

## ІТЕРАТИВНА МОДЕЛЬ ЗАЛЕЖНОСТІ КОЛИВАНЬ ХАОТИЧНОЇ СИСТЕМИ ВІД АМПЛІТУДИ ПЕРІОДИЧНОГО ВХІДНОГО СИГНАЛУ НА ФОНІ ШУМІВ

У роботі здійснено аналітичне дослідження реакції хаотичних систем, побудованих на основі нелінійних коливальних контурів, на періодичні та неперіодичні вхідні сигнали. В результаті дослідження розроблено ітеративну модель залежності коливань хаотичної системи від амплітуди періодичного вхідного сигналу на фоні шумів.

Ключові слова: виявлення періодичних сигналів, хаотична система, нелінійний коливальний контур, ітеративне відображення, переріз Пуанкаре.

M.V. FEDULA

Khmelnyskyi National University

### ITERATIVE MODEL OF CHAOTIC SYSTEM OSCILLATION DEPENDENCE ON PERIODIC INPUT SIGNAL ON THE BACKGROUND OF NOISE

*Abstract – The aim of this research is the development of iterative model of chaotic system oscillation dependence on periodic input signal on the background of noise.*

*The known chaos-based periodic signal detection methods utilize different numerical models of chaotic system oscillation dependence on periodic input signal on the background of noise. The main disadvantage of these methods is that they do not provide sufficient capabilities for estimation of the periodic component influence on the chaotic system output oscillation in chaotic state. This is the main problem of chaos-based periodic signal detection without chaotic-to-periodic system state transition. The iterative model proposed was obtained analytically for nonlinear oscillatory circuit based chaotic systems. This model provides a new way to estimation of the periodic component influence on the chaotic system output oscillation in chaotic state.*

*Thus the iterative model provides the capabilities for new chaos-based signal detection criteria formulation in the case of chaotic-to-periodic state transition absence.*

*Keywords: periodic signal detection, chaotic system, nonlinear oscillatory circuit, iterative mapping, Poincare section.*

#### Вступ

Виявлення періодичних радіосигналів у шумах є важливим завданням у багатьох галузях сучасних технологій, таких як радіозв'язок, радіолокація, діагностика неполадок устаткування, медицина та ін. На даний час існує велика кількість методів виявлення періодичних сигналів у шумах із застосуванням лінійних та нелінійних перетворень різних типів.

Від 1992 р. відомі методи виявлення періодичних сигналів у шумах із застосуванням хаотичних систем та відображень [1]. Відомо, що фазові траєкторії двох однакових хаотичних систем можуть значно розходитися при якій завгодно малій різниці між їх вхідними сигналами. Хаотичні системи надзвичайно чутливі до слабких сигналів, і тому їх використання для виявлення сигналів на фоні сильних шумів має значні перспективи [2,3]. У більшості відомих робіт розглядається виявлення періодичних сигналів за допомогою хаотичних систем, режим коливань яких змінюється від хаотичного до періодичного при збільшенні амплітуди періодичної складової вхідного сигналу вище деякого порогового рівня [4,5].

Проте вказані методи мають ряд суттєвих недоліків, які не дозволяють ефективно виявляти періодичні сигнали за допомогою хаотичних систем на практиці. Основним недоліком методів, описаних у роботах [2-5], є складність установки і регулювання режиму коливань хаотичної системи, близького до критичного. Під впливом власних та зовнішніх шумів режим хаотичної системи може суттєво наблизитися та віддалитися від критичного. При наближенні до критичного режиму перехід в періодичний режим може відбуватися при менших вхідних відношеннях сигнал/шум, але при цьому зростає ймовірність хибної тривоги, зумовлена зменшенням енергії, необхідної для переходу в періодичний режим. При віддаленні від критичного режиму мінімальне відношення сигнал/шум, необхідне для переходу в періодичний режим, збільшується, що зумовлено необхідністю збільшення амплітуди вхідного сигналу [6-8].

