

**Кузьменко А.Г.,
Милятинский С.В.**
Хмельницкий национальный университет,
г. Хмельницкий, Украина

**КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ
К УЧЕТУ ИЗНОСА ВНУТРЕННЕГО КОЛЬЦА
ПОДШИПНИКА КАЧЕНИЯ
И ОСИ СТУПИЦЫ КОЛЕСА ТРАНСПОРТНОЙ
МАШИНЫ.
СООБЩЕНИЕ 1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТОВ
БЕЗ УЧЕТА ИЗНОСА**

Введение и общая методика

Если рассматривать транспортную машину как динамическую систему, то колесо является одним из основных звеньев, определяющих его работоспособность и в первую очередь безопасность. По этой причине снижение износа осей ступиц ведомых колес транспортных средств является одной из важных проблем. Особенно этот вопрос актуален для парка общественного транспорта Украины и в первую очередь электротранспорта, где большинство единиц техники находится в эксплуатации более двух десятков лет. Выход из строя цапфы поворотного кулака передних колес троллейбуса ЗИУ-682 является одной из лимитирующих проблем их эксплуатации. В автобусах Икарус-280 износ цапфы поворотного кулака настолько велик, что приводит к затруднению в управлении автобусом. Также эта проблема актуальна и для легковых автомобилей. Так, фирма Фольксваген с 1974 года до настоящего времени проводит постоянную модернизацию конструкции ступицы заднего ведомого колеса с целью повышения ее износостойкости и надежности.

Основной причиной выхода из строя оси, является износ посадочных мест под подшипники качения (шеек) рис.1. В цапфе поворотного кулака троллейбуса также имеет место износ отверстия под подшипники скольжения шкворня. Износ шеек осей ступиц возникает вследствие микроперемещений, вызванных особенностями контактного взаимодействия в паре ось - внутреннее кольцо подшипника качения, испытывающей переменные радиальные нагрузки. Эти незначительные перемещения приводят к износу по механизму фреттинг-коррозии, о чем свидетельствует внешний вид поврежденной поверхности.

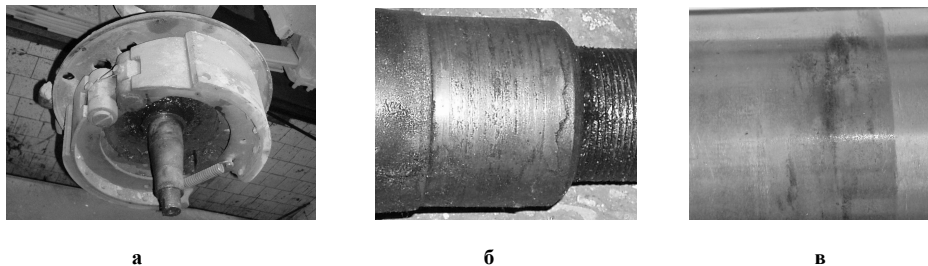


Рис. 1 – Износ поворотного кулака троллейбуса ЗИУ-682:
а – вид цапфы при разборке узла;
б – выкрашивание на поверхности металла;
в – коричневые пятна- следы фреттинг-коррозии

Ввиду высокой стоимости новой цапфы поворотного кулака троллейбуса, в Хмельницком коммунальном предприятии “Электротранс” разработана и используется уже несколько лет технология восстановления изношенной поверхности шеек цапфы плазменным напылением на плазматроне 15В-Б. Но ресурс восстановленной детали невелик и значительно уступает ресурсу новой.

Для того, чтобы усовершенствовать данный узел и повысить его износостойкость методом внедрения конструктивных, технологических или других изменений, необходимо провести большой объем работы, предшествующий этому. Прежде, необходимо изучить условия работы узла, сделать моделирование процесса износа, провести эксперименты для определения параметров модели износа, и после этого, основываясь на результатах расчетов и экспериментов, можно приступить к поиску решения по повышению износостойкости. В заключительном этапе необходимо провести оценку эффективности принятого решения. То есть, существует методика решения задач по повышению ресурса узла. Одним из первых этапов является анализ начальных условий в контакте, поэтому в статье ставится задача расчета оценочных перемещений и давлений в контакте оси и внутреннего кольца подшипника качения при переменной нагрузке с учетом трения и износа, а также шероховатостей поверхностей будет приведена в данной статье.

Общая методика расчетов на износ и ресурс узла трения с целью повышения его износостойкости и ресурса состоит из четырех основных этапов:

- 1) анализ начальных условий в контакте;
- 2) модели изнашивания и лабораторные испытания пары трения;

- 3) метод повышения износостойкости и надежности узла трения;
- 4) модели расчета и испытания узла трения на износ.

1. Анализ начальных условий в контакте.

На первом этапе рассматриваются рассчитываются силы Q , которые действуют на элементы узла трения.

Далее, используя методы контактной механики, решается задача по определению *контактных давлений* σ в сопряжении. Этот этап один из наиболее важных при анализе начальных условий в контакте, поскольку давление – один из главных факторов, влияющих на износ.

При выборе метода расчета контактных давлений необходимо определиться с видом контакта:

- 1) герцевский контакт (малая площадь контакта) – рассчитывается по теории Герца;
- 2) подшипниковый контакт (размеры площадки контакта соизмеримы в сравнении с размерами узла) – можно рассчитать методом эквивалентной податливости [1, 2].

Для оценки прочности (пластичности) поверхности необходимо рассмотреть *напряженное состояние* в зоне контакта.

По контактными перемещениям u , размерам площадок контакта a и кинематическим условиям взаимодействия поверхностей определяется *путь трения* S .

Необходимо также учитывать *температуру* T в контакте. Ее можно рассчитать, используя например работы проф. Чичинадзе А.В., определить непосредственно из эксперимента или использовать данные из литературы.

Условия смазывания являются также определяющим фактором износа, наряду с давлением в контакте.

