

Н. ЯРЕЦЬКА

*Хмельницький національний університет***ПРО КОНТАКТНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНОГО ШТАМПА І ШАРУ З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ**

**Резюме.** У рамках лінеаризованої теорії пружності представлена осесиметрична змішана задача про тиск пружного циліндричного штампу на шар з початковими (залишковими) напруженнями. Дослідження представлені в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

**Ключові слова:** лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, перетворення Ханкеля, інтегральні рівняння типу Фредгольма, метод послідовних наближень.

N. Iaretska

**ON THE CONTACT PROBLEM FOR A CYLINDRICAL PUNCH AND A LAYER WITH INITIAL (RESIDUAL) TENSION.**

**Summary.** The article deals with the coaxial mixed type task of measuring pressure of an elastic cylinder punch upon a layer with initial (residual) stresses within the framework of linear elasticity theory. Two cases will be viewed in the article 1) the layer is placed on an elastic surface without frictioning; 2) the layer is fastened to an elastic surface. In general, the research was carried out for the theory of great initial (ultimate) deformations and different variants of the theory of small initial deformations with arbitrary structure of elastic potential. It is assumed that elastic potentials are two continuously differentiated functions of algebraic invariants of the Green tensor deformation (the initial states of the layer and of the cylindrical punch remains uniform and equal). The research is carried out within the coordinates of the initial deformed state, which are interrelated with the Lagrangian coordinates (natural state). Besides, it is also assumed that the influence of the die causes small disorders of the main elastic deformed state.

It is assumed that the elastic die as well as the layer are made of different isotropous, transversely isotropic or composite materials and they are interacting on one of the die's surfaces.

The mode of deformation in elastic layer with initial (residual) stress will be defined with the help of harmonic functions as the Henkel integrals. We should note, although the Henkel-method does not provide exact solutions, but it lets us reduce the task to the Fredholm equations, which let us use the method of consecutive approximations. Consequently we got a components of potential vector and tensor of deformations in the case of unequal roots of axis-symetrical type task.

So, the received solutions are defined by lines with the help of very many constants. These constants are defined with regular and linear algebraic systems. The research was carried out on the problem of the influence of initial stresses on the law of distribution of contact disorders in the elastic layer with initial (residual) stresses.

The article deals with the coaxial mixed type task of measuring pressure of an elastic cylinder die upon a layer with initial stresses within the framework of linear elasticity theory. In general, the research was carried out for the theory of great initial (ultimate) deformations and different variants of the theory of small initial deformations with arbitrary structure of elastic potential.

**Key words:** linear elasticity theory, initial (residual) stresses, Henkel transformations, theory of small initial deformations, Fredholm equations.

**Умовні позначення:**

$E$  – модуль пружності 1 роду;

$\lambda_i$  – коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового (залишкового) стану;

$u_i$  – координати початкового деформованого стану;

$x_i$  – лагранжеві координати;

$h_1$  – товщина шару в початковому деформованому стані;

$h_2$  – товщина шару в недеформованому стані;

$J_\nu(x), I_\nu(x)$  – функції Бесселя дійсного та уявного аргументу.

**Вступ.** Дослідження питань контактної взаємодії твердих тіл є досить актуальною проблемою у зв'язку з тим, що на практиці це найпоширеніший спосіб передавання зовнішніх сил. Дана проблема є актуальною як з точки зору розвитку фундаментальних розробок з механіки твердого деформівного тіла, так із точки зору її застосування до різних галузей сучасної техніки. Особливо широке використання теорія контактних задач знайшла у машинобудуванні, оскільки передавання зусиль у вузлах та механізмах машин супроводжується контактуванням деталей між собою. Методи, що розвиваються в теорії контактних задач, дозволяють знайти розподіл тиску в місцях взаємодії, вивчити концентрацію напружень та розробити критерії їх зменшення, а також дослідити напружено-деформівний стан в усьому тілі.

Не зважаючи на існуючі досягнення в теорії контактної взаємодії пружних тіл, все ще залишаються недостатньо розроблені ряд проблем. Серед них – контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями, а саме; тиску пружних штампу і шару з початковими (залишковими) напруженнями. Оскільки один із аспектів сучасної проблеми передавання навантаження пов'язаний із якісно новим підходом – врахуванням залишкових напружень у тілах на закон розподілу тиску в місцях їх дотику, то розрахунок важливих елементів конструкцій та їх створення дозволить ефективніше враховувати міцність матеріалів шляхом правильного оцінювання запасів міцності та достатньо знижувати їх матеріаломісткість, зберігаючи у цілому потрібні функціональні характеристики.

