Максимчук Д.М.
Хмельницький національний університет,
м. Хмельницький, Україна
E-mail: maximchukd@ukr.net

ЛІНЕАРИЗОВАНА ЗАДАЧА ПРО ТИСК ДВОХ СПІВВІСНИХ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ЦИЛІНДРІВ НА ПРУЖНІЙ ШАР З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ

УДК 539.3

У рамках лінеаризованої теорії пружності розглянуто осесиметричну задачу про тиск двох співвісних циліндричних штампів з початковими напруженнями, що тиснуть на шар з початковими напруженнями. Дослідження представлені у загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Ключові слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, перетворення Хенкеля, інтегральні рівняння Фредгольма, метод послідовних наближень.

Вступ

У сучасних умовах стрімкого розвитку науки і техніки дослідження впливу початкових напружень на контактні характеристики пружних тіл, що взаємодіють, є актуальною проблемою як для фундаментальних розробок з механіки деформівного твердого тіла, так і для практичного використання у різних галузях промислового комплексу. Особливо це стосується розрахунку важких фундаментних плит і будівельних перекриттів, що знаходяться в полі дії гравітаційних сил тощо. Тому є досить актуальним проведення нових теоретичних досліджень впливу початкових (залишкових) напружень на контактну взаємодію пружних тіл.

Не зважаючи на існуючі досягнення в теорії контактної взаємодії пружних тіл, все ще залишаються недостатньо розроблені ряд проблем. Серед них – контактна осе симетрична взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями, а саме: тиску двох попередньо напружених співвісних штампів на шар з початковими (залишковими) напруженнями. Оскільки один із аспектів сучасної проблеми передавання навантаження пов'язаний із якісно новим підходом – врахуванням залишкових напружень у тілах на закон розподілу тиску в місцях їх дотику, то розрахунок важливих елементів конструкцій та їх створення дозволить ефективніше враховувати міцність матеріалів шляхом правильного оцінювання запасів міцності та достатньо знижувати їх матеріаломісткість, зберігаючи у цілому потрібні функціональні характеристики.

На сьогодні для проблем, які відносяться до контактних задач пружних тіл, у рамках класичних постановок отримано результати досліджень, що охоплюють широке коло питань. Вони достатньо відображені у численних публікаціях періодичних видань. Детальний огляд задач контактної взаємодії пружних тіл з початковими напруженнями представлений у роботах [1 - 4]. Дослідження питання контактної взаємодії кінечного циліндричного штампу на півпростір з початковими (залишковими) напруженнями розглянуто у роботі [5]. Задачі про тиск без тертя жорсткого кругового штампу на шар з початковими напруженнями присвячена робота [6], у якій лінеаризована осесиметрична задача розв'язана в загальному вигляді. У статті [7] розглянуто просторову задачу про тиск пружного штампу довільного поперечного перетину на пружний півпростір без урахування сил тертя, а в роботах [8 - 9] представлено розв'язки осесиметричної задачі про тиск попередньо напруженого циліндра скінченної довжини на пружний шар з початковими напруженнями при довільній структурі пружного потенціалу для стисливих і нестисливих тіл.

Мета і постановка задачі

Метою даної роботи є розв'язок осесиметричної статичної задачі про контактну взаємодію двох співвісних пружних циліндричних штампів з початковими напруженнями на пружний шар з початковими напруженнями. Розглянуто випадок коли шар деформується під дією тиску двох співвісних кругових штампів кінцевої довжини та різних радіусів і висоти без врахування сил тертя після виникнення у них початкового деформованого стану. Дослідження виконано у загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Постановка задачі: Нехай пружний необмежений шар з початковими напруженнями деформується під дією тиску двох співвісних попередньо напружених циліндричних штампів різної висоти і радіусів. Товщина шару в початковому деформованому стані пов'язана з товщиною у недеформованому стані відношенням $h_1 = \lambda_3 h_2$. Зовнішнє навантаження P викликає переміщення вільних торців в напрям-

ку осі симетрії Oy_3. Бокові поверхні штампів, а також поверхні шару за межею контакту вільні від зовнішніх зусиль. В області контакту тіл дотичними зусиллями нехтуємо.

Вважаємо, що початкові стани у шарі та штампах однорідні та рівні, а пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовні функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [4]. Крім того, дія штампів викликає в шарі мале збурення основного напруженого стану, для якого виконуються умови

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3, \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3.$$

Усі величини, які відносяться до верхнього та нижнього пружних штампів, будемо записувати з верхнім індексом (1) та (2), відповідно, а для пружного шару – без індексу.