2. Модели изнашивания, определение их параметров.

Изучение внешнего вида изношенных поверхностей дает первичную информацию о механизме износа. В сочетании с результатами анализа условий в контакте это позволяет сделать вывод о виде износа и определиться с выбором модели износа.

Модель износа – это, как правило, дифференциальная зависимость интенсивности износа от разных факторов: давления σ , скорости V , твердости материалов в сопряжении и др.

Например для установившегося износа модель имеет вид

$$\frac{du_w}{ds} = k_w \sigma^{m_\sigma} v_s^{m_v},$$

где k_w , m – параметры модели изнашивания.

Параметры модели изнашивания могут быть определены:

- 1) из прямых экспериментов;
- 2) аналитическое не прямое определение через другие параметр, определенные из экспериментов;

- 3) используя значения из справочников.

3. Методы повышения износостойкости.

Учитывая результаты, полученные на двух предыдущих этапах, можно определиться с направлением работы по выбору метода повышения износостойкости, например – изменяя конструкторским или технологическим способом факторы, влияющие на износ.

4. Модели и расчеты узла трения на износ.

Расчеты – это численная реализация моделей.

Модели износа узлов трения – это окончательные зависимости износа узла трения от всех или основных факторов, влияющих на износ. Модели, как правило, являются результатом решения дифференциальных или интегральных уравнений, которые описывают процесс. Эти уравнения выводятся на основе трех основных условий в контакте:

- 1) уравнение модели изнашивания в точке;
- 2) уравнение сплошности в контакте;
- 3) уравнение равновесия.

Ввиду сложности решения дифференциальных уравнений в закрытой форме, часто используется приближенное аналитическое решение, что требует обязательной оценки точности решения. Математически это сделать иногда еще сложнее, поэтому экспериментальная оценка точности решения становится основной и обязательной.

Эксперименты с нагруженными реальными узлами, зачастую вызывают затруднения по причине их размеров и невозможности в точности воссоздать все условия работы. Поэтому основным методом оценки точности моделей изнашивания узлов трения являются *модельные испытания*.

1. Контактное взаимодействие внутреннего кольца подшипника качения и осиступицы колеса

1.1. Контакт внутренней поверхности кольца подшипника качения и внешней поверхности оси

Постановка задачи. Рассмотрим внутренний контакт гладких (без учета шероховатостей) упругих цилиндров R_1 и R_2 , сопрягаемых с зазором $\Delta = R_2 - R_1$, при действии радиальной нагрузки Q с учетом трения (коэффициент трения f). Для решения задачи воспользуемся методикой, приведенной в [1, 2].

Постановка контактной задачи с учетом трения в контакте состоит из двух условий сплошности в контакте:

$$u_1(\varphi) + u_2(\varphi) = u(\varphi), \quad (1.1.1)$$

$$v_1(\varphi) + v_2(\varphi) = v(\varphi) \quad (1.1.2)$$

и двух условий равновесия:

$$Q = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \sigma(\varphi) R_2 \cos \varphi d\varphi + \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \tau(\varphi) R_2 \sin \varphi d\varphi, \quad (1.1.3)$$

$$T = 0 = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \sigma(\varphi) R_2 \sin \varphi d\varphi + \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \tau(\varphi) R_2 \cos \varphi d\varphi. \quad (1.1.4)$$

В соотношениях $u_1(\varphi)$, $u_2(\varphi)$ – радиальные перемещения контакта вала (1), втулки (2); $v_1(\varphi)$, $v_2(\varphi)$ – перемещения контактных точек вала и втулки в касательном направлении; $u(\varphi)$, $v(\varphi)$ – суммарные функции нормальных и касательных перемещений, определяемые из геометрии контакта; $\sigma(\varphi)$, $\tau(\varphi)$ – функции контактных давлений и касательных усилий, подлежащие определению; $2\varphi_0$ – угол контакта; $R = R_2$.

Из геометрии контакта для нормальных перемещений

$$u(\varphi) = (u_0 + \Delta) \cos \varphi - 1 \quad (1.1.5)$$

или

$$u(\varphi) = \Delta (\sec \varphi_0 \cos \varphi - 1), \quad (1.1.6)$$

где $u_0 = u(\varphi = 0)$, (рис. 2).

Для касательных перемещений (рис. 2)

$$v(\varphi) = u(\varphi) \operatorname{tg} \varphi \quad (1.1.7)$$

или с учетом (1.1.6)

$$v(\varphi) = \Delta (\sec \varphi_0 \cos \varphi - 1) \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.1.8)$$

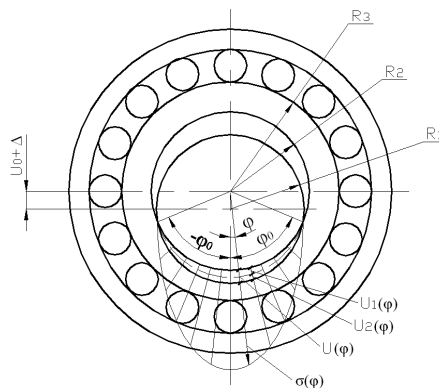


Рис. 2 – Расчетная схема

Метод эквивалентной податливости состоит в принятии допущения об однородности упругих контактных свойств поверхностей вала и втулки в нормальном и касательном направлении:

$$u_1(\varphi) = k_1 \sigma(\varphi), \quad u_2(\varphi) = k_2 \sigma(\varphi), \quad v_1(\varphi) = k_{1\tau} \tau(\varphi), \quad v_2(\varphi) = k_{2\tau} \tau(\varphi), \quad (1.1.9)$$

где k_1 , k_2 – коэффициенты податливости вала и втулки в нормальном направлении;

$k_{1\tau}$, $k_{2\tau}$ – в касательном направлении.