На сьогодні для проблем, які відносяться до контактних задач пружних тіл, у рамках класичних постановок отримано результати досліджень, що охоплюють широке коло питань. Вони достатньо відображені у численних публікаціях періодичних видань. Детальний огляд задач контактної взаємодії пружних тіл з початковими напруженнями представлений у роботах [1 – 4]. Дослідження питання контактної взаємодії кінцевого циліндричного штампа на півпростір з початковими (залишковими) напруженнями розглянуто у роботі [5]. Задачі про тиск без тертя жорсткого кругового штампа на шар з початковими напруженнями присвячена робота [6], у якій лінеаризована осесиметрична задача розв'язана в загальному вигляді. У статті [7] розглянуто просторову задачу про тиск пружного штампа довільного поперечного перетину на пружний півпростір без урахування сил тертя.

У даній роботі з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності [4, 8] представлено розв'язок змішаної осесиметричної статичної задачі про тиск пружного циліндричного штампа з початковими (залишковими) напруженнями на пружний шар з початковими (залишковими) напруженнями. Розглянуто випадки коли шар лежить на жорсткій основі без тертя і шар закріплений із нею після виникнення там початкового деформованого стану. Дослідження виконано у загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Вважаємо, що початкові стани у шарі та штампі однорідні та рівні, а пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовні функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [8]. Крім того, дія штампа викликає в шарі мале збурення основного напруженого стану, для якого виконуються умови

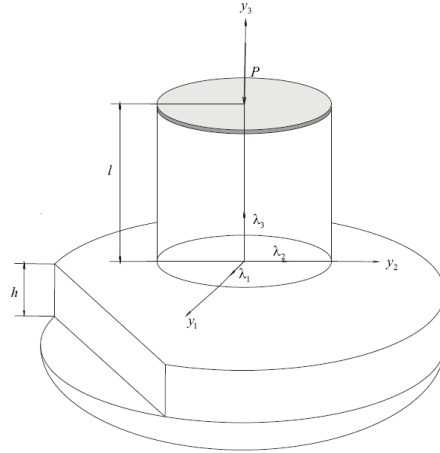
$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3.$$

Дослідження проведено у координатах початкового деформованого стану  $Oy_i$ , які пов'язані з лагранжевими координатами співвідношеннями  $y_i = \lambda_i x_i \quad (i = \overline{1,3})$ .

Величини, які відносяться до пружного штампа, будемо записувати у позначеннях [8] з верхнім індексом (1), а величини, які відносяться до пружного шару – з індексом (2).

**Постановка задачі й основні співвідношення.** Нехай пружний циліндричний штамп (рис. 1) радіуса  $R$  і висотою  $H$  з початковими (залишковими) напруженнями втискається у пружний шар під дією сили  $P$  після виникнення там початкового

деформованого стану. Товщина шару в початковому деформованому стані пов'язана з товщиною у недеформованому стані відношенням  $h_1 = \lambda_3 h_2$ . Збурення під дією сили  $P$ , що прикладена до вільного торця циліндричного штампа, викликають його переміщення у напрямку осі  $Oy_3$  на сталу величину  $\varepsilon$ . Вважатимемо, що поверхні поза областю контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил.



**Рисунок 1.** Тиск циліндричного штампа на шар з початковими (залишковими) напруженнями

**Figure 1.** Pressure cylindrical punch on a layer with initial (residual) stresses

У системі кругових циліндричних координат  $(r, \theta, z_i)$  ( $i = \overline{1,2}$ ) такій постановці відповідають такі граничні умови:

- 1) на торці пружного штампу  $z_i = \frac{H}{v_i}$ , де  $v_i = \sqrt{n_i}$ , ( $i = \overline{1,2}$ ):

$$u_3^{(1)} = -\varepsilon; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq r \leq R); \quad (1)$$

- 2) на границі пружного шару в області контакту  $z_i = 0$ :

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{33}^{(1)} = \tilde{Q}_{33}^{(2)} \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 \leq r \leq R); \quad (2)$$

- 3) на границі пружного шару поза областю контакту  $z_i = 0$ :

$$\tilde{Q}_{33}^{(2)} = 0 \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (R \leq r < \infty); \quad (3)$$