Виклад матеріалів досліджень

Дослідження проводимо у координатах початкового деформованого стану Oy_i, які пов'язані з лагранжевими координатами співвідношеннями $y_i = \lambda_i x_i \quad (i = \overline{1,3})$.

Враховуючи дану постановку задачі, а також припускаючи, що пружні штампи виготовлені із різних ізотропних, трансверсально-ізотропних матеріалів, а переміщення торців штампів задано величинами ε_+ і ε_- – для визначення складових вектора переміщення і тензора напруження у пружних штампах і шарі, маємо наступні граничні умови:

1) на торцях пружних штампів з початковими напруженнями:

$$u_z^{(1)} = -\varepsilon_+; \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0; \quad \forall (r) \in [0, R_1], \quad y_3 = h + H_1, \tag{1}$$

$$u_z^{(2)} = -\varepsilon_-; \quad \tau_{rz}^{(2)} = 0; \quad \forall (r) \in [0, R_2], \quad y_3 = -h - H_2; \tag{2}$$

2) на боковій поверхні пружних штампів:

$$\sigma_z^{(1)} = 0; \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0; \quad \forall (y_3) \in [0, H_1], \quad r = R_1, \tag{3}$$

$$\sigma_z^{(2)} = 0; \quad \tau_{rz}^{(2)} = 0; \quad \forall (y_3) \in [0, H_2], \quad r = R_2; \tag{4}$$

3) на межі пружного шару в області контакту:

$$u_3 = u_z^{(1)}; \quad \widetilde{Q}_{33} = \sigma_z^{(1)}; \quad \widetilde{Q}_{3r} = t_{rz}^{(1)} = 0, \quad \forall (r) \in [0, R_1], \quad y_3 = -h_1, \tag{5}$$

$$u_3 = u_z^{(2)}; \quad \widetilde{Q}_{33} = \sigma_z^{(2)}; \quad \widetilde{Q}_{3r} = t_{rz}^{(2)} = 0, \quad \forall (r) \in [0, R_2], \quad y_3 = -h_2; \tag{6}$$

4) на межі пружного шару поза областю контакту:

$$\widetilde{Q}_{33} = \widetilde{Q}_{3r} = 0, \quad \forall (r) \in [r, +\infty], \quad y_3 = \pm h. \tag{7}$$

Умови рівноваги приводять до співвідношення:

$$\int_0^{R_1} \rho \, Q_{33}(0,\rho)\Big|_{y_3 = h_1} d\rho = \int_0^{R_2} \rho \, Q_{33}(0,\rho)\Big|_{y_3 = h_2} d\rho.$$

А рівнодіюча зовнішніх сил визначаються рівністю:

$$P = -2\pi \int_0^{R_1} \rho \, Q_{33}(0,\rho)\Big|_{y_3 = h_1} d\rho = -2\pi \int_0^{R_2} \rho \, Q_{33}(0,\rho)\Big|_{y_3 = h_2} d\rho.$$

Крім того, у випадку осесиметричної задачі використовуємо циліндричні координати (r, θ, z_i), де $z_i = y_3 n_i^{-0,5}$.

Загальний розв'язок $\tilde{\chi}^{(i)} = \tilde{\chi}_1^{(i)} + \nu_1 z_1 \tilde{\chi}_2^{(i)}$ поставленої задачі для випадку рівних коренів $n_1 = n_2$ будемо шукати у вигляді

$$\tilde{\chi}^{(i)} = \varepsilon_\pm \Big\langle \nu_1 z_1 (1 + z_1) \Big[(m_2 - 1)^{-1} + \chi_0^{(i)} \Big((1 - m_2)^{-1} - 2E^{(i)} (3H^{(i)} \theta_2^{(i)})^{-1} (3r^2 - 2z_1^2) \Big) \Big] +$$

$$+ R^{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k^{(i)} \Big[J_0(\alpha_k r) \mu_k^{-1} \Big(\tilde{S}_2(\alpha_k^{(i)} z_1) + z_1 \tilde{S}_3(\alpha_k^{(i)} z_1) \Big) +$$

$$+ R^{(i)} (2\gamma_k)^{-1} b_{1k}^{(i)} \Big[H^{(i)} \Big[1 + \frac{s_0 (1 - I_0(\nu_1 \gamma_k R^{(i)}))}{\nu_1 \gamma_k R^{(i)} I_1(\nu_1 \gamma_k R^{(i)})} \Big] + z_1 I_0(\gamma_k \nu_1 r) S_1(\gamma_k z_1 \nu_1) \Big] \Big\rangle. \tag{8}$$

