

ЧИСЛОВИЙ РОЗВ'ЯЗОК КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ТІЛ ІЗ ЦИЛІНДРИЧНИМ ШТАМПОМ

Ярецька Наталія

к. ф.-м. н., доцент

Хмельницький національний університет,
yaretskano@khmnu.edu.ua

Рамський Андрій

к. ф.-м. н., доцент

Хмельницький національний університет,
ramsky@ukr.net

Вступ. Велика увага у механіці суцільних середовищ приділяється дослідженню контактної взаємодії твердих деформованих тіл, що пов'язане із проблемою визначення їх напружено-деформованих станів. Аналіз результатів цих досліджень дозволяє сформулювати умови на межі поверхонь контактуючих деформованих тіл, що відповідають дійсності. Праці з контактної взаємодії пружних штампів із півпростором або шаром навіть у лінійній теорії пружності досить мало. Це пояснюється тим, що їх дослідження зводяться до одних із найважчих рівнянь математичної фізики, розв'язок яких пов'язаний із великими математичними труднощами. Тому дана робота присвячена застосуванню числових методів та ІТ в механіці деформованого твердого тіла, що дозволяє полегшити дослідження проблеми передачі навантаження пов'язаної із врахуванням початкових напружень у тілах на закон розподілу тиску в місцях їх контакту, а розрахунок важливих елементів конструкцій дозволить більш ефективно враховувати міцність матеріалів шляхом її правильної оцінки, зберігаючи у цілому необхідну функціональність.

Перші роботи з контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями присвячені взаємодії попередньо напружених тіл із жорсткими та пружними штампами без початкових напружень [1]. Причому розглядаються або пружні потенціали конкретної структури, або задача ставиться в загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл з потенціалом довільної структури на основі лінеаризованої теорії пружності. Роботи монографічного характеру представлені працями [2, 3]. Існує також ряд інших публікацій, що повністю або частково пов'язані із тематикою даної статті [4 – 7].

Метою роботи є: 1) Розв'язок осесиметричної статичної задачі про тиск пружного циліндричного штамп з початковими напруженнями на пружний шар з початковими напруженнями без врахування сил тертя в межах лінеаризованої теорії пружності у випадку рівних та нерівних коренів визначального рівняння [1, 2] в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу; 2) врахування залишкових напружень під час контактної взаємодії пружних циліндра та шару на закон розподілу тиску в місцях їх дотику за допомогою числових методів та ІТ, що дозволить більш ефективно враховувати зносостійкість матеріалів шляхом правильної оцінки запасів міцності та достатньо знижувати їх матеріалоємність, зберігаючи у цілому потрібні функціональні характеристики; 3) представлення алгоритму та комп'ютерної програми, що принципово спрощуватиме процес отримання числових і графічних результатів досліджень.

Постановка задачі. Нехай пружний циліндричний штамп радіуса R і висотою H з початковими напруженнями втискається у пружний шар під дією сили P після виникнення там початкового деформованого стану [2, 5]. h_1 – товщина шару в початковому деформованому стані, яка пов'язана з товщиною h_2 у недеформованому стані відношенням $h_1 = \lambda_3 h_2$. Будемо вважати, що зовнішнє навантаження прикладене тільки до вільного торця пружного штамп, під дією якого всі точки торця штамп переміщуються у напрямку осі симетрії y_3 на одну і ту ж саму величину ε . Вважатимемо, що поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а в зоні контакту переміщення та напруження – неперервні. У випадку попередньо напруженого шару пропонується наступний вид закріплення із основою – шар лежить на жорсткій основі без тертя.

Вважаємо, що початкові напружено-деформовані стани у тілах є однорідними та рівними. а пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовані функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [1]. Для дослідження введемо лагранжеві координати (x_1, x_2, x_3) , які в початковому стані співпадають з декартовими координатами (y_1, y_2, y_3) . Матеріали штамп, шару та основи вважаються ізотропними стисливими або нестисливими з довільною структурою пружного потенціалу. У випадку ортотропних матеріалів приймається, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають з напрямками осей координат.

