Сорокатый Р.В.

Технологический университет
Подолья, г. Хмельницкий,
Украина

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ИЗНАШИВАЕМОГО ТЕЛА

Изучение закономерностей изнашивания показывает, что изменения, которые наблюдаются в трущихся парах, являются стохастическими, а процесс изнашивания, в общем случае, является случайным процессом, что требует , в свою очередь , при построении математической модели изнашивания учитывать случайные вариации процесса.

В данной работе, для постороения вероятностной модели изнашиваемого тела использован математический аппарат теории надежности, который в достаточной мере соответствует физике процесса изнашивания.

1. Физическая модель изнашиваемого тела

Рассмотрим изнашиваемое тело, состоящее из “m” слоев, каждый из которых состоит из “n” трибоэлементов (ТЭ) (рис.1).

Предположим, что:

- в процессе изнашивания участвуют все трибоэлементы слоя;

- скорость изнашивания слоя - случайная величина, находящаяся в интервале $v_{i1},...,v_{in}$, и величины скоростей изнашивания являются соизмеримыми;

- скорость изнашивания трибоэлемента по поверхности - постоянная величина, но изменяется случайным образом в пределах $v_{i1},...,v_{in}$ между трибоэлементами;

- тело износится на величину *h*, если все трибоэлементы износятся на эту же величину;

- износ *i*-го из трибоэлементов на величину *h* приводит к изменению скорости изнашивания оставшихся элементов.

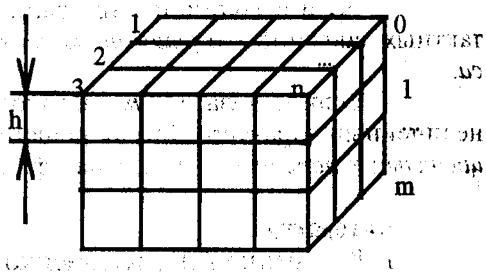

Рис. 1. Схема изнашиваемого тела

Данной ***физической модели*** изнашиваемого тела можно поставить в соотвествие ***модель надежности***, состоящую из двух взаимосвязанных моделей:

- модель системы-слоя (СС);

- модель системы-тела (СТ).

Поведение *системы-слоя* можно описать, с точки зрения надежности, как поведение системы с зависимыми элементами, т.е.:

- имеется один основной и n-1 не равнонадежных в общем случае элемента, находящихся под нагрузкой;

- отказ системы-слоя наступает при отказе всех элементов;

- интенсивности отказов изменяются при выходе из строя любого из элементов.

Поведение *системы-тела* описывается схемой размножения, где поток, переводящий систему из состояния в состояние, определяется через вероятность перехода в поглощающее состояние системы-слоя. Граф состояний такой системы представлен на рис. 2.

Таким образом, вероятностная модель изнашиваемого тела сводится в рассмотрению вероятностной модели системы-слоя и модели системы-тела, элементами которой являются слои.

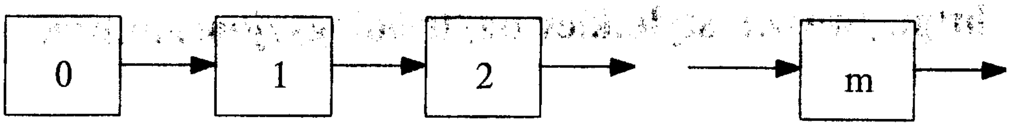

Рис. 2. Граф состояний системы чистого размножения

2. Вероятностная модель системы-слоя

2.1. Дискретные состояния и непрерывное время

Система состоит из n трибоэлементов, их интенсивности отказов зависят от времени и от числа неотказавших элементов на данный момент времени.

Для построения математической модели системы-слоя воспользуемся методом псевдосостояний [1]. Под псевдосостоянием системы U_k понимается, что в системе работает k трибоэлементов при этом $P_k(t)$ - вероятность того, что в момент времени t работает k элементов. Если количество элементов k=0 - наступит отказ системы (ситема-слой перейдет в поглощающее состояние). Граф состояний псевдосистемы представлен на рис.3.

В псевдосостоянии U_k имеется k рабочих элементов, каждый из которых имеет свою интенсивность отказов $\lambda_{i=1...k}(U_k,t)$, зависящую от времени t. Любой из k трибоэлементов в случае отказа может перевести систему-слой в состояние U_{k-1}.