- 4) на боковій поверхні пружного штампу  $r = R$ :

$$\tilde{Q}_{rr}^{(1)} = 0; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq z_i \leq \frac{H}{v_i}). \quad (4)$$

На нижній поверхні шару, що лежить на жорсткій основі та закріпленого з основою,  $z_i = -\frac{\lambda_3 h_2}{v_i} = -\frac{h_i}{v_i}$ , ( $i = \overline{1,2}$ ),

$$u_3^{(2)} = 0 \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 \leq r < \infty), \quad (5)$$

$$u_3^{(2)} = 0 \quad u_r^{(2)} = 0 \quad (0 \leq r < \infty), \quad (6)$$

де  $z_i = \frac{y_3}{v_i}$ , ( $i = \overline{1,2}$ ) товщина шару в недеформованому стані;  $n_i$  – корені рівняння [8, (2.11)].

Умова рівноваги, що встановлює зв'язок між осіданням і рівнодіючою навантаження  $P$  має вигляд

$$P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho Q_{33}^{(2)}(0, \rho) d\rho. \quad (7)$$

Для визначення напружено-деформівного стану у пружному циліндрі використовуємо лінеаризовані рівняння [8], з яких випливають вирази для компонент

вектора переміщення і тензора напруження для стисливих і нестисливих тіл. Причому загальний розв'язок  $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + \tilde{\chi}_2$  для випадку нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$  будемо шукати у вигляді

$$\tilde{\chi} = \frac{(z_1 + z_2)E}{H} (3r^2 - 2(z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2)) \chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ b_2^{(k)} \left[ s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_0(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k z_1 v_1) - I_0(\gamma_k v_2 r) \sin(\gamma_k z_2 v_2) \right] + J_0(\alpha_k r) \left[ \tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + \tilde{S}_3(\alpha_k z_2) \right] \right\} \chi_k.$$

$$\text{Тоді обчислимо } \phi_1 = -\frac{\partial \tilde{\chi}_1}{v_1 \partial z_1}, \quad \phi_2 = -\frac{\partial \tilde{\chi}_2}{v_2 \partial z_2} :$$

$$\phi_1 = \frac{3E\chi_0}{v_1 H} (2z_1^2 - r^2) - \sum_{k=1}^{\infty} \left[ s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} b_2^{(k)} \gamma_k I_0(\gamma_k v_1 r) \cos(\gamma_k z_1 v_1) + \frac{\alpha_k}{v_1} J_0(\alpha_k r) \tilde{S}_4(\alpha_k z_1) \right] \chi_k$$

$$\phi_2 = \frac{3E\chi_0}{v_2 H} (2z_2^2 - r^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ b_2^{(k)} \gamma_k I_0(\gamma_k v_2 r) \cos(\gamma_k z_2 v_2) + \frac{\alpha_k}{v_2} J_0(\alpha_k r) \tilde{S}_5(\alpha_k z_2) \right] \chi_k$$

та

$$U_r^{(1)} = -\frac{6\theta^+ E}{H} r \chi_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^2 b_2^{(k)} \left[ s_0 v_1 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_1(v_1 \gamma_k r) \cos(\gamma_k z_1 v_1) - v_2 I_1(v_2 \gamma_k r) \cos(\gamma_k z_2 v_2) \right] - \alpha_k^2 J_1(\alpha_k r) \left( \frac{\tilde{S}_4(\alpha_k z_1)}{v_1} + \frac{\tilde{S}_5(\alpha_k z_2)}{v_2} \right) \right\} \chi_k \quad (8)$$

$$U_3^{(1)} = \frac{12E}{H} \left[ \frac{m_1 z_1}{n_1} + \frac{m_2 z_2}{n_2} \right] \chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^2 b_2^{(k)} \left[ s_0 m_1 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_0(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k z_1 v_1) - m_2 I_0(\gamma_k v_2 r) \sin(\gamma_k z_2 v_2) \right] - \alpha_k^2 J_0(\alpha_k r) \left( \frac{m_1 \tilde{S}_2(\alpha_k z_1)}{n_1} + \frac{m_2 \tilde{S}_3(\alpha_k z_2)}{n_2} \right) \right\} \chi_k$$