У системі циліндричних координат (r, θ, z_i) такій постановці відповідають граничні умови:

1) на торці пружного штамп $z_i = \frac{H}{v_i}$, де $v_i = \sqrt{n_i}$, $(i = \overline{1,2})$:

$$u_3^{(1)} = -\varepsilon; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq r \leq R); \quad (1)$$

2) на границі пружного шару в області контакту $z_i = 0$:

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{33}^{(1)} = \tilde{Q}_{33}^{(2)} \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 \leq r \leq R); \quad (2)$$

3) на границі пружного шару поза областю контакту $z_i = 0$:

$$\tilde{Q}_{33}^{(2)} = 0 \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (R \leq r < \infty); \quad (3)$$

4) на боковій поверхні пружного штампу $r = R$:

$$\tilde{Q}_{rr}^{(1)} = 0; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq z_i \leq \frac{H}{v_i}). \quad (4)$$

На нижній поверхні шару, що лежить на жорсткій основі та закріпленого з основою, $z_i = -\frac{\lambda_3 H_2}{v_i} = -\frac{H_i}{v_i} \quad (i = \overline{1,2})$,

$$u_3^{(2)} = 0 \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 \leq r < \infty), \quad (5)$$

$$u_3^{(2)} = 0 \quad u_r^{(2)} = 0 \quad (0 \leq r < \infty). \quad (6)$$

де $z_i = \frac{y_3}{v_i}$, $(i = \overline{1,2})$ товщина шару в недеформованому стані; n_i – корені [1].

Випишемо, також умову рівноваги, що встановлює зв'язок між осіданням і рівнодіючої навантаження P :

$$P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho Q_{33}^{(2)}(0, \rho) d\rho \quad (7)$$

Виклад матеріалів досліджень. Методика розв'язання поставленої задачі поділяється на два етапи: аналітичний, який у повній мірі висвітлений у працях [2, 3, 5] і чисельний. Алгоритм чисельного розв'язку для вказаної постановки задачі, що реалізований у вигляді програми в пакеті Maple представлений у [8]. Отже, алгоритм розв'язку даної задачі базується на наступних кроках:

1. Вводимо усі необхідні параметри, що стосуються характеристик конкретного пружного потенціалу та даних задачі.

2. Для визначення напружено-деформованого стану у пружному шарі з початковими напруженнями, що виражені через гармонійні функції у вигляді інтегралів Ханкеля, при рівних або нерівних коренях характеристичного рівняння [1 - 3]:

$$u_3^{(2)} = \theta_3 \left(\int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta\rho) d\eta - \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} G(\eta h) J_0(\eta\rho) d\eta \right) \quad Q_{33}^{(2)} = \theta_1 \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta; \quad Q_{3r}^{(2)} = 0 \quad (8)$$

Де $\theta_1 = C_{44} l_1 (1 + m_1) \kappa$, $h = h_1 / R$, $v_1 = \sqrt{n_1}$, $\theta_3 = m_1 (s_1 - s_0) v_1^{-1}$, $F(\eta)$ – невідома функція, значення коефіцієнтів m_i , C_{44} , l_i , s_i залежать від характеру пружного потенціалу [1].

У співвідношенні (8) вводиться позначення $F(\eta) = \eta^3 B_2 R^{-3} (1 - G(\eta))^{-1}$. А вид функції $G(\eta)$ та κ визначаються із граничних умов (1) - (7) і мають вигляд:

$$G(t) = (t - e^{-t} + 1)(sht)^{-1} P(t), \quad P(t) = \kappa \cdot sht(t + \kappa \cdot sht)^{-1}, \quad \kappa = s_0 - s, \quad t = 2h\eta v_1^{-1}. \quad (9)$$

Так для (9), при $n_1 = n_2$, спираючись на [1], апроксимується функція $P(x)$ виразом:

$$P(x) \cong 1 - (\tilde{\mathfrak{G}}_1 + 1)^{-1} x (shx)^{-1} - 0,14x (\tilde{\mathfrak{G}}_1 (\tilde{\mathfrak{G}}_1 + 1) chx)^{-1},$$

де $\tilde{\mathfrak{G}}_1 = s - s_0$.

Відмітимо, що (8) одержані за допомогою введених О. М. Гузем потенціалів $\varphi_i(y_1, y_2, y_3)$ [1].