Для визначення напружено-деформівного стану у пружних циліндрах використовуємо лінеаризовані рівняння [4] з яких випливають вирази для компонент вектора переміщення і тензора напруження для стисливих і нестисливих тіл.

$$u_3^{(i)} = \varepsilon_{\pm}\left\{(m_2-1)v_1^{-1} + \left[1 - 2E^{(i)}(H^{(i)}\theta_2^{(i)})^{-1}\left(r^2 - 2z_1^2 + 4m_1 z_1\left(v_1^{-1}+z_1\right)\right)\right]\chi_0^{(i)} + \right.$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\chi_k^{(i)}\left[0{,}5R^{(i)2}b_{2k}^{(i)}\gamma_k I_0(\gamma_k v_1 r)\left(H^{(i)}\left(1+\frac{s_0(1-I_0(v_1\gamma_k R^{(i)}))}{v_1\gamma_k R^{(i)}I_1(v_1\gamma_k R^{(i)})}\right)+v_1 z_1\right)m_1\sin(\gamma_k v_1 z_1)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(1-m_2)}{\gamma_k}\cos(\gamma_k v_1 z_1)\right] - \frac{J_0(\alpha_k^{(i)}r)}{n_1}\left[m_1\alpha_k\left(\tilde{S}_2\left(\alpha_k^{(i)}z_1\right)+z_1 v_1\tilde{S}_3\left(\alpha_k^{(i)}z_1\right)\right)+(m_2-1)v_1\tilde{S}_5\left(\alpha_k^{(i)}z_1\right)\right]\right\},$$

$$\sigma_3^{(i)} = C_{44}\varepsilon_{\pm}\left\{-8E^{(i)}v_1(H^{(i)}\theta_2^{(i)}R^{(i)2})^{-1}\chi_0^{(i)}\left[(1+m_1)l_1\left(v_1^{-1}+z_1\right)+(1+m_2)l_2 z_1\right]+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\chi_k^{(i)}\left[0{,}5R^{(i)2}b_{2k}^{(i)}\gamma_k n_1 I_0(\gamma_k v_1 r)\left[(1+m_1)l_1\gamma_k\left(H^{(i)}\left(1+\frac{s_0(1-I_0(v_1\gamma_k R^{(i)})}{v_1\gamma_k R^{(i)}I_1(v_1\gamma_k R^{(i)})}\right)+v_1 z_1\right)\cos(\gamma_k v_1 z_1)+(1+m_2)l_2\sin(\gamma_k v_1 z_1)\right]-\right.$$

$$\left.\left.-\alpha_k^{(i)}J_0(\alpha_k^{(i)}r)\left[(1+m_1)\frac{l_1}{v_1}\alpha_k^{(i)}\left(\tilde{S}_4\left(\alpha_k^{(i)}z_1\right)+v_1 z_1\tilde{S}_5\left(\alpha_k^{(i)}z_1\right)\right)+(1+m_2)l_2\tilde{S}_3\left(\alpha_k^{(i)}z_1\right)\right]\right\}. \qquad (9)$$

$$\tau_{3r}^{(i)} = C_{44}\varepsilon_{\pm}\left\{\frac{4E^{(i)}r(1+m_2)}{H^{(i)}\theta_2^{(i)}}\chi_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty}\chi_k^{(i)}\left[\frac{R^{(i)2}}{2}\gamma_k v_1 b_{2k}^{(i)}I_1(\gamma_k v_1 r)\left[(1+m_1)\gamma_k\left(H^{(i)}\left(1+\frac{s_0(1-I_0(v_1\gamma_k R^{(i)}))}{v_1\gamma_k R^{(i)}I_1(v_1\gamma_k R^{(i)})}\right)+v_1 z_1\right)\sin(\gamma_k v_1 z_1)-(1+m_2)\cos(\gamma_k v_1 z_1)\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\alpha_k^{(i)}}{v_1}J_1(\alpha_k^{(i)}r)\left[\alpha_k^{(i)}(1+m_1)\left(\tilde{S}_2\left(\alpha_k^{(i)}z_1\right)+v_1 z_1\tilde{S}_3\left(\alpha_k^{(i)}z_1\right)\right)+(1+m_2)\tilde{S}_5\left(\alpha_k^{(i)}z_1\right)\right]\right\},$$