$$Q_{33}^{(1)} = C_{44} (1 + m_1) l_1 \left\langle \frac{12E}{H} \left[ \frac{1}{v_1} + \frac{s}{v_2} \right] \chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^3 b_2^{(k)} \left[ n_1 s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_0(\gamma_k v_1 r) \cos(\gamma_k z_1 v_1) + s n_2 I_0(\gamma_k v_2 r) \cos(\gamma_k z_2 v_2) \right] - \alpha_k^3 J_0(\alpha_k r) \left( \frac{\tilde{S}_4(\alpha_k z_1)}{v_1} + \frac{s \tilde{S}_5(\alpha_k z_2)}{v_2} \right) \right\} \right\rangle \chi_k$$

$$Q_{3r}^{(1)} = C_{44} (1 + m_1) \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^3 s_0 b_2^{(k)} \left[ v_1 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_1(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k z_1 v_1) - v_2 I_1(\gamma_k v_2 r) \sin(\gamma_k z_2 v_2) \right] + \alpha_k^3 J_1(\alpha_k r) \left[ \frac{1}{n_1} \tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + \frac{s_0}{n_2} \tilde{S}_3(\alpha_k z_2) \right] \right\} \chi_k \quad (9)$$

$$Q_{rr}^{(1)} = -D_{44} \left\langle \frac{6\theta_7 E}{H} \chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^3 b_2^{(k)} \left( n_1 s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} \cos(\gamma_k z_1 v_1) F_k(1; r) - n_2 \cos(\gamma_k z_2 v_2) F_k(2; r) \right) + \alpha_k^2 \left( \frac{\tilde{c}_0 - 1}{r} J_1(\alpha_k r) \left[ \frac{\tilde{S}_4(\alpha_k z_1)}{v_1} + \frac{\tilde{S}_5(\alpha_k z_2)}{v_2} \right] + \alpha_k J_0(\alpha_k r) \left[ \frac{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0}{v_1} \tilde{S}_4(\alpha_k z_1) + \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_0}{v_2} \tilde{S}_5(\alpha_k z_2) \right] \right) \right\} \right\rangle \chi_k$$

$$\text{де } F_k(i; x) = (\tilde{c}_0 - \tilde{c}_i) I_0(\gamma_k v_i x) + \frac{1 - \tilde{c}_0}{x \gamma_k v_i} I_1(\gamma_k v_i x), \quad \theta^+ = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}, \quad \theta_7 = \frac{(1 + \tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_1)}{v_1} + \frac{(1 + \tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_2)}{v_2},$$

$$b_2^{(k)} = \frac{2\epsilon \alpha_k^2 n_1 s_0 J_0(\mu_k) I_1(\gamma_k v_1 R)}{\omega_1 \gamma_k^3 H (m_1 s_0 - m_2) (v_2 I_1(\gamma_k v_1 R) F_k(2; R) - s_0 v_1 I_1(\gamma_k v_2 R) F_k(1; R))} \left[ \frac{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0}{v_1 (\alpha_k^2 + \gamma_k^2 n_1)} ch \left( \frac{\mu_k l}{v_1} \right) + \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_0}{v_2 (\alpha_k^2 + \gamma_k^2 n_2)} ch \left( \frac{\mu_k l}{v_2} \right) \right] \left( 2 + \frac{n_2}{n_1 s_0} \right),$$

$$\begin{aligned}\tilde{S}_2(\alpha_k z_1) &= \frac{n_1 R^2 s_0 \varepsilon}{\omega_1 \mu_k^2 (m_1 s_0 - m_2)} \left[ cth \left( \frac{\mu_k l}{v_1} \right) sh(\alpha_k z_1) - ch(\alpha_k z_1) \right], \\ \tilde{S}_4(\alpha_k z_1) &= \frac{n_1 R^2 s_0 \varepsilon}{\omega_1 \mu_k^2 (m_1 s_0 - m_2)} \left[ cth \left( \frac{\mu_k l}{v_1} \right) ch(\alpha_k z_1) - sh(\alpha_k z_1) \right], \\ \tilde{S}_3(\alpha_k z_2) &= \frac{n_2 R^2 \varepsilon}{\omega_1 \mu_k^2 (m_1 s_0 - m_2)} \left[ ch(\alpha_k z_2) - cth \left( \frac{\mu_k l}{v_2} \right) sh(\alpha_k z_2) \right], \\ \tilde{S}_5(\alpha_k z_2) &= \frac{n_2 R^2 \varepsilon}{\omega_1 \mu_k^2 (m_1 s_0 - m_2)} \left[ sh(\alpha_k z_2) - cth \left( \frac{\mu_k l}{v_2} \right) ch(\alpha_k z_2) \right].\end{aligned}$$