3. Вводимо нові змінні

$$\int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta) d\eta = -\frac{8\varepsilon E}{\kappa \theta_2 l R} \chi_0, \quad \chi_k = -\frac{\mu_k N_k}{\varepsilon R}.$$

та виражаємо через них невідомі коефіцієнти, що залежать від вигляду пружного потенціалу [1 - 3, 5].

4. Обчислюємо у вигляді процедур усі необхідні для подальшого чисельного розв'язку параметри.

5. З умов неперервності напружень та переміщень в зоні контакту та поза нею [5], виписуємо парні інтегральні рівняння

$$\int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta\rho) d\eta = f(\rho), \quad (\rho < 1), \quad (10)$$

$$\int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0, \quad (\rho > 1).$$

Де $f(\rho) = \theta_3^{-1} \left(-(m_2 - 1) v_1^{-1} (A_0 + 3C_0 R^2 \rho) - \mu_k (n_1 R)^{-1} (m_1 \mu_k R^{-1} F_k + v_1 (m_2 - 1) N_k) J_0(\mu_k \rho) + \gamma_k (1 - m_2) B_k I_0(\gamma_k v_1 R \rho) \right) + \int_0^{\infty} \frac{F(\eta) G(\eta h) J_0(\eta \rho)}{\eta} d\eta$.

6. Використовуючи формулу звернення [1], матимемо інтегральні рівняння типу Фредгольма 2-го роду відносно функції $F(\eta)$:

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = -\frac{2}{\pi \theta_3} p(\eta) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F(u) G(uh) \psi_0(\eta, u)}{u} du, \quad (11)$$

Де $p(\eta) = \varepsilon \left((1 - \chi_0) \psi_0(\eta, 0) - 2(m_2 - 1) R^2 \theta_2^{-1} \chi_0 \psi_1(\eta, 0) + \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \psi_0(\eta, \mu_k) + 0.5(m_2 - 1) R^2 \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k \psi_0(\eta, i\gamma_k v_1 R) \right)$

Розв'язок (11) будемо шукати методом послідовних наближень [1], взявши за нульові та наступні наближення функції представлені формулами:

$$F^{(0)}(\eta) \eta^{-1} = -2(\pi \theta_3)^{-1} p(\eta), \quad F^{(k)}(\eta) \eta^{-1} = 2\pi^{-1} \int_0^{\infty} u^{-1} F^{(k-1)}(u) G(uh) \psi_0(\eta, u) du$$

Та (11) запишемо у вигляді

$$F(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}(\eta) \quad (12)$$

Відмітимо, що процес послідовних наближень (12) збіжний при $h > 1$ та $\lambda_1 > \lambda_{kp}$, враховуючи дослідження проведені [1].

При обчисленні функції (12) більшість інтегралів у кінцевому вигляді не обчислюються, враховуючи складність функцій (9). Тому, починаючи із другого наближення, підінтегральні функції розкладаються у ряди за степенями h^{-1} , що дозволить обчислити (12) наближено:

$$F(\eta)/\eta = F^{(0)}(\eta)/\eta + 2\pi^{-1} \psi_0(\eta, 0) F^*(\eta),$$

Де $\frac{F^{(0)}(\eta)}{\eta} = \frac{2\varepsilon}{\pi \theta_3} \left((\chi_0 - 1) \psi_0(\eta, 0) + \frac{2(m_2 - 1) R^2}{\theta_2} \chi_0 \psi_1(\eta, 0) - \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \psi_0(\eta, \mu_k) - \frac{(m_2 - 1) R^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k \psi_0(\eta, i\gamma_k v_1 R) \right)$