Задача состоит в определении функций распределения контактных давлений $\sigma(\varphi)$, удельных касательных усилий $\tau(\varphi)$ и угла контакта φ_0 . Числу неизвестных функций соответствует число уравнений (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3).

Для решения задачи подставим соотношения (1.1.10) в условия (1.1.1) и (1.1.2), в результате имеем

$$k_1\sigma(\varphi) + k_2\sigma(\varphi) = u(\varphi), \quad (1.1.10)$$

$$k_{1\tau}\tau(\varphi) + k_{2\tau}\tau(\varphi) = v(\varphi) = u(\varphi)\operatorname{tg}\varphi. \quad (1.1.11)$$

Из уравнения (1.1.10) следует выражение для контактных давлений

$$\sigma(\varphi) = \frac{u(\varphi, \varphi_0)}{k_1 + k_2}. \quad (1.1.12)$$

Из уравнения (1.1.11) находим выражение для касательных усилий

$$\tau(\varphi) = \frac{u(\varphi, \varphi_0)\operatorname{tg}\varphi}{k_{1\tau} + k_{2\tau}}. \quad (1.1.13)$$

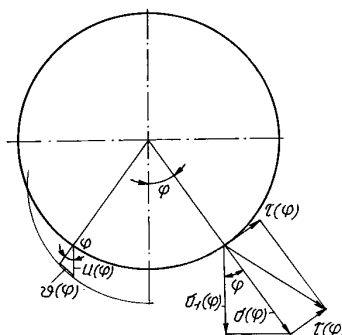


Рис. 3 – Геометрия контакта при определении касательных перемещений

Уравнение, необходимое для определения угла контакта φ_0 , получим, подставив (1.1.12) и (1.1.13) в условие равновесия (1.1.3)

$$Q = \frac{R}{k_1 + k_2} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} u(\varphi, \varphi_0) \cos\varphi \, d\varphi + \frac{R}{k_{1\tau} + k_{2\tau}} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \tau(\varphi) u(\varphi, \varphi_0) \sin\varphi \operatorname{tg}\varphi \, d\varphi. \quad (1.1.14)$$

Подставляя функцию $u(\varphi)$ из (1.1.6), имеем

$$Q = \frac{R\Delta}{k_1 + k_2} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (\sec\varphi_0 \cos\varphi - 1) \cos\varphi \, d\varphi + \frac{R\Delta}{k_{1\tau} + k_{2\tau}} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (\sec\varphi_0 \cos\varphi - 1) \sin\varphi \operatorname{tg}\varphi \, d\varphi. \quad (1.1.15)$$

После интегрирования и преобразования получаем

$$\frac{Q(k_1 + k_2)}{R\Delta} = \frac{\varphi_0}{\cos\varphi_0} - \sin\varphi_0 + \xi^{-1} \left(\frac{\varphi_0}{\cos\varphi_0} + 2\sin\varphi_0 - 2 \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right) \right| \right). \quad (1.1.16)$$

Или запишем его в виде

$$\bar{Q} = \frac{\varphi_0}{\cos\varphi_0} - \sin\varphi_0 + \xi^{-1} \left(\frac{\varphi_0}{\cos\varphi_0} + \sin\varphi_0 - 2 \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right) \right| \right), \quad (1.1.16)$$

где

$$\bar{Q} = \frac{Q(k_1 + k_2)}{R\Delta}, \quad (1.1.17)$$

$$\xi = \frac{k_{1\tau} + k_{2\tau}}{k_1 + k_2}. \quad (1.1.18)$$

Подставляя функции $u(\varphi)$ и $v(\varphi)$ из (1.1.6) и (1.1.8) в (1.1.12) и (1.1.13), получаем для контакт-

ных давлений

$$\sigma(\varphi) = \frac{\Delta}{k_1 + k_2} (\sec \varphi_0 \cos \varphi - 1); \quad (1.1.19)$$

для касательных усилий

$$\tau(\varphi) = \frac{\Delta}{k_{1\tau} + k_{2\tau}} (\sec \varphi_0 \cos \varphi - 1) \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.1.20)$$

Угол контакта φ_0 получаем из решения трансцендентного уравнения (1.1.16) относительно φ_0 .

Контактные перемещения в каждой точке находим по соотношениям (1.1.9) с учетом (1.1.19) и (1.1.20), либо по соотношениям (1.1.6) и (1.1.8).

Удобным для анализа является безразмерная форма функции (1.1.23) в виде

$$\overline{\tau(\varphi)} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi_0} \operatorname{tg} \varphi, \quad (1.1.21)$$

где

$$\overline{\tau(\varphi)} = \frac{\tau(\varphi)}{\Delta} (k_{1\tau} + k_{2\tau}).$$

Функция касательных усилий (1.1.20) антисимметрична относительно начала координат и имеет экстремумы в пределах одной и другой половин угла контакта. Для определения точки, в которой эта функция принимает максимальное значение, берем производную от (1.1.20) и приравняем нулю. Из полученного уравнения находим

$$\varphi_{\tau \max} = \arccos(\cos \varphi_0)^{1/3}. \quad (1.1.22)$$

Подставляя это выражение в зависимость (1.1.20), находим величину максимального касательного усилия

$$\tau_{\max}(\varphi_{\tau \max}) = \frac{\Delta}{k_{1\tau} + k_{2\tau}} \left(\sec \varphi_0 \sqrt{1 - (\cos \varphi_0)^{2/3}} - \sqrt{(\sec \varphi_0)^{2/3} - 1} \right). \quad (1.1.23)$$

Наличие проскальзывания в контакте определяется условием

$$\tau(\varphi) \geq f \sigma(\varphi). \quad (1.1.24)$$

Мы нашли, что силы трения могут быть теоретически определены по зависимости (1.1.23), в которую не входит коэффициент трения. Условием (1.1.26) утверждается, что при некотором коэффициенте трения касательные усилия будут определяться не коэффициентами касательной податливости $k_{1\tau}$, $k_{2\tau}$, а коэффициентом трения и распределением нормальных давлений $\sigma(\varphi)$.