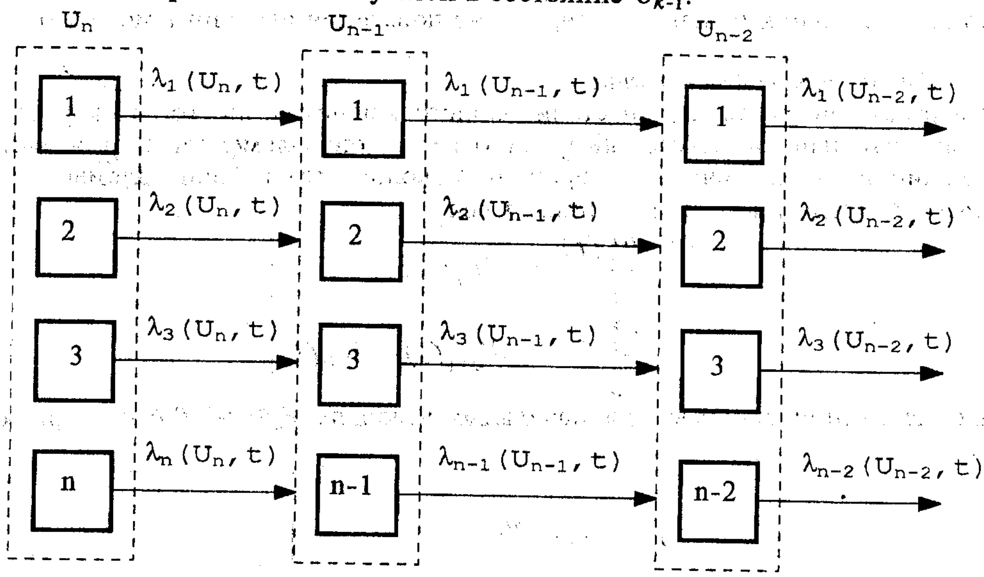

Рис. 3. Граф состояний псевдосистемы

Для описания поведения такого объекта можно составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP_n(t)}{dt} &= -\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(U_n,t)P_n(t); \\ \frac{dP_k(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i(U_{k+1},t)P_{k+1}(t)-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(U_k,t)P_k(t); \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

где $P_k(t)$ - вероятность нахождения псевдосистемы в U_k состоянии; $\lambda_i(U_k,t)$- интенсивность оказа i-го элемента $(i=1,...k)$ в зависимости от псевдосотояния системы U_k и времени.

Так как в начальный момент времени t=0 все элементы слоя находятся в рабочем состояни, то $P_n(t=0)=1; P_k(t=0)=0$ при $k<n$.

Согласно предельной теоремы для суммарного потока [1] система (1) может быть упрощена, если учесть, что $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(U_k,t)=\Lambda(U_k,t)$, где $\Lambda(U_k,t)$ - суммарный поток отказов, переводящий систему из состояния U_k в состояние U_{k-1} $(k=n,...,0)$.

Тогда (1) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP_n(t)}{dt} &= -\Lambda(U_n,t)P_n(t); \\ \frac{dP_k(t)}{dt} &= \Lambda(U_{k+1},t)P_{k+1}(t)-\Lambda(U_k,t)P_k(t) \end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

где $\Lambda(U_n,t)$- суммарный поток отказов, переводящий систему из состояния U_n в состояние U_{n-1}; $\Lambda(U_{k+1},t)$- суммарный поток отказов, переводящий систему из состояния U_{k+1} в состояние U_k; $\Lambda(U_k,t)$- суммарный поток отказов, переводящий систему из состояния U_k в состояние U_{k-1}.

Использование суммарного потока позволяет перейти к рассмотрению процесса чистой гибели псевдосостояний системы-слоя.

Поведение такой системы описывается системой дифференциальных уравнений (2), решение которой определяется видом функции $\Lambda(U_k,t)$.

Решение системы (2) в аналитической форме пока не получено, если функция $\Lambda(U_k,t)$ задана в общем виде, однако существует ряд частных решений, которые можно использовать при анализе некоторых случаев поведения системы-слоя.

Ниже приведены некоторые из известных решений и проанализирована возможность использования их для моделирования поведения изнашиваемого слоя.