$$F^*(\eta) = \frac{2\theta_4}{\pi} \left\{ \frac{D_0}{h} r_1(\mu_k) + \frac{4D_0^2}{\pi h^2} r_1^2(\mu_k) + \frac{1}{h^3} \left(\frac{4D_0^3}{\pi^2} r_1^2(\mu_k) + \frac{D_2}{2} \frac{r_8^{(1)}(\mu_k, \eta)}{r_1(\eta)} \right) + \frac{2D_0 D_2}{\pi h^4} r_8^{(2)}(\mu_k, \eta) + \frac{1}{h^5} \left(\frac{D_4}{24} \frac{r_9^{(1)}(\mu_k, \eta)}{r_1(\eta)} + \frac{2D_2 D_0^2}{\pi^2} r_1(\mu_k) r_8^{(3)}(\mu_k, \eta) \right) + \frac{1}{6\pi h^6} \left(D_0 D_4 r_9^{(2)}(\mu_k, \eta) + \frac{6D_2^2}{\mu_k^3 r_1(\eta)} r_5(\mu_k) r_8^{(1)}(\mu_k, \eta) \right) + \frac{1}{h^7} \left(\frac{2D_2^2 D_0}{\pi^2 \mu_k^3} r_5(\mu_k) r_8^{(1,5)}(\mu_k, \eta) + \frac{D_0^2 D_4}{6\pi^2 \mu_k^5} r_9^{(3)}(\mu_k, \eta) r_1(\mu_k) - \frac{D_6}{720} \frac{r_{10}(\mu_k, \eta)}{r_1(\eta)} \right) \right\} + \frac{(m_2 - 1) R^2 b_1^{(k)}}{\pi} \left\{ \frac{D_0}{h} r_1(i\gamma_k v_1 R) + \frac{4D_0^2}{\pi h^2} r_1(i\gamma_k v_1 R) r_1(\eta) + \frac{1}{h^3} \left(\frac{4D_0^3}{\pi^2} r_1(i\gamma_k v_1 R) r_1(\eta) + \frac{D_2}{2} \frac{r_8^{(1)}(i\gamma_k v_1 R, \eta)}{r_1(\eta)} \right) + \frac{2D_0 D_2}{\pi h^4} r_8^{(2)}(i\gamma_k v_1 R, \eta) + \frac{1}{h^5} \left(\frac{D_4}{24} \frac{r_9^{(1)}(i\gamma_k v_1 R, \eta)}{r_1(\eta)} + \frac{2D_2 D_0^2}{\pi^2} r_1(\eta) r_8^{(3)}(i\gamma_k v_1 R, \eta) \right) + \frac{1}{6\pi h^6} \left(D_0 D_4 r_9^{(2)}(i\gamma_k v_1 R, \eta) + \frac{6D_2^2}{\mu_k^3} \frac{r_5(\eta)}{r_1(\eta)} r_8^{(1)}(i\gamma_k v_1 R, \eta) \right) + \frac{1}{h^7} \left(\frac{2D_2^2 D_0}{\pi^2 \mu_k^3} r_5(\eta) r_8^{(1,5)}(i\gamma_k v_1 R, \mu_n) + \frac{D_0^2 D_4}{6\pi^2 \mu_k^5} r_9^{(3)}(i\gamma_k v_1 R, \eta) r_1(\eta) - \frac{D_6}{720} \frac{r_{10}(i\gamma_k v_1 R, \eta)}{r_1(\eta)} \right) \right\} + \frac{2}{\pi} (\chi_0 - 1) \left\{ \frac{D_0}{h} + \frac{4D_0^2}{\pi