Напружено-деформівний стан у пружному шарі з початковими (залишковими) напруженнями для нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$  визначимо з [8] через гармонійні функції у вигляді інтегралів Ханкеля. Задовольнивши третю умову (2), другу – (3) і умови (5), (6), після ряду перетворень матимемо

$$\begin{aligned}u_3^{(2)} &= \frac{1}{\omega_1} \left( \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta \rho) d\eta - \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} G(\eta h) J_0(\eta \rho) d\eta \right) \\ Q_{33}^{(2)} &= \frac{2\omega_2}{R} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta; \quad Q_{3r}^{(2)} = 0,\end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{де } s_0 = \frac{1+m_2}{1+m_1}; \quad s_1 = \frac{m_1-1}{m_1}; \quad s_2 = \frac{m_2}{m_1} \frac{v_1}{v_2}; \quad s_3 = s_0 \frac{v_1}{v_2}; \quad s = s_0 \frac{l_2}{l_1}; \quad \omega_2 = C_{44} l_1 (1+m_1)(s-s_3)$$

$$G(\eta h) = 1 - q_i^{-1}(\eta h); \quad h = H_1/R; \quad \varphi_i = 2\eta \frac{h}{\sqrt{n_i}}; \quad \omega_1 = \frac{v_1}{m_1(s_1 - s_3)};$$

$$q_i = \begin{cases} s(cth\varphi_2 - s_3 cth\varphi_2) & \text{для (5);} \\ \frac{(s_2 + ss_3) - (s + s_2 s_3) sh\varphi_2 ch\varphi_1 + (s_3 + ss_2) ch\varphi_2 sh\varphi_1}{(s_2 sh\varphi_1 sh\varphi_2 - ch\varphi_1 ch\varphi_2)} & \text{для (6).} \end{cases} \quad (11)$$

В (11) значення коефіцієнтів  $n_i$ ,  $m_i$ ,  $c_{44}$ ,  $l_i$  наведені у [8].

**Метод розв'язання.** Використовуючи розв'язки для циліндра (8)–(9) й задовольняючи третю умову (2) та другу умову (4), знайдемо власні значення задачі (1)–(6) для випадку нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$

$$\gamma_k = \frac{\pi(2k+1)}{H}, \quad \alpha_k = \frac{\mu_k}{R}, \quad \text{де } J_1(\mu_k) = 0. \quad (12)$$

З допомогою перших умов (2) і (3) можна визначити невідому функцію  $F(\eta)$  з парних інтегральних рівнянь для нерівних коренів

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta \rho) d\eta &= f(\rho), \quad (\rho < 1), \\ \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta &= 0, \quad (\rho > 1),\end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{де } f(\rho) = \varepsilon \sum_{k=1}^\infty \chi_k J_0(\mu_k \rho) + \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} G(\eta h) J_0(\eta \rho) d\eta.$$

Застосування формули звернення до (13) призводить до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно функції  $F(\eta)$

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = \frac{2\varepsilon}{\pi} \sum_{k=1}^\infty \chi_k \psi_0(\eta, \mu_k) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{F(u)}{u} G(uh) \psi_0(\eta u) du, \quad (14)$$

де

$$\psi_n(x, y) = \int_0^1 t^n \cos xt \cos ytdt, \quad \psi_0(x, y) = \frac{x \sin x \cos y - y \sin y \cos x}{x^2 - y^2}, \quad \psi_0(x, 0) = \frac{\sin x}{x}.$$

Задовольнивши другу граничну умову (2), матимемо

$$\int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta) d\eta = \frac{3E}{\omega_5 l} \chi_0, \quad \chi_k = -\frac{\omega_1 \mu_k^2 (m_1 s_0 - m_2) F_k}{\varepsilon R^2 s_0 n_1}.$$

$$\int_0^{\infty} F(\eta) d\eta \int_0^1 \rho J_0(\eta \rho) J_0(\mu_k \rho) d\rho = \frac{R^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} t_{nk}^* B_n + \tau_k^* \chi_k,$$