Уравнение для определения границ ($\varphi_{s1}, \varphi_{s2}$) области проскальзывания получаем из уравнения (1.1.24) при строгом равенстве с учетом решений (1.1.19) и (1.1.20)

$$(k_{1\tau} + k_{2\tau})(\sec \varphi_0 \cos \varphi_s - 1) \operatorname{tg} \varphi_s = f (\sec \varphi_0 \cos \varphi_s - 1) \frac{\Delta}{k_1 + k_2},$$

или

$$(\sec \varphi_0 \cos \varphi_s - 1) \operatorname{tg} \varphi_s = f \xi (\sec \varphi_0 \cos \varphi_s - 1). \quad (1.1.25)$$

Отсюда следует

$$\varphi_{s1} = \varphi_0, \quad (1.1.26)$$

$$\varphi_{s2} = \arctg(f \xi). \quad (1.1.27)$$

Величину перемещения точек вала относительно контактных точек втулки в области проскальзывания ($\varphi_{s1}, \varphi_{s2}$) определим из следующих соображений. Теоретически при постоянном сцеплении поверхностей касательные перемещения (обозначим их через $v_p(\varphi)$ – расчетные) описываются функцией (1.1.8):

$$v_p(\varphi) = \Delta (\sec \varphi_0 \cos \varphi - 1) \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.1.28)$$

В зоне ($\varphi_{s1}, \varphi_{s2}$), в которой выполняется условие (1.1.24) действительные касательные перемещения $v_o(\varphi)$ равны произведению этих действительных касательных сил на коэффициент касательной податливости:

$$v_o(\varphi) = f \sigma(\varphi) (k_{1\tau} + k_{2\tau}). \quad (1.1.29)$$

Перемещения $v_s(\varphi)$ точек вала относительно втулки в зоне контакта равны разности расчетных действительных касательных перемещений

С учетом (1.1.28) и (1.1.29) имеем

$$v_s(\varphi) = \Delta (\sec \varphi_0 \cos \varphi - 1) \operatorname{tg} \varphi - f \sigma(\varphi) (k_{1\tau} + k_{2\tau}). \quad (1.1.30)$$

Подставив сюда функцию $\sigma(\varphi)$ по (1.1.19), имеем

$$v_s(\varphi) = \Delta (\sec \varphi_0 \cos \varphi - 1) (\operatorname{tg} \varphi - f\xi), \quad (1.1.31)$$

$$\xi = \frac{k_{1\tau} + k_{2\tau}}{k_1 + k_2}, \quad \varphi \in (\varphi_{s1}, \varphi_{s2}).$$

Оценим соотношение перемещений проскальзывания к расчетным касательным перемещениям

$$\bar{v}_s(\varphi) = \frac{v_s(\varphi)}{v_p(\varphi)} = 1 - \frac{f\xi}{\operatorname{tg} \varphi}. \quad (1.1.32)$$

Координата, в которой проскальзывание максимально, определяется из условия

Выполняя дифференцирование и некоторые преобразования, имеем

$$\frac{\cos^3 \varphi}{\cos \varphi_0} + f\xi \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi}{\cos \varphi_0} = 1, \quad \cos^3 \varphi + (f\xi) \sin \varphi \cos^2 \varphi = \cos \varphi_0. \quad (1.1.33)$$

Это нелинейное уравнение, точное решение которого в замкнутой форме затруднено.

В первом приближении можно полагать, что точка с максимальным проскальзыванием совпадает с точкой с максимальными касательными усилиями. Эта точка определяется по формуле (1.1.22). Численный анализ показывает, что такая замена допустима.

Подставив (1.1.22) в (1.1.32), имеем

$$\bar{v}_{s \max}(\varphi_0) = 1 - \frac{f\xi}{\operatorname{tg} [\arccos(\cos \varphi_0)^{1/3}]}. \quad (1.1.34)$$

1.2. Нормальная и касательная жесткость в контакте гладких цилиндров

Метод эквивалентной податливости [2] предполагает, что реальное контактное основание можно заменить одномерным винклеровским основанием. При этом коэффициенты податливости могут быть определены из решения осесимметричных задач теории упругости. В этом подразделе нам представляется целесообразным рассмотреть некоторые свойства коэффициентов податливости.

1. Для втулки с внутренним радиусом R_2 , заземленной по наружному радиусу R_3 , в состоянии плоской деформации коэффициент нормальной контактной податливости имеет вид:

$$k_2 = \frac{(1 - 2\mu_2)(1 + \mu_2)(R_3^2 - R_2^2)R_2}{E_2[R_2^2 + (1 - 2\mu_2)R_3^2]}. \quad (1.2.1)$$

Для касательной податливости в аналогичной схеме

$$k_{2\tau} = \frac{R_2}{2G} \left(1 - \frac{R_2^2}{R_3^2} \right) \quad (1.2.2)$$

или

$$k_{2\tau} = \frac{R_2(1 + \mu_2)}{E_2} \left(1 - \frac{R_2^2}{R_3^2} \right), \quad (1.2.3)$$

где μ_2, E_2 — коэффициент Пуассона и модуль упругости материала втулки.

Отношение коэффициентов податливости касательной к нормальной

$$\frac{k_{2\tau}}{k_2} = \frac{R_2^2}{R_3^2} \frac{1}{(1 - 2\mu_2)} + 1. \quad (1.2.4)$$

Интересно заметить, что при $R_3 \rightarrow 1, k_{2\tau}/k_2 \rightarrow 1$. То есть в полости в бесконечном теле эк-

вивалентная *контактная податливость в нормальном и касательном направлениях одинакова.*

2. Для определения *коэффициента касательной податливости для вала* рассмотрим схему вал с отверстием, зашпеленным по внутреннему контуру R_0 (рис. 4).