У хаотичному режимі коливань чутливість хаотичної системи до слабких сигналів висока для досить великого діапазону амплітуд вхідного сигналу. Тому є доцільною розробка методів виявлення періодичних сигналів за вихідними коливаннями хаотичної системи без переходу до періодичного режиму. Основною проблемою при розробці таких методів є відсутність адекватних аналітичних моделей залежності вихідних коливань хаотичної системи від періодичної складової вхідного сигналу на фоні шумів. У даній роботі запропонована ітеративна модель залежності коливань хаотичної системи від амплітуди періодичної складової вхідного сигналу. Розроблена модель дає можливість формулювати критерії для виявлення періодичних сигналів при низьких відношеннях сигнал/шум на вході приймача.

#### Хаотичні системи на основі нелінійних коливальних контурів

У даній роботі приведено дослідження можливостей виявлення періодичних сигналів із застосуванням хаотичних систем, побудованих на основі нелінійних коливальних контурів. Структурна схема такої хаотичної системи зображена на рис.1.

Колівання хаотичної системи, зображеної на рис.1, в часовій області описуються рівнянням (1):

$$\int_0^t a(t-\tau) \cdot (s(\tau) + F[x(\tau)]) d\tau = x(t) \quad (1)$$

де  $x(t)$  – вихідний сигнал;  
 $s(t)$  – вхідний сигнал;  
 $a(t)$  – імпульсна характеристика лінійної частини системи;  
 $F[x]$  – нелінійна не парна функція;  
 Позначивши операцію згортки знаком «\*»,  
 рівняння (1) можна записати у вигляді виразів:  
 $a(t) * (s(t) + F[x(t)]) = x(t)$  (2)

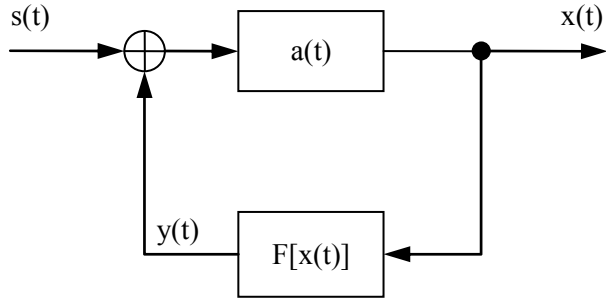


Рис. 1. Хаотична система, побудована на основі нелінійного коливального контура

або  $x(t) = a(t) * s(t) + a(t) * F[x(t)]$ . (3)

Здійснивши обернену згортку імпульсної характеристики  $a(t)$ , отримаємо вираз (4):

$$a^{-1}(t) * x(t) - F[x(t)] = s(t) \quad (4)$$

В частотній області рівняння (4) має вигляд (5):

$$\frac{1}{A(p)} \cdot X(p) - L\{F[x(t)]\} = S(p), \quad (5)$$

де  $S(p) \div s(t)$ ,  $X(p) \div x(t)$ ,  $A(p) \div a(t)$ ,  $L\{F[x(t)]\} \div F[x(t)]$  – перетворення Лапласа.

Якщо в часовій області  $a(0) = 0$ , то рівняння (3) відповідає дискретному відображенню (6):

$$x(m) = a(m) * s(m) + a(m-1) * F[x(m-1)], \quad (6)$$

де  $m = 0, 1, 2, \dots, M-1, M$ ,  $M = T_c / \Delta t$ ,  $T_c$  – час спостереження сигналу  $x(t)$ ,  $\Delta t$  – крок дискретизації, знаком «\*» позначена дискретна згортка у часовій області, наприклад:

$$a(m) * s(m) = \sum_{q=1}^m a(m-q+1) \cdot s(q) \cdot \Delta t.$$

Вираз (6) є ітеративним нелінійним відображенням, і може бути поданий у вигляді (7):

$$x(m) = a(m) * s(m) + a(m-1) * F[a(m-1) * s(m-1) + a(m-2) * \dots * F[a(2) * s(2) + a(1) * F[a(1) * s(1)]] \dots] \quad (7)$$

Якщо сигнал  $s(t)$  є сумою задаючого сигналу  $s_0(t)$ , який забезпечує хаотичний режим коливальних системи, і вхідного сигналу  $g(t)$ :

$$s(t) = s_0(t) + g(t),$$

то, виконавши заміну

$$\begin{aligned} b(i) &= a(i) * s_0(i), \\ u(i) &= a(i) * g(i), \\ i &= 1, 2, 3, \dots, m, \end{aligned}$$

