорант і діаграм Ньютона, виведена формула для наближеного обчислення подвійних інтегралів.

Припустимо, що треба обчислити інтеграл

$$J = \iint\limits_D f(x\ y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

де $D = \{\, a \le x \le b,\ c \le y \le d \,\}$ і $f(x, y) > 0$ для всіх $(x, y) \in D$.

Якщо область D розбити на прямокутники

$$D_{ij} = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x_i \le x \le x_{i+1},\ \ y_j \le y \le y_{j+1} \right\},$$

де $x_i = a + ih_1$ $(i = 0, 1, ..., n)$, $y_j = c + jh_2$ $(j = 0, 1, ..., m)$, $h_1 = \dfrac{b-a}{n}$, $h_2 = \dfrac{d-c}{m}$, і позначити $f(x_i, y_j) = A_{ij}$ $(i = 0, 1, ..., n;$ $j = 0, 1, ..., m)$, то складена формула мажорантного типу для наближеного обчислення подвійного інтеграла має вигляд

$$\iint\limits_D f(x\ y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx h_1 h_2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{1}{\ln A_{ij} - \ln A_{i,\,j+1}} \times \right.$$
$$\times \left(\frac{A_{ij} - A_{i+1,\,j}}{\ln A_{ij} - \ln A_{i+1,\,j}} - \frac{A_{i,\,j+1} - A_{i+1,\,j}}{\ln A_{i,\,j+1} - \ln A_{i+1,\,j}} \right) +$$
$$+ \frac{1}{\ln A_{i+1,\,j+1} - \ln A_{i+1,\,j}} \left(\frac{A_{i,\,j+1} - A_{i+1,\,j+1}}{\ln A_{i,\,j+1} - \ln A_{i+1,\,j+1}} - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{A_{i,\,j+1} - A_{i+1,\,j}}{\ln A_{i,\,j+1} - \ln A_{i+1,\,j}} \right) \right).$$

Точність складеної формули мажорантного типу виражена в наступній теоремі.

Теорема 3.7. Нехай виконані умови теореми 3.6, тоді буде мати місце оцінка

$$\left| \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x - \iint\limits_D \mathrm{M}_f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}(1+2M)L\,|\,h\,|\,h_{1i}h_{2j} = (2+M+M^2)L(b-a)\,(d-c)\,|\,h\,|\,.$$

Якщо, крім того, будуть виконані умови леми 3.3, то буде мати місце нерівність

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \le \iint\limits_D \mathrm{M}_f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі подальшого розвитку набула теорія некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично. За допомогою апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона побудовано чисельний метод відшукання екстремуму негладких і розривних функцій, чисельні методи мажорантного типу (інтерполяційний і екстраполяційний) розв’язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, чисельний метод інтерполяційний типу розв’язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, виведені формули мажорантного типу для наближеного обчислення однократних і подвійних визначених інтегралів, встановлені теореми про рівномірне наближення функцій за допомогою некласичних мажорант Ньютона. Доведена збіжність та обчислювальна стійкість побудованих чисельних методів. Для інтерполяційного методу розв’язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь і задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь встановлена точність методу та його мажорантна властивість у випадку, коли праві частини диференціальних рівнянь є логарифмічно опуклими функціями. Оскільки некласична мажоранта Ньютона складається із опуклих дуг, то побудовані чисельні методи найбільш ефективні в тому випадку, коли функція, що замінюється некласичною мажорантою Ньютона, є опуклою. В цьому випадку побудовані чисельні методи є кращими, ніж відомі двоточкові методи, і конкурують з багатоточковими методами. Крім того, якщо функція, що апроксимується некласичною мажорантою Ньютона, має вигляд $f(x) = a\exp\ (bx + c)$, то побудовані чисельні методи є точними.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В.(Грипинська) Використання некласичного апарату мажорант і діаграм Ньютона функцій для побудови нової квадратурної формули // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. 41. 1995. С. 108-111.
2. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В.(Грипинська) Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. 50. 1998. С. 209-211.
3.Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В.(Грипинська) До побудови апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона для функцій двох дійсних змінних, заданих таблично // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. 52. 1999. С. 116-121.
4. Федчишин Н.В. (Грипинська) Нова квадратурна формула мажорантного типу для обчислення подвійних інтегралів // Вісн. технолог. ун-ту Поділля. 1999. № 2. С. 121-123.
5. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. (Грипинська) Використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона для побудови чисельних методів розв’язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 1999. Вип. 1. С. 250-254.
6. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. (Грипинська) Про збіжність інтерполяційного методу мажорантного типу розв’язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2000. Вип. 2. С. 77-81.
7. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. (Грипинська) Про обчислювальну стійкість інтерполяційного методу мажорантного типу розв’язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь // Вісник НУ «Львівська політехніка» «Прикладна математика». 2000. № 411. С. 337-340.
8. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. (Грипинська) Використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично для апроксимації функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. 2001. № 6. С. 32-37.
9. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. (Грипинська) Нова формула мажорантного типу для наближеного обчислення подвійних інтегралів // Волинський матем. вісник. 2000. Вип. 7. С. 159-164.
10. Федчишин Н.В. (Грипинська), Цегелик Г.Г. Чисельний метод відшукання екстремуму негладких і розривних функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2000. Вип. 3. С. 65-68.
11. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. (Грипинська) Інтерполяційний метод мажорантного типу розв’язування задачі Коші для звичайних диференціальних