h^2} r_1(\eta) + \frac{1}{h^3} \left(\frac{4D_0^3}{\pi^2} r_1^2(\eta) - \frac{D_2}{3\pi^3} \frac{r_2(\eta)}{r_1(\eta)} \right) + \frac{2D_0 D_2}{3\pi^3 h^4} (3r_5(\eta) - 2r_2(\eta)) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3h^5\eta^3} \left(\frac{D_4 r_3(\eta)}{\eta^2 r_1(\eta)} + \frac{2D_2 D_0^2}{\pi} r_1(\eta)(3r_5(\eta) - r_2(\eta)) \right) + \frac{2}{3\pi\eta^5 h^6} \left(\frac{D_0 D_4}{8} (16r_3(\eta) + 3r_6(\eta)) - \frac{D_2^2 r_2(\eta)}{\eta r_1(\eta)} r_5(\eta) \right) + \\
& + \frac{1}{3\eta^5 h^7} \left(\frac{D_0}{\pi^2} \left(\frac{4D_0 D_4}{3} r_1(\eta)(3r_5(\eta) + r_6(\eta)) + \frac{D_2^2}{\eta} r_5(\eta)(3r_5(\eta) - 4r_2(\eta)) \right) - \frac{D_6}{168\eta^2 r_1(\eta)} (21\eta^4 r_5(\eta) - 7r_7(\eta) - \right. \\
& \left. - 35\eta^2 r_6(\eta) - \eta^7 r_1(\eta)) \right) + \frac{2(m_2 - 1)R^2}{\theta_2} \left[\frac{D_0}{\pi h} + \frac{2D_0^2}{\pi^2 h^2} r_1(\eta) + \frac{1}{\pi h^3} \left(\frac{4D_0^3}{\pi^2} r_1^2(\eta) - \frac{D_2}{4\eta^3} \frac{r_{11}(\eta)}{r_1(\eta)} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{D_0 D_2}{2\pi^2 \eta^3 h^4} (2r_5(\eta) - r_{11}(\eta)) + \frac{1}{\pi h^5 \eta^5} \left(\frac{D_4}{72\eta^2} \frac{r_{12}(\eta)}{r_1(\eta)} + \frac{D_2 D_0^2 \eta^2}{\pi^2} r_1(\eta)(4r_5(\eta) - r_{11}(\eta)) \right) + \frac{2}{36\pi^2 \eta^6 h^6} (\eta D_0 D_4 (3r_6(\eta) + \right. \\
& \left. + r_{12}(\eta)) - 9D_2^2 \frac{r_{11}(\eta)}{r_1(\eta)} r_5(\eta)) + \frac{1}{36\pi\eta^7 h^7} \left(\frac{2\eta D_0}{\pi^2} (\eta D_0 D_4 r_1(\eta)(3r_6(\eta) + r_{12}(\eta)) + 9D_2^2 r_5(\eta)(2r_5(\eta) - r_{11}(\eta)) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 3D_4 D_0 r_6(\eta)) - 9D_2^2 \frac{r_5(\eta)}{r_1(\eta)} r_{11}(\eta) - \frac{D_6}{80} \frac{r_{13}(\eta)}{r_1(\eta)} \right) \right],
\end{aligned}$$