2.1.1. Стационарное изнашивание

Если рассматривается случай стационарного изнашивания, тогда скорость изнашивания, а следовательно, и суммарный поток отказов трибоэлементов слоя является постоянной величиной, не зависящей от времени и количества рабочих элементов слоя, т.е. $\Lambda(U_n,t)=const=\Lambda$. Тогда уравнения (2) примут вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dP_n(t)}{dt} &= -\Lambda P_n(t);\\ \frac{dP_k(t)}{dt} &= \Lambda P_{k+1}(t)-\Lambda P_k(t)\end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

Решение данной системы при начальных условиях $P_n(0)=1; P_k(0)=0$ при $k<n$ имеет вид [1]:

$$\left.\begin{aligned}P_n(t) &= e^{-\Lambda t};\\ P_k(t) &= \frac{(\Lambda t)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\Lambda t};\\ P_0(t) &= 1-\sum_{k=1}^{n}\frac{(\Lambda t)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\Lambda t}\end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Математическое ожидание k-го состояния - $E(n-k)=\Lambda t$, дисперсия - $D(n-k)=\Lambda t$.

2.1.2. Нестационарное изнашивание

Анализируя поведение изнашиваемого слоя при нестационарном процессе изнашивания, следует рассматривать несколько случаев:

1. ***Скорость изнашивания трибоэлементов не зависит от того, сколько трибоэлементов работает, а зависит только от времени работы.***

Тогда суммарный поток отказов системы-слоя является только функцией времени и не зависит от состояния системы U_k.

Система уравнений (2) для данного случая примет вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dP_n(t)}{dt} &= -\Lambda(t)P_n(t);\\ \frac{dP_k(t)}{dt} &= \Lambda(t)P_{k+1}(t)-\Lambda(t)P_k(t)\end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

Начальные условия: $P_n(0)=1; P_k(0)=0$ при $k<n$.

Согласно предельной теореме суммарного потока, $\Lambda(t)$ будет представлять собой нестационарный поток Пуассона.

Решение системы (5) имеет вид [1]:

$$\left.\begin{aligned} P_k(t) &= \frac{a(t)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-a(t)}; \\ P_n(t) &= e^{-a(t)}; \\ P_0(t) &= 1-\sum_{k=1}^{n}\frac{a(t)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-a(t)} \end{aligned}\right\}, \qquad (6)$$

где $a(t)=\int\limits_0^t \Lambda(t)dt$ - параметр закона.

2. *Скорости изнашивания трибоэлементов слоя не зависят от времени, а зависят только от количества работающих элементов в заданный момент времени.*

При этом, если интенсивности отказов элементов при k работающих элементах $\lambda_i(U_k)$ выражаются через интенсивности отказов элементов в начальный момент времени $\lambda_i(U_n)$ в виде:

$$\lambda_i(U_k)=k\lambda_i(U_n),$$

то система уравнений (1) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP_n(t)}{dt} &= -\sum_{i=1}^{n} n\lambda_i(U_n)P_n(t); \\ \frac{dP_k(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^{k+1}(k+1)\lambda_i(U_n)P_{k+1}(t)-\sum_{i=1}^{k}k\lambda_i(U_n)P_k(t); \end{aligned}\right\}. \qquad (7)$$

С учетом суммарного потока система (7) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP_n(t)}{dt} &= -k\Lambda P_n(t) \\ \frac{dP_k(t)}{dt} &= (k+1)\Lambda P_{k+1}(t)-k\Lambda P_k(t) \end{aligned}\right\}, \qquad (8)$$

где Λ - суммарный поток в начальный момент времени в состоянии U_k. Таким образом, $\Lambda_k=k\Lambda$, тогда система (8) имеет решение [1]:

$$\left.\begin{aligned} P_n(t) &= e^{-n\Lambda t}, \\ P_{n-k}(t) &= \frac{\Lambda^k n!}{(n-k)!}\frac{1}{\Lambda^k}\sum_{i=0}^{k}\frac{e^{-(n-i)\Lambda t}}{\sum\limits_{l=0}^{k}\prod\limits_{h=0}^{k}(i-h)/(i-l)}, \\ P_0(t) &= 1-\sum_{k=0}^{n-1}P_{n-k}(t) \end{aligned}\right\}, \qquad (9)$$