Решение осесимметричной задачи при действии только касательных усилий в общем виде имеет вид:

$$\tau_{r\varphi} = \frac{A}{r^2}, \quad (1.2.5)$$

$$v = Cr - \frac{A}{2Gr}. \quad (1.2.6)$$

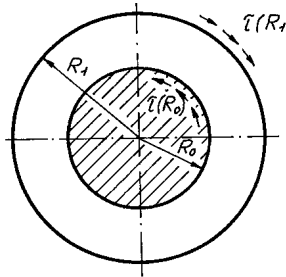


Рис. 4 – Вал с отверстием, зашпеленным по внутреннему контуру R_0

Граничные условия задачи (рис. 3)

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\varphi}(r = R_1) &= \tau \\ v(r = R_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.7)$$

Подставляя решение в граничные условия, получаем

$$A = \tau R_1^2. \quad (1.2.8)$$

Из второго уравнения с учетом (1.2.8)

$$C = \frac{\tau R_1^2}{2G R_0^2}. \quad (1.2.9)$$

Подставляя A и C в (1.2.4), имеем

$$v = \frac{\tau R_1^2}{2G R_0^2} r - \frac{\tau R_1^2}{2Gr}. \quad (1.2.10)$$

Коэффициент податливости получаем при $r = R_1$

$$v = \frac{\tau}{2G} \left[\frac{R_1^2}{R_0^2} - \frac{R_1^2}{R_1} \right] \quad \text{или} \quad v = \frac{\tau R_1}{2G} \left(\frac{R_1^2}{R_0^2} - 1 \right). \quad (1.2.11)$$

Таким образом

$$k_{1t} = \frac{R_1}{2G} \left(\frac{R_1^2}{R_0^2} - 1 \right). \quad (1.2.12)$$

Заметим, что при $R_0 \rightarrow 0$, $k_{1t} \rightarrow \infty$, то есть имеет особенность, иными словами не имеет решения. Это следствие того, что в действительности касательные усилия от вала воспринимаются не внутри вала, а по его торцам. С учетом этого для практического использования R_0 можно брать равным

$$R_0 = \frac{R_1 + 0}{2}. \quad (1.2.13)$$

3. Произведем *сравнение касательного и нормального коэффициентов податливости* для вала. Нормальный коэффициент податливости

$$k_1 = \frac{(1 - 2\mu_1)(1 + \mu_1)R_1}{E_1}. \quad (1.2.14)$$

Касательный коэффициент по (1.2.12)

$$k_{1t} = \frac{R_1(1 + \mu_1)}{E_1} \left(\frac{R_1^2}{R_0^2} - 1 \right). \quad (1.2.15)$$

Найдем отношение этих коэффициентов

$$\frac{k_1}{k_{1t}} = \frac{(1 - 2\mu_1)(1 + \mu_1)R_1}{E_1(1 + \mu_1)} \frac{E_1}{R_1 \left(\frac{R_1^2}{R_0^2} - 1 \right)} \quad \text{или} \quad \frac{k_1}{k_{1t}} = \frac{1 - 2\mu_1}{\left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 - 1}. \quad (1.2.16)$$

Для примера положим $R_1 = 2R_0$, $\mu_1 = 0,3$, тогда $k_1/k_{1t} = 0,1333$. То есть в этом случае также касательная податливость намного выше нормальной. Такой результат имеем для коэффициентов податливости, полученных из решения осесимметричных задач теории упругости.

4. Теперь рассмотрим *одномерную модель основания*, подверженную сдвигу и сжатию (рис. 5).

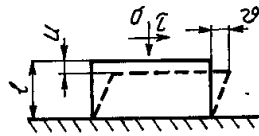


Рис. 5 – Одномерная модель основания, подверженная сдвигу и сжатию

При сжатии одномерного слоя толщиной l при действии давлением σ имеем перемещение:

$$u = \frac{l}{E} \sigma, \quad (1.2.17)$$

то есть $k_\sigma = l/E$.

При сдвиге одномерного слоя:

$$v = \frac{l}{G} \tau, \quad (1.2.18)$$

то есть $k_\tau = l/G$.

$$\text{Отношение коэффициентов: } \frac{k_\sigma}{k_\tau} = \frac{G}{E} = \frac{1}{2(1 + \mu)} = 0,5 \dots 0,33.$$

Таким образом, податливость в касательном направлении больше, чем в нормальном вследствие того, что модуль сдвига G меньше модуля сжатия E .

1.3. Контактное взаимодействие кольца подшипника и оси ступицы с учетом шероховатости

1.3.1. Постановка задачи модели слоя шероховатостей

1. *Контактная податливость шероховатостей* соизмерима, а иногда превышает контактную податливость от общей деформации контактирующих цилиндров. В связи с этим в задачах, в которых контактная податливость определяет результат, необходим учет шероховатости.

Главным отличием в постановке задач с учетом шероховатостей являются дополнительные слабые в условиях непрерывности в контакте как в нормальном, так и в касательном направлениях

$$u_1(\varphi) + u_2(\varphi) + u_c(\varphi) = u(\varphi), \quad (1.3.1)$$

$$v_1(\varphi) + v_2(\varphi) + v_c(\varphi) = v(\varphi), \quad (1.3.2)$$

где $u_c(\varphi)$, $v_c(\varphi)$ – перемещения контактирующих точек в нормальном и касательном направлениях от наличия слоя шероховатостей.

2. Будем полагать, что из эксперимента или из расчетов известны зависимости контактной жесткости шероховатостей в нормальном и касательном направлениях в форме степенных функций

$$\left. \begin{aligned} u_c &= c'_\sigma \sigma^{m_\sigma} \\ v_c &= c'_\tau \tau^{m_\tau} \end{aligned} \right\}. \quad (1.3.3)$$

где c'_σ , m_σ , c'_τ , m_τ – параметры.