де  $\omega_5 = \frac{v_1 v_2 (s - s_0)}{(v_2 - v_1 s)},$   $t_{nk}^* = I_1(\gamma_n v_2 R) \gamma_n^4 \left[ \frac{v_2 s J_0(\mu_k)}{\mu_k^2 + \gamma_n^2 v_1^2 R^2} - \frac{v_1^3 s_0}{\mu_k^2 + \gamma_n^2 v_1^2 R^2} \right],$

$$\tau_k^* = \frac{\varepsilon \mu_k s_0 J_0^2(\mu_k) n_1}{4 \omega_1 (m_1 s_0 - m_2)} \left[ \frac{l_2 v_2}{l_1 n_1} \operatorname{cth} \left( \frac{\mu_k l}{v_2} \right) - \frac{1}{v_1} \operatorname{cth} \left( \frac{\mu_k l}{v_1} \right) \right].$$

$$B_k = -\frac{2 \varepsilon \alpha_k^2 n_1 s_0 J_0(\mu_k) I_1(\gamma_k v_1 R)}{\omega_1 \gamma_k^3 H(m_1 s_0 - m_2) (v_2 I_1(\gamma_k v_1 R) F(2) - s_0 v_1 I_1(\gamma_k v_2 R) F(1))} \left[ \frac{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0}{v_1 (\alpha_k^2 + \gamma_k^2 n_1)} \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k l}{v_1} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_0}{v_2 (\alpha_k^2 + \gamma_k^2 n_2)} \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k l}{v_2} \right) \left( 2 + \frac{n_2}{n_1 s_0} \right) \right] \chi_k$$

Розв'язок (14) будемо шукати методом послідовних наближень, взявши за нульове наближення функцію

$$\frac{F^{(0)}(\eta)}{\eta} = \frac{2}{\pi} p(\eta),$$

де  $p(\eta) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \psi_0(\mu_k, \eta).$

Наступні наближення визначимо за формулою

$$\frac{F^{(n)}(\eta)}{\eta} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F^{(n-1)}(u)}{u} G(uh) J_0(\eta u) du$$

Розв'язок (14) запишемо у вигляді

$$F(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(\eta). \quad (15)$$

Відзначимо, що процес послідовних наближень (15) збіжний при  $h > 1$ , але зважаючи на громіздкість доведення його тут не наводимо.

Задовольнивши перші дві граничні умови (2) з урахуванням ортогональності бesselевих функцій  $J_0(\mu_k \rho)$  та значень інтеграла

$$\int_0^{\infty} \psi_0(\eta, \mu_k) J_1(\eta) d\eta = \psi_0(0, \mu_k).$$

Для визначення сталих  $\chi_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь

$$\alpha_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{kn} \chi_n = \beta_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (16)$$

Коефіцієнти системи можна представити у вигляді

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0; \quad \vartheta_{00} = \frac{3E}{\omega_5 l};$$

$$\vartheta_{0n} = \frac{2\varepsilon}{\pi} \left[ \psi_0(0, \mu_n) + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} G(hu) \psi_{j-1}(u, \mu_n) du \right];$$

$$\alpha_k = -\tau_k^*; \quad \alpha_{k0} = \beta_k = \frac{4}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\Psi_{j-1}(u, \mu_k)}{u} G(hu) \psi_{j-1}(u, 0) du;$$

$$\alpha_{kn} = \frac{2}{\pi} \left[ \psi_0(\mu_n, \mu_k) - \frac{R^2 \pi}{4} \sum_{m=1}^{\infty} t_{km}^* B_m + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\Psi_{j-1}(u, \mu_k)}{u} G(hu) \psi_{j-1}(u, \mu_k) du \right], \quad (17)$$

де  $\psi_j(\eta, \mu_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos \eta t dt \int_0^{\infty} \frac{\Psi_{j-1}(u, \mu_n)}{u} G(uh) \cos ut du.$

При обчисленні функції (15) й коефіцієнтів (17) більшість інтегралів у кінцевому вигляді не обчислюються, враховуючи складність функцій  $q_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ). Тому, починаючи із другого наближення, підінтегральні функції розкладаються у ряди по степенях  $\frac{1}{h}$ , що дозволить обчислити коефіцієнти системи (17) наближено. Для шару, що лежить на жорсткій основі без тертя (5), при  $n_1 = n_2$ , апроксимуємо функцію  $q_1^{-1}(x)$  виразом

$$q_1^{-1}(x) \cong 1 - \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\kappa} \frac{\theta^-}{\theta^+} + 1} \frac{sh(x\theta^-)}{sh(x\theta^+)} - \frac{0,28\tilde{\kappa}^2}{1 + \tilde{\kappa}^2 \frac{\theta^-}{\theta^+}} \frac{sh(x\theta^-)}{sh(x\theta^+)}, \quad (18)$$

де  $\tilde{\kappa} = s - s_0$ ,  $\theta^\pm = \frac{1}{v_1} \pm \frac{1}{v_2}$ .