Математическое ожидание: $M(k)=\sum\limits_{k=1}^{n}kP_k(t)$

Дисперсия: $D(k)=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2P_k(t)-\left(\sum\limits_{k=1}^{n}kP_k(t)\right)^2$

3. *Скорости изнашивания трибоэлементов являются функциями времени и количества работающих элементов.*

Если суммарный поток отказов элементов в зависимости от времени и количества работающих элементов выражается через суммарный поток отказов в начальный момент времени в виде:

$$\Lambda(U_k, t) = \frac{\Lambda(U_n) + at}{1 + at},$$

где $\Lambda(U_n)$ - суммарная интенсивность потока в начальный момент времени в состоянии U_n; a - величина, постоянная для данных условий и определяющая значение $\Lambda(U_k, t)$ от состояния U_k и времени, то решение системы (2) в этом случае имеет вид процесса Пойа для гибели [1]:

$$P_n(t) = (1 + \Lambda(U_n)at^{-1/a};$$

$$P_k(t) = (\Lambda(U_n)t)^{n-k}(1 + \Lambda(U_n)at)^{-(n-k)-1/a}\,\frac{(1+a)(1+2a)...(1+(n-k-1)a)}{(n-k)!}; \qquad (10)$$

$$P_0(t) = 1 - \sum_{k=1}^{n}(\Lambda(U_n)t)^{n-k}(1 + \Lambda(U_n)at)^{-(n-k)-1/a}\,\frac{(1+a)(1+2a)...(1+(n-k-1)a)}{(n-k)!}.$$

Таким образом, первоначальная задача для системы с зависимыми элементами свелась к задаче о процессе чистой гибели псевдосостояний системы U_k путем использования предельной теоремы потоков. В зависимости от вида функции интенсивности суммарного потока отказов $\Lambda(U_k, t)$ приведены некоторые известные частные решения системы уравнений Колмогорова. Естественно, что приведеные выше решения не могут удовлетворить всего многообразия условий функционирования трибосистем и зависимости скоростей изнашивания трибоэлементов будут иметь более сложный вид. В этом случае для решения системы уравнений (1) необходимо прибегнуть к численным методам решения дифференциальных уравнений. Однако более целесообразно перейти в данном случае от рассмотрения случайных процессов с непрерывным временем и дискретными состояниями к рассмотрению случайных процессов с дискретным временем и состояниями, что позволит описать данную задачу с помощью математического аппарата цепей Маркова.

2.2. Дискретное время и состояния

Переход от построения моделей изнашиваемого тела с помощью случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем к построению моделей в дискретном времени и состояниях обусловлены не только простотой численной реализации на ЭВМ и возможностью получения решения, не накладывая ограничения на вид зависимостей, описывающих потоки отказов, но и тем, что эволюция процессов накопления трибоповреждений наилучшим образом описывается как функция числа циклов нагружений, которым подверглась система.

2.2.1. Общие положения

Как и в случае с непрерывным временем, трибоэлемент может находится в одном из 2-х состояний: - рабочем состоянии - 0 и состоянии отказа - 1 с вероятностью, которая определяется через скорость изнашивания трибоэлемента [2].

Для представления поведения трибоэлемента в виде марковской цепи с дискретным временем можно воспользоваться "моделью удара" [3], которая применительно к данному случаю формулируется следующим образом:

- в начальном состоянии трибоэлемент находится в состоянии рабочем ;

- в период цикла нагружения происходит удар; если сила удара ниже некоторого уровня, то отказ элемента не наступает, если сила удара превысила заданый уровень - происходит отказ трибоэлемента (переходит в поглощающее состояние).

Цикл нагружения (ЦН) - это повторяющийся период функционирования изделия, в течение которого может возникнуть отказ трибоэлемента. Циклами нагружения можно измерять время, которое в данном случае дискретно. "Модель удара" позволяет с помощью допущения, что отказ трибоэлемента возможен только в период ЦН, представить процесс изнашивания в дискретном времени. Это ограничение не приводит к потерям в физике процесса, зато дает преимущества в вычислительном алгоритме.