Для решения контактных задач целесообразно *представить нелинейные зависимости* (1.3.2) и (1.3.3) *в виде кусочно-линейных функций* в нормальном и касательном направлении.

Параметры *кусочно-линейной аппроксимации* найдем из условия равенства площадей под кривыми, очерченными этими функциями. Получаем для нормальной податливости:

$$u_{TC} = \left. \begin{aligned} & \frac{2c'_\sigma}{m_\sigma + 1} \sigma_{TC}^{m_\sigma}, & \sigma \leq \sigma_{TC} \\ & \frac{2c'_\sigma}{m_\sigma + 1} \frac{\sigma_{\%C}^{m_\sigma+1} - \sigma_{TC}^{m_\sigma+1}}{\sigma_{\%C} - \sigma_{TC}}, & \sigma > \sigma_{TC} \end{aligned} \right\}, \quad (1.3.4)$$

для касательной податливости:

$$v_{TC} = \left. \begin{aligned} & \frac{2c'_\tau}{m_\tau + 1} \tau_{TC}^{m_\tau}, & \tau \leq \tau_{TC} \\ & \frac{2c'_\tau}{m_\tau + 1} \frac{\tau_{\%C}^{m_\tau+1} - \tau_{TC}^{m_\tau+1}}{\tau_{\%C} - \tau_{TC}}, & \tau > \tau_{TC} \end{aligned} \right\}. \quad (1.3.5)$$

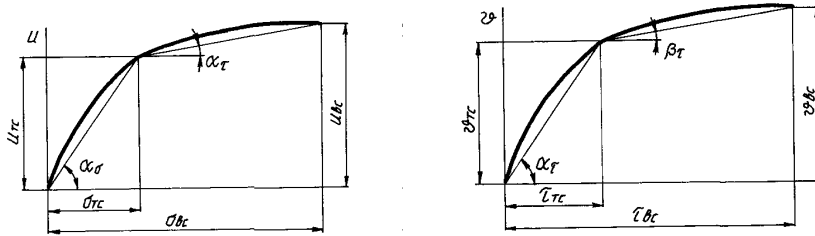


Рис. 6 – Кривые функций нормальных и касательных перемещений

Параметры σ_{TC} и τ_{TC} определяем из условия непрерывности кусочно-линейных функций в точках перелома для нормальной и касательной податливости. В общем случае эти уравнения целесообразно решать *численно итерационным методом*. Но в большинстве случаев [3] с достаточной точностью можно положить $m_\sigma = 0,5$ и $m_\tau = 1,0$.

После преобразований имеем расчетные соотношения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{TC} &= 0,111\sigma_{\%C}, & u_{TC} &= 0,444c'_\sigma \sqrt{\sigma_{\%C}}; \\ c_\sigma &= 4c'_\sigma \sigma_{\%C}^{-0,5}, & c_{T\sigma} &= 0,617 \frac{c'_\sigma}{\sqrt{\sigma_{\%C}}}; \\ \lambda &= 1 - c_{T\sigma}/c_\sigma & u_{\%C} &= c'_\sigma \sqrt{\sigma_{\%C}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.6)$$

Для касательной податливости с достаточной точностью полагаем: $c_\tau = c'_\tau$, $m_\tau = 1$, то есть принимаем зависимость линейной

$$v_\tau = c'_\tau \tau. \quad (1.3.7)$$

3. *Постановка задачи завершается* условием равновесия в форме (1.1.3), которое выпишем здесь для полноты изложения

$$Q = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \sigma(\varphi) R \cos \varphi \, d\varphi + \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \tau(\varphi) R \sin \varphi \, d\varphi. \quad (1.3.8)$$

При кусочно-линейной аппроксимации функции нормальной жесткости шероховатости появляется еще одна неизвестная величина – φ_n – угол, где функция (1.3.6) переходит от первого участка на второй. В связи с этим в постановку задачи введем еще одно условие – это условие неразрывности функции давлений в точке $\varphi = \varphi_n$

$$\sigma(\varphi_n) = \sigma_n(\varphi_n), \quad (1.3.9)$$

где $\sigma(\varphi)$ – функция давлений на I участке;

$\sigma_n(\varphi)$ – функция давлений на II участке.

1.3.2. Решение задачи

1. После интегрирования условий равновесия и сплошности получаем

$$\frac{Q}{\alpha_1 R_2} = \varphi_0 \sec \varphi_0 - \sin \varphi_0 + \sec \varphi_0 (\varphi_n + \sin \varphi_n \cos \varphi_n) \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 1 \right) + 2 \left(1 - \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_1} \right) \sin \varphi_n + \frac{\alpha_4}{\alpha_1} \left(\varphi_0 \sec \varphi_0 + \sin \varphi_0 - 2 \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right) \right| \right). \quad (1.3.10)$$

Функции $\sigma(\varphi)$ и $\tau(\varphi)$ имеем в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma(\varphi) &= \alpha_1 (\sec \varphi_0 \cos \varphi - 1), \quad \sigma < \sigma_{TC}; \\ \sigma_n(\varphi) &= \alpha_2 (\sec \varphi_0 \cos \varphi - 1) - \alpha_3, \quad \sigma > \sigma_{TC}. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.11)$$

$$\tau(\varphi) = \alpha_4 (\sec \varphi_0 \cos \varphi - 1) \operatorname{tg} \varphi, \quad (1.3.12)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\Delta}{k_1 + k_2 + c_0}, \quad \alpha_2 = \frac{\Delta}{k_1 + k_2 + c_{T0}}, \quad \alpha_3 = \frac{\lambda_{cs} u_{TC}}{k_1 + k_2 + c_{T0}}, \quad \alpha_4 = \frac{\Delta}{k_{1\tau} + k_{2\tau} + c_\tau}. \quad (1.3.13)$$

$$\cos \varphi_n = \left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} \right) \cos \varphi_0.$$

При решении уравнения (1.3.10) относительно φ_0 необходимо предварительно заменить φ_n на φ_0 по (1.3.13). Найденный угол φ_0 , подставляется в (1.3.11) и (1.3.12), из которых определяются давления и касательные усилия.