7. Використовуючи (1) та ортогональність бesselевих функцій отримаємо умови для рівних коренів, з яких отримаємо нескінченну квазірегулярну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\vartheta_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{kn} \chi_n = \varpi_k \quad (k=0,1,2,\dots) \quad (13)$$

де χ_i ($i=0,1,2,\dots$) – шукані сталі через які виражаються компоненти напружень і переміщень пружних тіл з початковими напруженнями.

При визначенні коефіцієнтів (13) більшість інтегралів також не обчислюються, враховуючи складність функцій (9). Тому, починаючи із другого наближення, підінтегральні функції аналогічно розкладаються у ряди за степенями h^{-1} , що дозволить обчислити коефіцієнти (13) наближено за формулами [5].

У розробленій програмі [8], система (13) обчислюється за допомогою матричного числення.

У таблиці 1 представлено перші 8 значень невідомих, знайдених із системи (13) для випадку потенціала Бартенєва-Хазановича.

Таблиця 1
Значення сталих χ_i ($i=0,1,2,\dots$) при $h=1.6$

П/ п	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	0.7
0	0.00471	0.0058	0.00474	0.003979	0.00237	0.00314	0,00273	0.00471
1	-0.00252	$8.5 \cdot 10^{-8}$	$7.6 \cdot 10^{-8}$	$-6.3 \cdot 10^{-8}$	$7.7 \cdot 10^{-15}$	$6.9 \cdot 10^{-12}$	-0,00004	-0.00252
2	-0.00167	$3.5 \cdot 10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-8}$	$-1.1 \cdot 10^{-8}$	$1.6 \cdot 10^{-15}$	$4.7 \cdot 10^{-12}$	-0,00002	-0.00167
3	$2.2 \cdot 10^{-10}$	$4.9 \cdot 10^{-15}$	$4.9 \cdot 10^{-17}$	$-3.9 \cdot 10^{-17}$	$-1.4 \cdot 10^{-18}$	$9.7 \cdot 10^{-17}$	$-2.1 \cdot 10^{-18}$	$2.2 \cdot 10^{-10}$
4	$9.8 \cdot 10^{-11}$	$-5.5 \cdot 10^{-17}$	$-2 \cdot 10^{-18}$	$6.2 \cdot 10^{-22}$	$1.0 \cdot 10^{-28}$	$1.2 \cdot 10^{-32}$	$-7.2 \cdot 10^{-26}$	$9.9 \cdot 10^{-11}$
5	$8.3 \cdot 10^{-15}$	$-2.9 \cdot 10^{-17}$	$-1.2 \cdot 10^{-19}$	$4.0 \cdot 10^{-22}$	$-5.9 \cdot 10^{-30}$	$8.5 \cdot 10^{-33}$	$-5.3 \cdot 10^{-26}$	$8.28 \cdot 10^{-15}$
6	$-8.1 \cdot 10^{-18}$	$-8.2 \cdot 10^{-26}$	$-1.3 \cdot 10^{-30}$	$9.9 \cdot 10^{-36}$	$5.8 \cdot 10^{-47}$	$-4.9 \cdot 10^{-48}$	$-3.5 \cdot 10^{-45}$	$-8.1 \cdot 10^{-18}$
7	$-3.4 \cdot 10^{-18}$	$-4.4 \cdot 10^{-26}$	$-6.6 \cdot 10^{-31}$	$-6.3 \cdot 10^{-36}$	$3.9 \cdot 10^{-47}$	$-4.6 \cdot 10^{-48}$	$3 \cdot 10^{-45}$	$-3.4 \cdot 10^{-18}$

8. Обчислюємо вирази для визначення напружено-деформованого стану в попередньо напруженому шарі, штампі та основі з початковими напруженнями [2 – 3, 5] та будуємо графіки у безрозмірних координатах для потенціалів конкретної структури, таких як: гармонічний потенціал, потенціал Трелоара та потенціал Бартенєва-Хазановича.

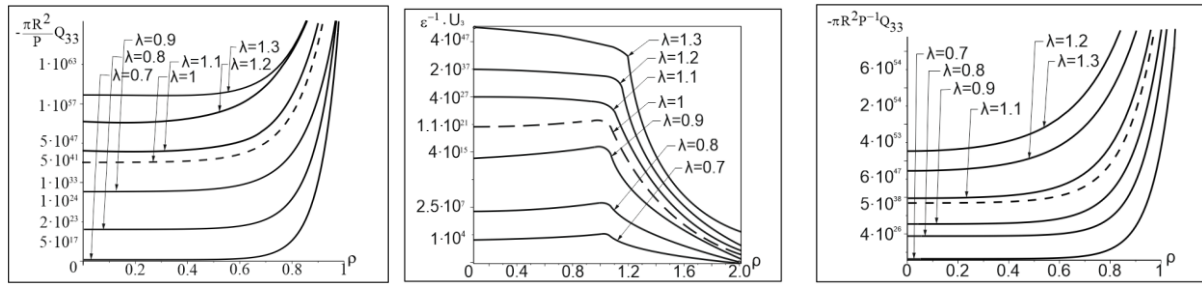


Рис. 1. Контактні напруження та переміщення при $h=1.6$

На рис. 1 зображено криві, які відповідають значенням $\lambda_1=0.7, 0.8, 0.9, 1, 1.1, 1.2, 1.3$, де λ_1 – визначає початковий стан шару і циліндра. На усіх рисунках штрих-пунктирна лінія відповідає стану без початкових напружень ($\lambda_1=1$).

9. Аналізуємо отримані результати. Достовірність одержаних результатів підтверджується тим, що: 1) всі висновки досліджень отримані в результаті коректно поставленої задачі у рамках лінеаризованої теорії пружності; 2) залученням строгого математичного апарату; 3) використанням надійних чисельних методів та програмного забезпечення; 4) одержані результати у спрощених випадках співпадають з відомими розв’язками у літературі.

Перевірка одержаних результатів на еталонних задачах представлена в таблиці 2, порівнянням числових значень сили, що діє на верхній торець штампа, при різних величинах початкових напружень із випадком без початкових напружень, що виділений у таблиці жирним шрифтом.