2.2.2. Математическая модель

Как и в случае непрерывного времени, требования к системе не меняются, т. е. система состоит из n в общем случае не равнонадежных элементов, вероятности отказов элементов, зависят от времени и числа неотказавших элементов на данный момент. Система имеет U_k псевдосостояний, каждое псевдосостояние имеет k $(k= n, \ldots, 0)$ элементов, отказ любого из них может перевести псевдосистему в состояние U_{k-1}.

Совокупность состояний псевдосистемы $U_n, U_{n-1}, \ldots, U_0$ образуют схему гибели (рис.4).

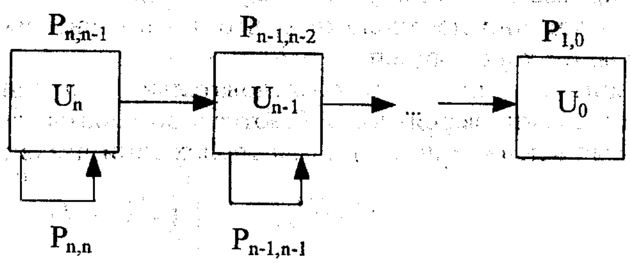

Рис.4. Схема гибели

В общем случае, процесс чистой гибели, состоящий из псевдосостояний U_n, $U_{n-1}, \ldots, U_0$ не будет марковским процессом, однако его можно описать с помощью марковского процесса [1] с дискретным временем и состояниями.

Для этого необходимо составить:

- вектор начальных состояний;
- матрицу переходных вероятностей (МПВ).

1. Вектор начальных состояний псевдосистемы, исходя из допущения, что все трибоэлементы находятся в рабочем состоянии 0 в начальный момент времени, имеет вид:

$$[\boldsymbol{P_0}]^{cc} = [1,0,0,\ldots,0].$$

2. Матрица переходных вероятностей для данного случая:

$$[\boldsymbol{P}]^{cc} = \begin{bmatrix} P_{nn}(U_n,t) & P_{n,n-1}(U_n,t) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_{n-1,n-1}(U_{n-1},t) & P_{n-1,n-2}(U_{n-1},t) & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Безусловная вероятность нахождения СС в том или ином состоянии, что равнозначно количеству работающих трибоэлементов СС, в некоторый момент времени:

$$[\boldsymbol{T_t}]^{cc} = [\boldsymbol{T_{t-1}}]\,[\boldsymbol{P_t}] \tag{12}$$

Компоненты матрицы переходных вероятностей (11) можно найти, проанализировав поведение трибоэлементов псевдосистемы в состояниях $U_n, U_{n-1}, \ldots, U_0$.

Согласно п.2.1, любой из k трибоэлементов в случае отказа может перевести псевдосистему в состояние U_{k-1}, т.е. в псевдосостоянии трибоэлементы образуют цепь последовательно соединенных (в смысле надежности) элементов.

Вероятность безотказной работы цепи ТЭ в псевдосостояниях даст значение компонентов матрицы переходных вероятностей $P_{k,k}(U_k,t)$, зная которые, можно найти из условия $P_{k,k}(U_k,t)+P_{k,k-1}(U_k,t)=1$ условные вероятности переходов $P_{k,k-1}(U_k,t)$.

Для нахождения вероятности безотказной работы цепи ТЭ в псевдосостоянии необходимо проанализировать 2 случая:

- ТЭ в псевдосостоянии независимы в смысле надежности, т.е. вероятности отказов ТЭ в псевдосостоянии не связаны между собой функциональной связью;
- ТЭ в псевдосостоянии зависимы, т.е. имеют корреляционную связь.

В случае независимости ТЭ вероятность безотказной работы цепи ТЭ в псевдосостоянии определится:

$$P_{k,k}(U_k,t)=\prod_{i=1}^{k}P_i(U_k,t), \tag{13}$$

где $P_i(U_k,t)$ -вероятность безотказной работы трибоэлементов состояния U_k в момент времени t.

Предположение о независимости ТЭ в псевдосостоянии упрощает задачу, однако может привести к некоторому искажению результатов. Работоспособность трибоэлементов оценивается при одновременном воздействии одних и тех же факторов, что приводит к одновременнному повышению надежности трибоэлементов, кроме того для оценки надежности отдельно взятых трибоэлементов используются одни и те же статистические данные, что может привести к одновременному завышению или занижению показателей надежности. Поэтому логично предположить, что ТЭ в псевдосостоянии являются зависимыми с положительной корреляцией.