2. Функциональные части выражений (1.3.12) и (1.1.10) совпадают с точностью до коэффициента α_4 . Пользуясь этой формальной аналогией запишем сразу формулы для основных параметров контакта в касательном направлении.

Угловая координата точки, в которой касательные усилия будут максимальными определяются по формуле, совпадающей с (1.1.24)

$$\varphi_{\tau \max} = \arccos(\varphi_0)^{1/3}, \quad (1.3.14)$$

где φ_0 — определяется из решения уравнения (1.3.10).

Величина максимального касательного усилия определяется по формуле, аналогичной (1.1.23) с заменой множителя на α_4

$$\tau_{\max}(\varphi_{\tau \max}) = \alpha_4 \left(\sec \varphi \sqrt{1 - (\cos \varphi_0)^{2/3}} - \sqrt{(\sec \varphi_0)^{2/3} - 1} \right). \quad (1.3.15)$$

3. Рассмотрим *определение области проскальзывания* из условия (1.1.26)

$$\tau(\varphi) \geq f\sigma(\varphi). \quad (1.3.16)$$

Подставляя (1.3.11) и (1.3.12) в это уравнение и решая их имеем

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{s1} &= \varphi_0; \\ \varphi_{s2} &= \arctg \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_4} f \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.3.17)$$

Решение этого уравнения в элементарных функциях затруднено. Требуется численное решение.

4. Для *определения функции проскальзывания* имеем с одной стороны расчетные касательные перемещения по (1.1.28), другой стороны — действительные касательные перемещения по (1.1.29) с учетом (1.3.11). Определяя касательные перемещения проскальзывания как разность расчетных и действительных, имеем

$$v_s(\varphi) = \Delta (\sec \varphi_0 \cos \varphi - 1) (\operatorname{tg} \varphi - f\xi), \quad \sigma < \sigma_{TC}, \quad (1.3.18)$$

$$v_s(\varphi) = \Delta (\sec \varphi_0 \cos \varphi - 1) \operatorname{tg} \varphi - f [\alpha_2 (\sec \varphi_0 \cos \varphi - 1) - \alpha_3] (k_{1\tau} + k_{2\tau} + c_\tau), \quad \sigma > \sigma_{TC}, \quad (1.3.19)$$

$$\text{где } \xi = \frac{k_{1\tau} + k_{2\tau} + c_\tau}{k_{1\tau} + k_{2\tau} + c_\sigma}.$$

5. *Оценочные расчеты* с учетом микронеровностей могут быть выполнены, полагая, что жесткостные характеристики слоя шероховатостей в нормальном и касательном направлениях линейны

$$u_s = c_\sigma \sigma, \quad v_s = c_\tau \tau.$$

В этом случае в расчетных формулах п.2.1 необходимо заменить коэффициенты податливости $k_{1\tau} + k_{2\tau}$ на $k_{1\tau} + k_{2\tau} + c_\tau$, а $k_1 + k_2$ на $k_1 + k_2 + c_\sigma$.

1.3.3. Контактная податливость шероховатых тел

1. *Нормальная контактная податливость* слоя шероховатостей с достаточной точностью [3] описывается степенной зависимостью

$$u_s = c'_\sigma \sigma^{0,5}, \quad [\text{мкм}]. \quad (1.3.20)$$

В интервале нагрузки $\sigma = (0 \dots \sigma_\epsilon)$ возможно приближенное представление зависимости

$$u_s = c_{\sigma F} \sigma, \quad [\text{см}], \quad c_{\sigma F} = \frac{c \cdot 10^{-4}}{\sigma_\epsilon^{0,5}}, \quad (1.3.21)$$

где σ_ϵ – предельное значение давлений, при котором получены экспериментальные данные.

2. Если диапазон давлений $\sigma < \sigma_\epsilon$, равен σ_1 , то коэффициент линейной податливости

$$c_\sigma = \frac{u_1}{\sigma_1}, \quad (1.3.22)$$

где

$$u_1 = c'_\sigma \sigma_1^{0,5}. \quad (2.3.23)$$

3. *Соотношение нормальной податливости* слоя шероховатостей двух поверхностей из разных материалов зависит от соотношения модулей упругости

$$\frac{c_{\sigma 1}}{c_{\sigma 2}} = \frac{E_2}{E_1}. \quad (1.3.24)$$

4. *Для оценки касательной контактной податливости* слоя шероховатостей будем иметь зависимость:

$$\frac{c_\tau}{c_\sigma} = 1 + \frac{1}{1 - 2\mu}. \quad (1.3.25)$$

5. *Соотношение касательной контактной податливости* поверхностей из разных материалов можно оценить по зависимости

$$\frac{c_{\tau 1}}{c_{\tau 2}} = \frac{G_2}{G_1} = \frac{E_2(1 + \mu_1)}{(1 + \mu_2)E_1}. \quad (1.3.26)$$

Из приведенных оценок следует:

- 1) касательная податливость слоя шероховатостей существенно больше нормальной податливости;
- 2) соотношения нормальной и касательной податливостей от основных деформаций и от шероховатостей имеют один порядок.

1.4. Уточненное решение задачи с учетом проскальзывания

В процессе исследования установлено, что при действии радиальной пульсирующей нагрузки на некоторой части площадки контакта $(\varphi_{s1}, \varphi_{s2})$ возникает микропроскальзывание поверхностей $v_s(\varphi)$, определяемое по зависимости (1.1.35).