де $i=1,\ 2;$, $\theta_2^{(i)} = E^{(i)}\left(8m_1(1+H^{(i)})n_1^{-1} - 4H^{(i)}v_1^{-1} + (1-m_2)R^{(i)2}H^{-(i)}\right)$, $s_0 = \dfrac{1+m_2}{1+m_1}$,;

$m_1 = \begin{cases}(\omega\breve{y}_{111}n_1 - \omega\breve{y}_{3113})(\omega\breve{y}_{133}+\omega\breve{y}_{313})^{-1};\\ \lambda_1 q_1 n_1(\lambda_3 q_3)^{-1};\end{cases}$ $m_2 = \begin{cases}(\omega\breve{y}_{133}-\omega\breve{y}_{313})(\omega\breve{y}_{133}+\omega\breve{y}_{313})^{-1},\\ 1,\end{cases}$ $C_{44} = \begin{cases}\omega\breve{y}_{1313},\\ \kappa'_{1313}.\end{cases}$

$l_1 = \begin{cases}\omega\breve{y}_{1313}^{-1}(\omega\breve{y}_{331}+(\omega\breve{y}_{313}-\omega\breve{y}_{331})(\omega\breve{y}_{133}+\omega\breve{y}_{313})(\omega\breve{y}_{111}n_1+\omega\breve{y}_{133})^{-1});\\ \kappa'^{-1}_{1313}(\kappa'_{1331}+\lambda_3 q_3(\kappa'_{1313}-\kappa'_{1331})(\lambda_3 q_3+\lambda_1 q_1 n_1)^{-1});\end{cases}$

$l_2 = \begin{cases}(\omega\breve{y}_{3333}(m_1+m_2-1)-\omega\breve{y}_{133}n_1)(n_1\omega\breve{y}_{313}(1+m_2))^{-1},\\ (\kappa'_{3333}m_1+(\lambda_1^{-1}q_1^{-1}\lambda_3 q_3\kappa'_{1111}-2\kappa'_{1133}-\kappa'_{1313})n_1-3\lambda_1^{-1}q_1^{-1}\lambda_3 q_3\kappa'_{3113})(2n_1\kappa'_{1313})^{-1},\end{cases}$

$\omega\breve{y}_{m\alpha\beta} = \omega\breve{y}_{m\alpha\beta}(S_{11}^0, S_{22}^0, S_{33}^0)$, $\kappa\breve{y}_{m\alpha\beta} = \kappa\breve{y}_{m\alpha\beta}(S_{11}^0, S_{22}^0, S_{33}^0)$ – складові тензора модулів пружності четвертого порядку, λ_i – коефіцієнти видовження вздовж координатних осей y_i;

$$\tilde{S}_2(\alpha_k^{(i)} z_1) = R^{(i)} s_0 \mu_k^{-1} ch(\mu_k z_1 R^{-(i)}) + E^{(k,i)} sh(\mu_k z_1 R^{-(i)}),$$

$$\tilde{S}_3(\alpha_k^{(i)} z_2) = -sh(\mu_k z_1 R^{-(i)}) - M^{(k,i)} ch(\mu_k z_1 R^{-(i)}),$$

$$\tilde{S}_4(\alpha_k^{(i)} z_1) = R^{(i)} s_0 \mu_k^{-1} sh(\mu_k z_1 R^{-(i)}) + E^{(k,i)} ch(\mu_k z_1 R^{-(i)}),$$

$$\tilde{S}_5(\alpha_k^{(i)} z_2) = -ch(\mu_k z_1 R^{-(i)}) - M^{(k,i)} sh(\mu_k z_1 R^{-(i)}),$$

$E^{(k,i)}, M^{(k,i)}, b_{2k}^{(i)}$ – величини, які виражаються із граничних умов (1) - (7).