отримаємо відображення (8):

$$x_1(m) = b(m) + u(m) + a(m-1) * F[b(m-1) + u(m-1) + \dots + a(2) * F[b(2) + u(2) + a(1) * F[b(1) + u(1)]] \dots] \quad (8)$$

Якщо амплітуда вхідного сигналу  $g(t)$  дорівнює нулю, то на виході системи Дуффінга буде присутня реакція на задаючий сигнал  $s_0(t)$ :

$$x_0(m) = b(m) + a(m-1) * F[b(m-1) + \dots + a(2) * F[b(2) + a(1) * F[b(1)]] \dots] \quad (9)$$

Таким чином вираз (8) описує випадок присутності вхідного сигналу  $g(t)$  а вираз (9) – випадок відсутності вхідного сигналу  $g(t)$ .

### Ітеративна модель залежності коливальних хаотичної системи від амплітуди періодичного вхідного сигналу на фоні шумів

Проаналізуємо відображення (8) для випадку, коли вхідний сигнал  $g(t) = s_1(t)$  є імпульсом нескінченно малої тривалості, амплітуда якого відповідає значенню деякої функції  $u(t)$ . Модель сигналу  $s_1(t)$  описується виразом (10):

$$s_1(t) = \begin{cases} u(0), & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Тоді в дискретній формі отримаємо вираз (11):

$$s_1(m) = \begin{cases} u(1), & m = 1, \\ 0, & m \neq 1, \end{cases} \quad (11)$$

Виконаємо заміну:

$$v_1(i) = a(i) * s_1(i)$$

Реакція хаотичної системи, яка описується відображенням (8), на сигнал  $s_1(t)$  дорівнює:

$$x_1(m) = b(m) + v_1(m) + a(m-1) * F[b(m-1) + v_1(m-1) + \dots + a(2) * F[b(2) + v_1(2) + a(1) * F[b(1) + v_1(1)]] \dots] =$$

$$= b(m) + a(m-1) * F[b(m-1) + a(m-2) * F[b(m-2) + \dots + a(3) * F[b(3) + a(2) * F[b(2) + a(1) * F[b(1) + v_1(1)]] \dots]], (12)$$

де

$$v_1(1) = u(1).$$

В такому випадку відображення  $x_0(m)$  (9) та  $x_1(m)$  (12) відрізняються тільки початковими умовами:

$$x_0(1) = b(1),$$

$$x_1(1) = b(1) + u(1).$$

Так як система (8) хаотична, то вплив початкових умов на її вихідний сигнал з часом підсилюється. Якщо нелінійна функція  $F[x]$  може бути подана у вигляді ряду Тейлора:

$$F[x] = \sum_{i=1}^N C_i (x-h)^i, (13)$$

то для неї справедлива рівність (13):

$$F[x+v] = F[x] + F[v] + F_c[x, v], (14)$$

де  $F_c[x, v]$  – сума всіх комбінаційних членів, яка визначається за формулою (14):

$$F_c[x, v] = \sum_{i=1}^{N-1} K_i \cdot x^i \cdot v^{N-i}, (15)$$

де  $K_i$  – коефіцієнти, які залежать від коефіцієнтів ряду Тейлора (13).

Виконавши заміну (16):

$$G[x, v] = F[v] + F_c[x, v]. (16)$$

отримаємо вираз для впливу величини  $v$  на значення функції  $F[x+v]$ :

$$F[x+v] = F[x] + G[x, v] (17)$$

Тоді в дискретній формі реакція хаотичної системи на імпульс  $s_1(m)$  в часовій області визначається виразами:

$$\begin{aligned} x_1(1) &= b(1) + v_1(1) = x_0(1) + v_1(1), \\ x_1(2) &= b(2) + a(1) * F[x_0(1) + v_1(1)] = x_0(2) + a(1) * G[x_0(1), v_1(1)], \\ x_1(3) &= b(3) + a(2) * F[x_0(2) + a(1) * G[x_0(1), v_1(1)]] = x_0(3) + a(2) * G[x_0(2), a(1) * G[x_0(1), v_1(1)]], \end{aligned} (18)$$

або

$$\begin{aligned} x_1(m) &= x_0(m) + r_1(m-1) \\ r_1(m-1) &= R\{u(1), x_0(m)\} = \\ &= a(m-1) * G[x_0(m-1), a(m-2) * G[x_0(m-2), \dots, a(2) * G[x_0(2), a(1) * G[x_0(1), v_1(1)]] \dots]. \end{aligned} (19)$$

Із формули (19) видно, що різниця між реакцією хаотичної системи на задаючий сигнал і реакцією на суму задаючого сигналу та імпульсу  $v_1(m)$  тривалістю  $\Delta t$  є деяким нелінійним перетворенням  $R$  від сигналу  $x_0(m)$ . Коефіцієнти такого перетворення залежать від значення  $u(1)$ .