рівнянь // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. 2002. №2. С.37-43.
12. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. (Грипинська) Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій дійсної змінної, заданих таблично, та його використання // Матер. міжнарод. наук. конф. «Сучасні проблеми математики». Чернівці, 1998. Ч. 3. С. 189-192.
13. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. (Грипинська) Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його застосування // Праці Міжнарод. конф. з управління «Автоматика-2000», Львів, 2000. Т. 7. С. 284-289.
14. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. (Грипинська) Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично і його застосування // Тези доп. Всеукр. наук. конф. «Застосування обслювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях». Львів, 1994. С. 87.
15. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. (Грипинська) Теорія некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та її застосування // Тези доп. міжнарод. конф. «Теорія апроксимацій та чисельні методи». Рівне, 1996. С. 86.
16. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. (Грипинська) Використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій для розв’язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь // Тези доп. Всеукр. наук. конф. «Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях». Львів, 1997. С. 26.
17. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. (Грипинська) Нова формула мажорантного типу для наближеного обчислення подвійних інтегралів // Тези доп. шостої Всеукр. наук. конф. «Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях». Львів, 1999. С. 94-95.
18. Федчишин Н.В. (Грипинська), Цегелик Г.Г. Чисельний метод відшукання екстремуму негладких і розривних функцій // Тези доп. сьомої Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». Львів, 2000. С. 84-85.
19. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. (Грипинська) Використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона для побудови чисельних методів відшукання екстремуму негладких і розривних функцій // Тези доп. міжнарод. конф. «Моделювання та оптимізація складних систем», Київ, 2001. Т. 2. С. 52-53.
20. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. (Грипинська), Підківка Л.І. Методи мажорантного типу чисельного розв’язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь // Український математичний конгрес – 2001. Тези доп. міжнарод. конф. м. Чернівці. С. 163-164.

21. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. (Грипинська) До наближення функцій за допомогою апарату некласичних мажорант Ньютона // Тези доп. міжнарод. конф. «Функціональні методи в теорії наближень, теорії операторів, стохастичному аналізі і статистиці», м. Київ. 2001. С. 16-17.

АНОТАЦІЯ

Грипинська Н.В. ***Некласична теорія мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та її застосування*.-** Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 – обчислювальна математика. – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2002.

У дисертаційній роботі подальшого розвитку набула теорія некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, яка використана для апроксимації функцій, побудови чисельного методу відшукання екстремуму негладких і розривних функцій, заданих на проміжку, виведення нових формул наближеного обчислення визначених інтегралів, побудови нових чисельних методів розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь і систем звичайних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: мажоранти і діаграми Ньютона функцій, чисельні методи, апроксимація функцій, визначені інтеграли, негладкі і розривні функції, задача Коші для диференціальних рівнянь.

АННОТАЦИЯ

Грипинская Н.В. ***Неклассическая теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение*.-** Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07- вычислительная математика.- Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2002.

Диссертационная работа посвящена дальшему развитию аппарата неклассических мажорант и диаграмм Ньютона функций и его использование для аппроксимации функций, построения численного метода поиска экстремума негладких и разрывных функций, новых формул приближенного вычисления определенных интегралов, новых численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

Диссертация состоит из введения, трех разделов, разбитых на подразделы, выводов и списка использованых источников. Объем диссертации 140 страниц. Список используемых источников 76 наименований.

Во введении доно обоснование актуальности темы, указываются цель и задачи исследования, научная новизна, практическое значение и аппробация полученных результатов, количество публикаций.

В первом разделе рассматривается построение аппарата неклассических мажорант и диаграмм Ньютона функций одной действительной переменной, заданных таблично, изучаются свойства мажоранты и диаграммы Ньютона, выведены основные соотношения, связывающие коэффициенты мажоранты Ньютона, числовые наклоны и отклонения, строится алгоритм поиска на ЭВМ максимального за модулем значения функции, заданной таблично.

Во втором разделе установлены теоремы о равномерном приближении функции с помощью неклассических мажорант Ньютона, построен численный метод поиска экстремума негладких и разрывных функций, выведены новые формулы мажорантного типа для приближенного вычисления определенных интегралов, построены новые численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений. Рассмотрены вопросы сходимости, вычислительной устойчивости и точности численных методов. Определены классы функций, для которых методы дают наиболее точные результаты и для которых являются точными.

В третьем разделе построен аппарат неклассических мажорант и диаграмм Ньютона функций двух действительных переменных, заданных таблично, установлены свойства мажоранты и диаграммы Ньютона, выведено уравнение мажоранты Ньютона, определенной на треугольнике, через значения функции в вершинах треугольника. Как приложение, построено формулу мажорантного типа для приближенного вычисления кратных интегралов.

Ключевые слова: можаранты и даграммы Ньютона функций, численные методы, апроксимация функций, определенные интегралы, негладкие и разрывные функции, задача Коши для дифференциальных уравнений.

ABSTRACT

Grypyns`ka N.V.** ***The Non – Classical theory of Newtonian Majorants and Diagrams functions given tabularly and it`s application.* – Manuscript.

The thesis applying for the scientific degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences on the speciality 01.01.07-Computational Mathematics. –Ivan Franco National University of Lviv, Lviv,2002

In the thesis the theory of Non – Classical Newtonian Majorants and Diagrams of functions given tabularly has been used for the uniform approximation of continuous functions, for the construction of a new formula of the approximate calculation of definite integrals, for the construction of numerical methods of solving the Cauchy problem for ordinary differential equations, for construction of numerical methods for optimization discontinuous functions.

Key words: Newtonian Majorants and Diagrams functions, Numerical methods, Cauchy problem for differential equations, definite integrals, approximation functions, optimization discontinuous functions.

Підписано до друку __________ 2002 р. Формат 60 x 90/ 16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк.___   Тираж 100. Зам.№______
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка. 79000 Львів, вул.Дорошенка, 41