Напружено-деформівний стан у пружному шарі з початковими (залишковими) напруженнями для рівних коренів $n_1 = n_2$ визначимо з [4] через гармонійні функції у вигляді інтегралів Ханкеля. Задовольнивши граничні умови (1) і (2), після ряду перетворень при $y_3 = (-1)^{i+1} h_1$ $(i = 1, 2)$ матимемо:

$$u_3 = \omega_2 \left(\int_0^\infty \frac{\tilde{Q}(\xi)}{\xi} J_0(\xi\rho) d\xi - \int_0^\infty \frac{\tilde{Q}(\xi)}{\xi} \tilde{K}(\xi h^{(i)}) J_0(\xi\rho) d\xi \right). \quad Q_{33} = \omega_1 \int_0^\infty \tilde{Q}(\xi) J_0(\xi\rho) d\xi, \qquad (10)$$

де $\omega_1 = C_{44} l_1 (1 + m_1)\kappa$, $h^{(i)} = h_1^{(i)} / R^{(i)}$, $\varphi_i = 2\xi h^{(i)} v_i^{-1}$, $\omega_2 = m_1 (s_1 - s_0) v_1^{-1}$.

У співвідношеннях (10) введено позначення:

$$\tilde{Q}(\xi) = \xi^3 B_2 R^{-3(i)} (1 - \tilde{K}(\xi))^{-1}.$$

$$\tilde{K}(t) = \kappa \left(t - e^{-t} + 1 \right) (t + \kappa sht)^{-1}, \quad \kappa = s_0 - s, \quad t = 2h^{(i)} \xi v_1^{-1}.$$

Використовуючи розв'язки для циліндра (9) й задовольняючи граничні умови (1) - (7), знайдемо власні значення задачі для випадку рівних коренів $n_1 = n_2$:

$$\gamma_k = 2\pi k H^{-(i)}, \quad \alpha_k^{(i)} = \frac{\mu_k^{(i)}}{R^{(i)}}, \text{ де } J_1(\mu_k^{(i)}) = 0 \quad (k = 0,1,2,...). \qquad (11)$$

Враховуючи граничні умови, сталі $\chi_k^{(i)}$ визначимо із системи парних інтегральних рівнянь:

$$\int_0^\infty \frac{\tilde{Q}(\xi)}{\eta} J_0(\xi\rho) d\xi = f(\rho), \quad (\rho < 1),$$

$$\int_0^\infty \tilde{Q}(\xi) J_0(\xi\rho) d\xi = 0, \quad (\rho > 1) \qquad (12)$$

$$f(\rho) = -\varepsilon_\pm \omega_2^{-1} \left(1 - \chi_0^{(i)} - 2(m_2 - 1) R^{2(i)} \theta_2^{-1} \chi_0^{(i)} \rho + \omega_3 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k^{(i)} J_0(\mu_k \rho) + \right.$$

$$\left. + 0,5(m_2 - 1) R^{2(i)} \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k}^{(i)} \chi_k^{(i)} I_0(\gamma_k v_1 R^{(i)} \rho) \right) + \int_0^\infty \xi^{-1} \tilde{Q}(\xi) \tilde{K}(\xi h^{(i)}) J_1(\xi\rho) d\xi,$$

де $\omega_3 = (v_1 (m_2 - 1) - m_1 s_0) n_1^{-1}$.

Та зведемо (12) до інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду відносно функції $\tilde{Q}(\xi)$:

$$\xi^{-1} \tilde{Q}(\xi) = -\frac{2}{\pi \omega_2} p(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tilde{Q}(u) \tilde{K}(uh^{(i)}) \psi_0(\xi, u)}{u} du, \qquad (13)$$

$$p(\xi) = \varepsilon_\pm \left(\left(1 - \chi_0^{(i)} \right) \psi_0(\xi, 0) - 2(m_2 - 1) R^{2(i)} \theta_2^{-1} \chi_0^{(i)} \psi_1(\xi, 0) + \omega_3 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k^{(i)} \psi_0(\xi, \mu_k) + \right.$$

$$\left. + 0,5(m_2 - 1) R^{2(i)} \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k}^{(i)} \chi_k^{(i)} \psi_0(\xi, i\gamma_k v_1 R^{(i)}) \right),$$

де $\psi_n(x, y) = \int_0^1 t^n \cos xt \cos yt dt$.