Таблиця 2

Числові значення сили $P/\varepsilon R$.

Потенціал	λ	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2
	h						
Гармонічний	1.6	0,5455	0,6177	0,6401	0,6478	0,6473	0,6372
	4	0,4878	0,5577	0,5843	0,5957	0,6003	0,6015
Бартенева-Хазановича	1.6	0,9864	0,6214	0,6710	0,6721	0,6803	0,6552
	4	0,9422	0,5179	0,6046	0,6298	0,6534	0,6619
Трелоара	1.6	1,4082	1,2487	1,2974	1,2315	1,2978	1,2043
	4	1,4025	1,2456	1,2945	1,2296	1,2653	1,2022

При розв’язанні рівнянь (11) в роботі був використаний метод послідовних наближень, що є збіжним (за принципом стиснутих відображень [1]) при виконанні умови $h > v_1 \sqrt{D_1(2\pi)^{-1}}$.

Висновки. Отже, з отриманих результатів можна зробити наступні висновки: 1) У статті представлені результати дослідження впливу початкових напружень на контактну взаємодію пружного циліндричного штампа та шару стосовно конкретних потенціалів (потенціал Бартенева – Хазановича, гармонічний потенціал, потенціал Трелоара) за допомогою числових методів та ІТ технологій. 2) Представлено алгоритм числового обчислення компонентів напружено-деформованого стану контактуючих тіл з початковими напруженнями при довільній структурі пружного потенціалу на прикладі програми [8]. Це дозволяє використовувати його при інженерних розрахунках на міцність конструкції та принципово полегшує складність проведених

досліджень. Запропонований алгоритм розв'язку може безпосередньо використовуватись для дослідження різноманітних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композитних матеріалів при проектуванні технологічного обладнання, деталей машин, колон будівель та іншого. 3) Числова реалізація методу дослідження дала змогу графічно відобразити вплив початкових напружень на закон розподілу контактних напружень і переміщень поперечно напруженого циліндра та шару для потенціалів найпростішої структури.

Виявлений при дослідженні вплив початкових (залишкових) напружень є суттєвим для стисливих та нестисливих тіл і повинен враховуватися при розрахунках на міцність у деталях конструкцій. Це підтверджено одержаними аналітичними, графічними та числовими результатами, що дає змогу використовувати їх в інженерних розрахунках.

References:

1. Гузь А.Н., Рудницький В.Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями : монографія. Хмельницький : вид. ПП Мельник, 2006. 710 с.

2. Yaretska N. O.. Mathematical model and solution of spatial contact problem for prestressed cylindrical punch and elastic layer./ Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences: Collective monograph. - Riga, Latvia : "Baltija Publishing", 2022. – Pp. 261-295. <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-200-5-10>.

3. Physical and mathematical justification of scientific achievements: collective monograph / Волосова Н.М., Мірошник Н.П. – etc. – International Science Group. – Boston: Primedia eLaunch, 2020. 118 p. Available at: DOI - 10.46299/ISG.2020.MONO.PHYSICAL.III.

4. Babych, S.Y., Yarets'ka, N.O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *Int Appl Mech* (2021). Vol. 57. №3. - 297-305 pp. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7>.

5. Yaretskaya N.A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *Int. Appl. Mech.* 2014. Vol. 50, No 4. P. 378 – 388. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0641-y>

6. Yaretskaya N.F. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *Int. Appl. Mech.* 2018. Vol. 54, No 5. P. 539 – 543. <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y>

7. Ярецька Н.О., Рамський А.О. Застосування Maple для розв'язання контактної задачі про тиск жорсткого кільцевого штампа на півпростір з початковими напруженнями. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. Херсон: ХНТУ. 2018р. Том. 1, №3(66). с. 199 – 204.

8. А. с. KNDS_CS_PZN. Комп'ютерна програма "Розрахунок компонентів напружено-деформованого стану для осесиметричної статичної задачі про тиск пружного циліндричного штампа на пружний шар з початковими (залишковими) напруженнями" / Н. О. Ярецька. – № 54576 ; заявл. 05.05.2014 ; опубл. 01.09.2014, Бюл. №34, 2014р.