Появление микропроскальзывания приводит к изменению распределения касательных усилий $\tau(\varphi)$. В области, в которой нет проскальзывания, распределение описывается функцией (1.1.10), а в зоне (1.1.24) - с учетом зависимости (1.1.19), то есть

$$\left. \begin{aligned} \tau_1(\varphi) &= \frac{\Delta}{k_{1\tau} + k_{2\tau}} (\sec \varphi_0 \cos \varphi - 1) \operatorname{tg} \varphi, \quad 0 < \varphi < \varphi_{s2}; \\ \tau_2(\varphi) &= f \frac{\Delta}{k_1 + k_2} (\sec \varphi_0 \cos \varphi - 1), \quad \varphi_{s2} < \varphi < \varphi_{s1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.4.1)$$

Из анализа п. 1 следует, что $\varphi_{s1} = \varphi_0$.

Напомним, что в соответствии с общепринятым обоснованным допущением распределение касательных усилий $\tau(\varphi)$ практически не влияет на распределение контактных давлений $\sigma(\varphi)$. Таким образом, полагаем, что при наличии проскальзывания контактные давления распределены по зависимости (1.1.19) на всей площадке контакта

$$\tau_2(\varphi) = \frac{\Delta}{k_1 + k_2} (\sec \varphi_0 \cos \varphi - 1), \quad 0 < \varphi < \varphi_0. \quad (1.4.2)$$

В соответствии с полученными уточнениями распределения касательных усилий и нормальных давлений изменится условие равновесия вала (1.1.3). Это условие принимает вид

$$Q = R_2 \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \sigma(\varphi) \cos \varphi \, d\varphi + 2R_2 \int_0^{\varphi_{s2}} \tau_1(\varphi) R_2 \sin \varphi \, d\varphi + 2R_2 \int_{\varphi_{s2}}^{\varphi_0} \tau_2(\varphi) R_2 \sin \varphi \, d\varphi. \quad (1.4.3)$$

Подставляя (1.3.3) в (1.4.3) и интегрируя, имеем

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \varphi_0 \sec \varphi_0 - \sin \varphi_0 + \frac{1}{\xi} \left(\frac{\varphi_{s2} - \sin \varphi_{s2} \cos \varphi_{s2}}{\cos \varphi_0} + 2 \sin \varphi_{s2} - 2 \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_{s2}}{2} \right) \right| \right) + \\ &+ f \left[\frac{\sin^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi_{s2} + 2(\cos \varphi_0 - \cos \varphi_{s2})}{\cos \varphi_0} \right]. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

$$\text{где } \xi = \frac{k_{1\tau} + k_{2\tau}}{k_1 + k_2}.$$

При практическом использовании уравнений (1.4.4) для определения угла контакта φ_0 из условий равновесия следует иметь в виду, что при наличии проскальзывания касательные усилия (как показано в п. 1.1.1) на порядок меньше контактных давлений: $\tau = f\sigma$, $f \approx 0,1$, а проекция этих усилий на вертикальную ось: $\tau' = \tau \sin \varphi = \tau(0,34 \dots 0,8)$, $\varphi = (20 \dots 60^\circ)$, при этом проскальзывание находится в зоне уменьшающихся до нуля контактных давлений $\sigma_s \approx (0,5 \dots 0)\sigma$.

Таким образом: $\tau' = f\sigma \sin \varphi = 0,1 \times (0,5 \dots 0) \times (0,34 \dots 0,8)\sigma = (0,04 \dots 0)\sigma$, составляющая сил равновесия от касательных сил при оценочных практических расчетах может быть опущена, а расчет угла контакта ведется по формуле

$$\bar{Q} = \frac{Q(k_1 + k_2)}{R_2 \Delta} = \varphi_0 \sec \varphi_0 - \sin \varphi_0. \quad (1.4.5)$$

С точностью до 1 % решение уравнения (1.4.6) представимо в виде [1]

$$\varphi_0(\text{рад}) = 1,13 \left(\frac{Q(k_1 + k_2)}{R\Delta} \right)^{1/3} - 0,13 \frac{Q(k_1 + k_2)}{R\Delta}. \quad (1.4.6)$$

Выводы

1. Снижение износа осей ступиц ведомых колес транспортных средств является одной из важных проблем. В основном ось выходит из строя по причине износа посадочных мест под подшипники качения по причине микроперемещений, вызванных особенностями контактного взаимодействия в паре ось - внутреннее кольцо подшипника качения, испытывающей переменные радиальные нагрузки.

2. Решена контактная задача теории упругости для внутреннего кольца подшипника качения и оси ступицы колеса транспортной машины, сопрягаемых с малым зазором при наличии износа с учетом проскальзывания для гладкой и шероховатой поверхностей в сопряжении при переменной радиальной нагрузке. Получены уравнения позволяющие определить геометрические характеристики контакта, величины нормальных и касательных давлений и перемещения в сопряжении.

3. Предложена общая методика расчетов и испытаний на износ узлов трения, с целью повышения их износостойкости и ресурса, которая состоит из четырех основных последовательных этапов: анализ начальных условий в контакте; модели изнашивания и лабораторные испытания пары трения; метод повышения износостойкости и надежности узла трения; модели расчета и испытания узла трения на износ, модельные испытания.

Литература

1. Кузьменко А.Г. Метод алгебраических уравнений в контактной механике: Монография А.Г. Кузьменко. – Хмельницкий: ХНУ, 2006. – 447 с.
2. Кузьменко А.Г., Любин А.Г. Контактная механика и расчеты на износ опор скольжения: Монография А.Г. Кузьменко, А.Г. Любин. – Хмельницкий: ХНУ, 2008. – 550 с.
3. Левина З.М., Решетов Д.Н. Контактная жесткость машин. – М.: Машиностроение, 1971. – 264 с.

Надійшла 01.10.2010