Аналогічно можна визначити вираз для реакції хаотичної системи на сигнал  $g(m)$ , який в дискретній формі приймає ненульові значення для всіх  $m$  на інтервалі спостереження:

$$x_m(m) = x_{m-1}(m) + R\{u(m-1), x_{m-2}(m) + R\{u(m-2), x_{m-3}(m) + \dots + R\{u(2), x_1(m) + R\{u(1), x_0(m)\}\}\}\}. (20)$$

Із формул (19) та (20) видно, що кожен наступний ненульовий відлік вхідного сигналу  $g(m)$  призводить до перетворення  $R\{u(m), x_{m-1}(k)\}$  від сигналу  $x_{m-1}(k)$ , який є результатом послідовних перетворень сигналу  $x_0(k)$ , викликаних усіма попередніми відліками сигналу  $g(m)$ .

Припустимо, що сигнал  $g(m)$  періодичний, і його період рівний періоду задаючого сигналу  $T = l \cdot \Delta t$ , де  $l$  – кількість відліків у одному періоді. В такому випадку протягом першого періоду над сигналом  $x_0(m)$  буде виконано  $l$  перетворень, які визначаються формулою виду (19):

$$x_l(l) = x_{l-1}(l) + R\{u(l-1), x_{l-2}(l) + R\{u(l-2), x_{l-3}(l) + \dots + R\{u(2), x_1(l) + R\{u(1), x_0(l)\}\}\}\}. (21)$$

Позначимо перетворення (21) літерою  $Y$ :

$$x_l(l) = Y\{x_0(l)\}. (22)$$

Якщо сигнал  $g(m)$  періодичний, то протягом наступного періоду перетворення (22) буде виконано над сигналом  $x_l(m)$ . Тоді отримаємо:

$$x_{2l}(2l) = Y\{Y\{x_0(2l)\}\}. (23)$$

Узагальнивши результати (22) і (23), можна зробити висновок, що якщо сигнал  $g(m)$  періодичний, то з кожним періодом над вихідним сигналом хаотичної системи виконується одне і те саме перетворення  $Y$ . Тому позначивши  $n$ -кратне перетворення  $Y^{\{n\}}$ , можна записати:

$$x_{nl}(nl) = Y^{\{n\}}\{x_0(nl)\}. (24)$$

Якщо вхідний сигнал  $g(m)$  неперіодичний, то з кожним періодом над вихідним сигналом хаотичної системи будуть виконуватися різні перетворення:

$$x_{nl}(nl) = Y_n \{Y_{n-1} \{Y_{n-2} \{ \dots Y_3 \{Y_2 \{Y_1 \{x_0(nl)\}}\}}\}}\}, \quad (25)$$

Коли на вході хаотичної системи присутній сигнал, до якого входять періодична та неперіодична складові, то протягом  $n$  періодів над вихідним сигналом будуть виконані перетворення (26):

$$x_{nl}(nl) = Y_n \{Y_{n-1} \{Y_{n-2} \{Y_{n-3} \{ \dots Y_2 \{Y_1 \{x_0(nl)\}}\}}\}}\}. \quad (26)$$

Із виразу (26) видно, що при наявності на вході періодичної та неперіодичної складової, перетворення викликане періодичною складовою повторюється  $n$  разів, тоді як перетворення, викликані неперіодичною складовою, з кожним періодом різні. В результаті вплив періодичної складової накопичується з часом, пропорційно степеню, рівному кількості періодів за цей час.

Таким чином задача виявлення періодичних сигналів із застосуванням хаотичних систем виду рис. 1 зводиться до процесу визначення характеристик перетворення  $Y$ , яке виконується з кожним періодом над вихідним сигналом.