Використовуючи умову рівноваги, встановимо зв'язок між осадом торця штампа та рівнодіючою навантаження  $P$

$$P = \frac{6\pi R^2 E}{\omega_5 l} \chi_0.$$

Визначивши невідомі сталі  $\chi_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) із системи (16), можна обчислити напружено-деформівний стан як у пружному штампі, так і в шарі за формулами (8) – (10), (15).

У результаті цього розв'язок представлений у вигляді рядів через нескінченну систему констант, що визначаються із системи регулярних лінійних алгебраїчних рівнянь. Причому в системі (16) коефіцієнти  $\vartheta_k$  і  $\vartheta_{kn}$  залежать від структури пружного потенціалу, висоти пружного штампа  $H$ , і товщини попередньо напруженого шару, а вільні члени залежать від коренів  $n_1, n_2$ .

**Чисельний аналіз.** З урахуванням (18) система (16) розв'язана методом редукції для потенціалу Трелоара (неогуківські тіла) при таких значеннях параметрів:  $k=n=16$ ;  $\nu = \nu_1 = 0,3$ ;  $l=10$ ;  $\lambda_1 = 0,7; 0,8; 1; 1,1; 1,2$ ;  $\delta = 24$ ;  $\left( \delta = \frac{E}{c_{10}} \right)$ . На рис. 2 представлений розподіл контактного напруження під штампом  $\frac{\pi R^2}{P} \tilde{Q}_{33}$ , де значенням  $\lambda_1$  відповідають лінії, починаючи знизу доверху, а на рис. 3 – розподіл контактного переміщення  $\frac{1}{\varepsilon} U_3$ , де значенням  $\lambda_1$  відповідають лінії, починаючи зверху донизу.

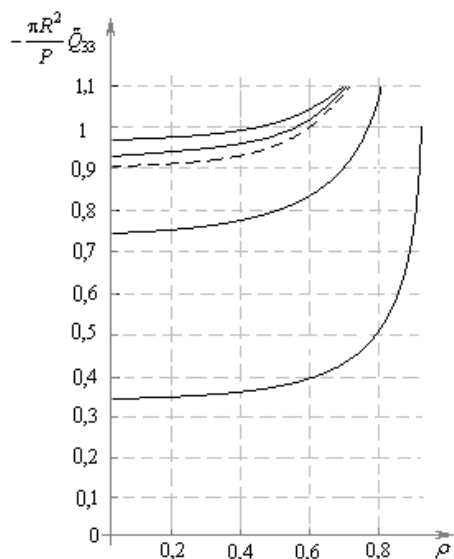


Рисунок 2. Розподіл контактного

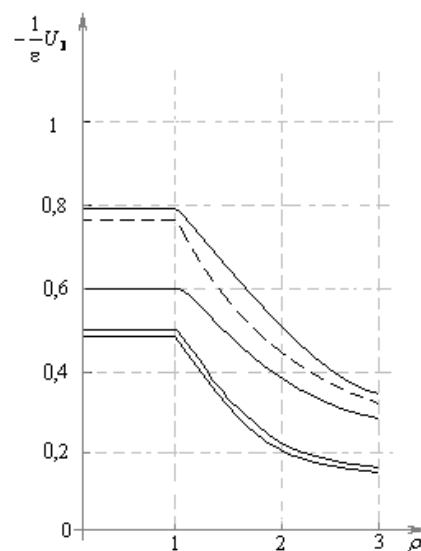


Рисунок 3. Розподіл контактного

**Figure 2.** Distribution of contact stresses**Figure 3.** Distribution resistance movement under the stamp

На рисунку 2, 3 пунктирні лінії відповідають переміщенню і напруженню без початкових напружень ( $\lambda_1 = 1$ ), суцільні – з початковими (залишковими) напруженнями.

**Висновки.** Для потенціалів, що відповідають нерівним кореням  $n_1 \neq n_2$  (потенціал Трелоара – тіло неогуківського типу), при  $\lambda_1 = 1$  представлений у статті розв'язок у рамках лінеаризованої теорії пружності з урахуванням початкових напружень не співпадає з аналогічним розв'язком для лінійного трансверсально-ізотропного тіла (без початкових напружень), оскільки не співпадають відповідні їх загальні розв'язки.