Пропускаючи деякі викладки, матимемо

$$\int_0^{\infty} \xi^{-1}\tilde{Q}(\xi)J_1(\xi)d\xi = -8\varepsilon_{\pm}E^{(i)}(\kappa\theta_2^{(i)}l^{(i)}R^{(i)})^{-1}\chi_0^{(i)}, \quad \chi_k^{(i)} = -\mu_k N_k(\varepsilon_{\pm}R^{(i)})^{-1}. \tag{14}$$

Систему (13) будемо шукати методом послідовних наближень. При $R^{(1)} = R^{(2)} = R$, тоді дана задача співпадає із задачею про тиск пружного циліндричного штампу радіуса R на пружний шар з початковими напруженнями [8 - 9]. Нульовим наближенням для $\tilde{Q}(\xi)$ буде:

$$\xi^{-1}\tilde{Q}^{(0)}(\xi) = -2(\pi\omega_2)^{-1}p(\xi), .$$

Наступні наближення визначимо за формулою:

$$\xi^{-1}\tilde{Q}^{(k)}(\xi) = 2\pi^{-1}\int_0^{\infty} u^{-1}\tilde{Q}^{(k-1)}(\xi)\tilde{K}(uh^{(i)})\psi_0(\xi,u)du.$$

Розв'язок (13) запишемо у вигляді:

$$\tilde{Q}_i(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{Q}_i^{(k)}(\xi), \ (i=1, 2). \tag{15}$$

Аналогічно [8 - 9], для визначення сталих $\chi_k^{(i)}$ $\chi_k^{(i)}$ $(k = 0,1,2,..,\ i=1,2)$ отримаємо нескінченні квазірегулярні системи алгебраїчних рівнянь:

$$\alpha_k^{(i)}\chi_k^{(i)} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{kn}^{(i)}\chi_n^{(i)} = \beta_k^{(i)} \quad (k = 0,1,2,..,\ i=1, 2). \tag{16}$$

При обчисленні функції (15) й коефіцієнтів (16) більшість інтегралів у кінцевому вигляді не обчислюються. Тому, починаючи із другого наближення, підінтегральні функції розкладаються у ряди по степенях $h^{-(i)}$, що дозволяє обчислити коефіцієнти систем (16) наближено.

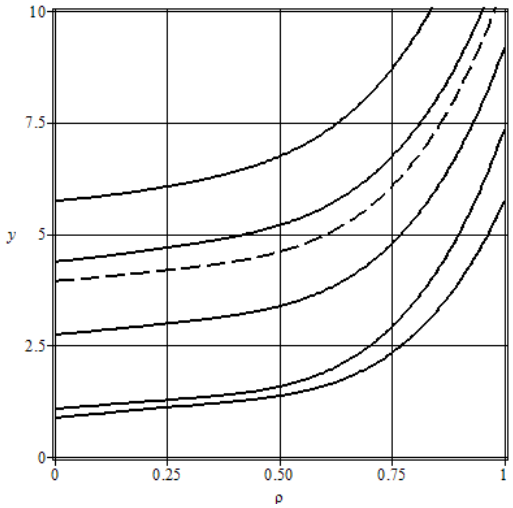
Використовуючи умову рівноваги, встановимо зв'язок між осадом торців штампів та рівнодіючою навантаження

$$P^{(i)} = 8\pi\varepsilon_{\pm}E^{(i)}\omega_1(\kappa\theta_2 l^{(i)}R^{(i)})^{-1}\chi_0^{(i)}, \ (i = 1, 2).$$

Визначивши невідомі сталі $\chi_k^{(i)}$ $\chi_k^{(i)}$ $(k = 0,1,2,..,\ i=1,2)$ із систем (16), можна обчислити напружено-деформівний стан як у пружних штампах, так і в шарі за формулами (9) - (10).

У результаті цього розв'язок представлений у вигляді рядів через нескінченну систему констант, що визначаються із систем регулярних лінійних алгебраїчних рівнянь.

Система (16) була розв'язана методом редукції для потенціалу Бартенєва-Хазановича при таких значеннях параметрів: $\nu = \nu_1 = 0,5;\ k = n = 32;\ l = 10;\ \lambda_1 = 0,7;\ 0,8;\ 1;\ 1,1;\ 1,2.$ На рис. 1 представлений розподіл контактних напружень під штампами $\pi R^{(i)2}P^{-(i)}\sigma_3^{(i)}$, а на рис. 2 – переміщення у пружних штампах $\varepsilon_{\pm}^{-1}u_3^{(i)}$ при ξ =0,75.