Тому для вивчення здатності конкретних хаотичних систем для реагувати на періодичні сигнали доцільно використовувати перерізи Пуанкаре для їх фазових портретів.

### Висновки

В процесі проведеної роботи отримано наступні результати:

1. На основі аналізу літературних джерел вибрано клас хаотичних систем, побудованих на основі нелінійних коливальних контурів виду рис. 1, які складаються з лінійної частини та нелінійного елемента у зворотному зв'язку. Такі хаотичні системи є одними з найбільш зручних для дослідження можливостей застосування для виявлення періодичних сигналів.

2. Проведено аналітичне дослідження динаміки хаотичних систем, побудованих на основі нелінійних коливальних контурів виду рис. 1, які складаються з лінійної частини та нелінійного елемента у зворотному зв'язку. Проаналізовано залежність динаміки розглянутих хаотичних систем від початкових умов.

3. Розроблено ітеративну математичну модель залежності вихідного сигналу хаотичної системи від амплітуди періодичної складової вхідного сигналу. В результаті проведеної роботи доведено, що періодичний сигнал, який діє на вході хаотичної системи, можна виявити за законом зміни фазового портрету хаотичної системи відносно перерізу Пуанкаре в часі. Отриманий результат вказує на великий потенціал можливостей застосування хаотичних систем для виявлення періодичних сигналів при низьких значеннях сигнал/шум.

### Література

1. Birk D. I. Chaotic oscillators and CMFFNS for signal detection in noise environments. IEEE International Joint Conference on Neural Networks. – 1992. – vol. 22, pp.881–888
2. Jalilvand A., Fotoohabadi H. The Application of Duffing Oscillator in Weak Signal Detection. ECTI Transactions on Electrical Eng., Electronics, and Communications. – 2011. – vol. 9, №1, pp. 1–6
3. Li Yue, Yang Baojun. Chaotic system for the detection of periodic signals under the background of strong noise. Chinese Science Bulletin. – 2003. – V.48, №5, pp.508–510.
4. Liyun S., Qian Y., Yuli Z., Jiaojun L. Noise Immunity of Duffing Oscillator and its Applications in Weak UWB Signal Detection. Journal of Networks. – 2012. – V.7, №3. – pp.540–546.
5. Wang Guanyu, Chen Dajun, Lin Jianya, Chen Xing. The application of chaotic oscillators to weak signal detection [J]. IEEE Transactions on industrial electronics. – 1999. – V.46, №20. – pp.440-443.
6. Bowen R. Methods of Symbolic Dynamics. Springer-Verlag, Berlin, 1975
7. Baker G. L. and Gollub J., Chaotic Dynamics : An Introduction, Cambridge University Press, Cambridge, 1990
8. Moon F. C. Chaotic Vibrations. An Introduction for Applied Scientists and Engineers. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey 2004. – 312p.

### References

1. Birk D. I. Chaotic oscillators and CMFFNS for signal detection in noise environments. IEEE International Joint Conference on Neural Networks. – 1992. – vol. 22, pp.881–888
2. Jalilvand A., Fotoohabadi H. The Application of Duffing Oscillator in Weak Signal Detection. ECTI Transactions on Electrical Eng., Electronics, and Communications. – 2011. – vol. 9, №1, pp. 1–6
3. Li Yue, Yang Baojun. Chaotic system for the detection of periodic signals under the background of strong noise. Chinese Science Bulletin. – 2003. – V.48, №5, pp.508–510.
4. Liyun S., Qian Y., Yuli Z., Jiaojun L. Noise Immunity of Duffing Oscillator and its Applications in Weak UWB Signal Detection. Journal of Networks. – 2012. – V.7, №3. – pp.540–546.
5. Wang Guanyu, Chen Dajun, Lin Jianya, Chen Xing. The application of chaotic oscillators to weak signal detection [J]. IEEE Transactions on industrial electronics. – 1999. – V.46, №20. – pp.440-443.
6. Bowen R. Methods of Symbolic Dynamics. Springer-Verlag, Berlin, 1975
7. Baker G. L. and Gollub J., Chaotic Dynamics : An Introduction, Cambridge University Press, Cambridge, 1990
8. Moon F. C. Chaotic Vibrations. An Introduction for Applied Scientists and Engineers. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey 2004. – 312p.