Вплив початкових напружень на напружено-деформований стан пружного циліндра, що втискається у пружний шар, полягає у тому, що: початкові напруження в шарі призводять у випадку стиснення до зменшення напружень у пружному штампі, а у випадку розтягу – до їх збільшення, а для переміщень – навпаки; найбільший вплив початкових напружень виявлено на боковій поверхні штампа.

Початкові напруження у пружному шарі призводять до суттєвої зміни закону розподілу контактних напружень. При цьому у випадку стискання контактні напруження значно зменшуються, а у випадку розтягнення – збільшуються. Переміщення ж у випадку стискання значно збільшуються, і при розтягненні – зменшуються.

Характер впливу початкових напружень не залежить від товщини шару. Дія початкових напружень впливає тільки на їх величину.

Суттєвіший вплив кількісного характеру початкові (залишкові) напруження створюють у високоеластичних матеріалах порівняно з жорсткішими матеріалами; якісний вплив має ідентичний характер.

При наближенні початкових (залишкових) напружень до значень, що відповідають поверхневій нестійкості шару, з'являються ефекти «резонансного» характеру не тільки у шарі, але й у пружному циліндрі, які полягають у тому, що напруження наближаються до нуля, а переміщення необмежено зростають.

**Conclusions.** For potentials that correspond to unequal roots  $n_1 \neq n_2$  (Treloar potential – neo Hooke body type), at  $\lambda_1 = 1$  represented in the article solution within linearized elasticity theory considering initial stress does not coincide with the similar solution for linear transversally isotropic body (without initial stresses) as they do not match the corresponding general solutions.

Influence of initial stresses on the stress-strain state of an elastic cylinder punch, which is pressed into an elastic layer, is that the initial stress in the layer in the case of compression reduce the stress in the elastic punch, and in the case of stretching increase it. For displacements, on the contrary, the greatest impact of initial stress was found on the side of punch surface.

Initial tension in an elastic layer leads to a significant change in the law of distribution of contact stresses, while in the case of compression contact stresses are significantly reduced, in the case of stretching – increased; displacement in the case of compression significantly increases, and in the case of tension it is reduced.

The nature of the influence of initial stress is irrespective of the layer thickness. The effect of initial stress affects only its value.

A significant influence of quantitative initial (residual) tension is created in the highly elastic materials compared to more rigid materials; the qualitative effect is similar.

When initial stresses approach the values that correspond to the surface layer instabilities, effects of the “resonant” character appear not only in the layer, but also in the elastic cylinder. This means that tension vanish and displacements increase indefinitely.

## Список використаної літератури

1. Гузь, А.Н. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями (жесткие штампы) [Текст] / А.Н. Гузь, С.Ю. Бабич, В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1989. – №8. – С. 3 – 18.
2. Гузь, А.Н. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями (упругие штампы) (обзор) [Текст] / А.Н. Гузь, С.Ю. Бабич, В.Б. Рудницкий // Прикл.механика. – 1991. – Т. 27, №9. – С. 3 – 28.
3. Guz, A.N. Contact problems for elastic bodies with initial stresses. Focus on Ukrainian research / A.N. Guz, S.Y. Babich, V.B. Rudnitsky // Apple Mech. Rev. Vol. 51, nos May 1998. – P. 343 – 371.
4. Гузь, А.Н. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями [Текст] / А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий. – Хмельницький, вид. ПП Мельник. – 2006. – 710 с.
5. Рудницкий, Т.В. Контактное взаимодействие конечного цилиндрического штампа и полупространства с начальными (остаточными) напряжениями [Текст] / Т.В. Рудницкий // Сборник международной конференции «Современные проблемы механики», посвященный 100-летию Л.А. Галина. Тезисы докладов. – Москва. – 2012. – С. 90
6. Бабич, С.Ю. К вопросу контактной задачи для предварительно напряженного слоя [Текст] / С.Ю. Бабич, В.Б. Рудницкий // Прикл.механика. – 1987. – 23, №5. – С. 110 – 112.
7. Гузь, А.Н. Контактная задача о давлении упругого штампа на упругое полупространство с начальными напряжениями [Текст] / А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий // Прикл.механика. – 1984. – 20, №8. – С. 3 – 11.
8. Гузь, А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями [Текст] / А.Н. Гузь. – Киев: Наук. думка, 1983. – 286 с.

*Отримано 23.04.2013*