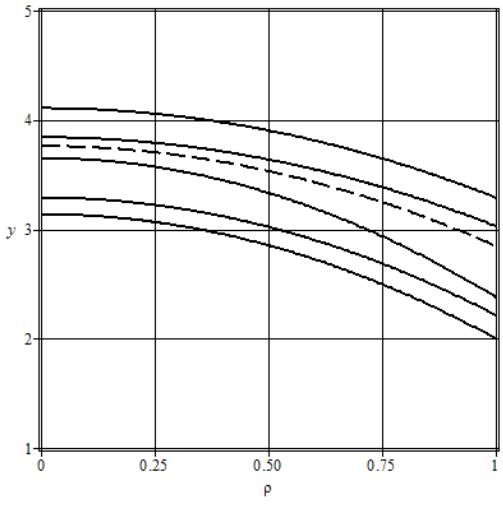


Рис. 1 – Розподіл контактних напружень під штампами

Рис. 2 – Переміщення у пружних штампах при ξ =0,75

На рис. 1, 2 пунктирні лінії відповідають переміщенню і напруженню при відсутності початкових напружень ($\lambda_1 = 1$), суцільні – з початковими напруженнями.

Висновки

У даній роботі в рамках лінеаризованої теорії пружності подано постановку та розв'язок осесиметричної статичної задачі про тиск двох співвісних скінченних циліндричних штампів з початковими напруженнями на попередньо напружений шар, для якої були сформульовані відповідні граничні умови. Всі дослідження виконані у загальній формі для теорії великих (скінченних) початкових деформацій і двох варіантів малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу для стисливих і нестисливих тіл.

Числова реалізація методу дослідження дала змогу графічно відобразити вплив початкових напружень на закон розподілу контактних характеристик попередньо напружених тіл для потенціалів найпростішої структури, який полягає у наступному:

1) початкові напруження при стиску призводять до зменшення сили напружень у циліндричних штампах, а при розтягненні – до їх збільшення, а для переміщень все відбувається навпаки;

2) найбільший вплив початкових напружень відзначений на бічній поверхні циліндричних штампів у зрізах $0 \le \xi \le 1$;

3) для пружного шару вплив початкових напружень аналогічний, причому на характер дії початкових напружень його товщина не впливає, а впливає лише на їх значення;

4) більш суттєво, у кількісному плані, початкові напруження діють у високоеластичних матеріалах у порівнянні із більш жорсткими, але якісно їхній вплив зберігається;

5) небезпечною є ситуація, коли початкові напруження наближаються до значень поверхневої нестійкості, оскільки контактні напруження і переміщення різко змінюють свої значення.

Тобто, наявність попередньо напруженого стану під час контактної взаємодії пружних тіл дає змогу регулювати контактні напруження та переміщення при розрахунках на міцність деталей машин та конструкцій. Причому для контактних напружень небезпечними є початкові напруження у випадку розтягнення, а для переміщення – у випадку стиску.

Отже, виявлений при дослідженні вплив початкових напружень є суттєвим для стисливих та нестисливих тіл. Це підтверджено одержаними аналітичними, графічними та числовими результатами, що дає змогу використовувати їх в інженерних розрахунках.

Література

1. Гузь, А.Н. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями (жесткие штампы) [Текст] / А.Н. Гузь, С.Ю. Бабич, В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1989. – №8. – С. 3 - 18.

2. Гузь, А.Н. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями (упругие штампы) (обзор) [Текст] / А.Н. Гузь, С.Ю. Бабич, В.Б. Рудницкий // Прикл.механика. – 1991. – Т. 27, №9. –С. 3 - 28.

3. Guz, A.N. Contact problems for elastic bodies with initial stresses. Focus on Ukrainian research / A.N. Guz, S.Y. Babich, V.B. Rudnitsky // Apple Mech. Rev. Vol. 51, nos May 1998. – P. 343 - 371.

4. Гузь, А.Н. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями [Текст] / А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий. – Хмельницький, выд. ПП Мельник. – 2006. – 710 с.

5. Рудницкий, Т.В. Контактное взаимодействие конечного цилиндрического штампа и полупространства с начальными (остаточными) напряжениями [Текст] / Т.В. Рудницкий // Сборник международной конференции «Современные проблемы механики», посвященный 100-летию Л.А. Галина. Тезисы докладов. – Москва. – 2012. – С. 90

6. Бабич, С.Ю. К вопросу контактной задачи для предварительно напряженого слоя [Текст] / С.Ю. Бабич, В.Б. Рудницкий // Прикл.механика. – 1987. – 23, №5. – С. 110 - 112.

7. Гузь, А.Н. Контактная задача о давлении упругого штампа на упругое полупространство с начальными напряжениями [Текст] / А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий // Прикл.механика. – 1984. – 20, №8. – С. 3 - 11.

8. Ярецька Н. О. Вплив початкових (залишкових) напружень на контактну взаємодію пружного циліндричного штампу та пружного шару / Н. О. Ярецька // Доповіді НАН України. – 2014. – № 1. – С. 57 - 62.

9. Yaretskaya N. A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses /N.A. Yaretskaya// International Applied Mechanics. – July 2014. – Volume 50, Issue 4. – pp. 378 –388.

Поступила в редакцію 15.04.2015

Maksymchuk D.N. **Axisymmetric contact interaction of two coaxial pre-tighten these cylinders and elastic layer with initial (residual) stresses.**

The article deals with the coaxial mixed type task of measuring pressure of prestressed two coaxial cylinder punches upon a layer with initial (residual) stresses within the framework of linear elasticity theory. We consider the cases in the absence of the friction forces. In general, the research was carried out for the theory of great initial (ultimate) deformations and different variants of the theory of small initial deformations with arbitrary structure of elastic potential.

It is assumed that the elastic dies as well as the layer are made of different isotropous, transversely isotropic or composite materials and they are interacting on one of the dieses surfaces.

The mode of deformation in elastic layer with initial (residual) stress will be defined with the help of harmonic functions as the Henkel integrals. We should note, although the Henkel-method does not provide exact solutions, but it lets us reduce the task to the Fredholm equations, which let us use the method of consecutive approximations**.** Consequently we got a components of potential vector and tenzor of deformations in the case of equal roots of axis-symetrical type task**.**

So, the received solutions are defined by lines with the help of very many constants. These constants are defined with two systems of regular linear algebraic equations. The research was carried out on the problem of the influence of initial stresses on the law of distribution of contact disorders in the elastic layer with initial (residual) stresses.

Key words: linear elasticity theory, initial (residual) stresses, Henkel transformations, theory of small initial deformations, Fredholm equations.

References

1. Guz, A.N. Contact problems for elastic bodies with initial stresses (hard stamp) [Text]. A.N. Guz, S.Y. Babich, V.B. Rudnitsky. Applied Mechanics. 1989. No8. P. 3 - 18.

2. Guz, A.N. Contact problems for elastic bodies with initial stresses (elastic seals) (review) [Text]. A.N. Guz, S.Y. Babich, V.B. Rudnitsky. Applied Mechanics. 1991. T. 27, No9. P. 3 - 28.

3. Guz, A.N. Contact problems for elastic bodies with initial stresses. Focus on Ukrainian research. A.N. Guz, S.Y. Babich, V.B. Rudnitsky. Apple Mech. Rev. Vol. 51, nos May 1998. P. 343 – 371.

4. Guz, A.N. Fundamentals of the theory of contact interaction of elastic bodies with initial (residual) stresses [Text]. A.N. Guz, V.B. Rudnitsky. Khmelnytsky, vyd. PP Melnik. 2006. 710 pp.

5. Rudnitsky T.V. Contact interaction of finite cylindrical punch and half with initial (residual) stresses [Text]. T.V. Rudnitsky. Collection of the International Conference "Modern Problems of Mechanics", dedicated to the 100th anniversary of LA Galina. Abstracts. Moscow. 2012. P. 90

6. Babich S.Y. On the question of the contact problem for prestressed layer [Text]. S.Y. Babich, V.B. Rudnitsky. Applied Mechanics. 1987. 23, No5. P. 110 – 112.

7. Guz, A.N. The contact problem of elastic pressure stamp on the elastic half-space with the initial voltage-tions [Text]. A.N. Guz, V.B. Rudnitsky. Applied Mechanics. 1984. 20, No8. P. 3 - 11.

8. Yaretskaya N.A. The impact of the initial (residual) stresses on the contact interaction of elastic cylindrical punch and an elastic layer. N.A. Yaretskaya. Reports of NAS of Ukraine. 2014. No1. P. 57 - 62.

9. Yaretskaya N. A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. N.A. Yaretskaya. International Applied Mechanics. July 2014. Volume 50, Issue 4. P. 378 –388.