Исходя из вышесказанного, для последовательного соединения зависимых трибоэлементов истинное значение вероятности безотказной работы цепи будет выше, чем значение вероятности, вычисленное по (13), в предположении независимости, т.е:

$$P_{k,k}(U_k,t)\geq\prod_{i=1}^{k}P_i(U_k,t) \tag{14}$$

Зависимость (13) является нижней оценкой истинного значения $P_{k,k}(U_k,t)$.

Для определения вероятности безотказной работы $P_i(U_k,t)$ отдельно взятого ТЭ состояния U_k в момент времени t воспользуемся "моделью удара", которая позволяет использовать математический аппарат цепей Маркова.

В начальный момент времени все ТЭ находятся, согласно допущению, в рабочем состоянии - 0, поэтому вектор начальных состояний для ТЭ имеет вид: $[P_0]=[1,0]$.

Поведение ТЭ описывается МПВ с единичными скачками вверх и наличием поглощающего состояния, т.к. ТЭ, попав в состояние отказа - 1, больше в работе не участвует.

Тогда МПВ j-го ТЭ в момент времени t, если система-слой находится в состоянии U_k, имеет вид:

$$\left[P_j(U_k,t)\right]=\begin{bmatrix}P_{0,0}(U_k,t) & P_{0,1}(U_k,t)\\ 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{15}$$

Безусловная веротность нахождения j-го ТЭ в момент времени t для U_k состояния системы слоя определится по выражению:

$$\left[T_j(U_k,t)\right]=\left[T_j(U_k,t)\right]\left[P_j(U_k,t)\right]. \tag{16}$$

Компоненты МПВ ТЭ или условные вероятности перехода ТЭ из состояния 0 в состояние 1 определяються через скорости изнашивания ТЭ [3].

Вероятность безотказной работы ТЭ определяется как безусловная вероятность нахождения его в 0-состоянии из выражения (16).

Подставив результат в выражение (14), определяются компоненты (условные вероятности) МПВ псевдосистемы (11). Зависимость (12) дает безусловные вероятности нахождения системы слоя в том или ином состоянии. Вероятность нахождения псевдосистемы в состоянии U_0 (поглощающее) является вероятностью отказа системы-слоя.

Определив вероятность отказа системы-слоя можно перейти к построению модели системы тела (СТ).

3. Вероятностная модель системы тела

Изнашиваемое тело можно представить в виде системы с m+1 (m - количество слоев) состояниями. Изнашивание такой системы будет предствлять собой случайное одностороннее движение скачками величиной h, равной высоте слоя. Последовательное движение системы-тела из состояния 0 в состояние m можно описать схемой чистого размножения.

Поток, переводящий СТ из одного состояния в другое, определяется через вероятности перехода в поглощающее состояние соответствующей системы слоя. Для описания поведения такой системы-тела воспользуемся системой дифференциальных уравнений Колмогорова (17). Причем ограничение, накладываемое в таких случаях на независимость от предыстории, не является обязательным. Вводя в состав параметров, характеризующих настоящее состояние системы, те параметры из прошлого, от которых зависит будущее, можно "маркивизировать" и многие не марковские случайные процессы [1]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP_n(t)}{dt} &= -\lambda_n(t)P_n(t) + \lambda_{n-1}(t)P_{n-1}(t)\ ,\ n>1 \\ \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda_0(t)P_0(t) \end{aligned}\right\}. \qquad (17)$$

Решение системы (17) определяется видом $\lambda_n(t)$. Для некоторых частных случаев имеется ряд решений, в частности, приведеных в работе [1], однако они не могут удовлетворить всего многообразия поведения трибоэлементов и соответствующие зависимости скоростей изнашивания будут иметь более сложный вид, чем те, для которых приведены решения в [1]. Поэтому для построения математической модели изнашиваемого тела целесообразно представить модель в дискретном времени.

Используя выкладки п. 2.2.1, можно сказать, что переход системы-тела в следующее состояние будет происходить в период ЦН, в момент, когда СС перейдет в поглощающее состояние с вероятностью отказа соответствующей СС.

Вектор начальных состояний СТ, исходя из допущений, имеет вид: $[P_0]^{cm}=[1,0,...,0]$.

Для описания поведения СТ используется МПВ с единичными скачками вверх и наличием поглощающего состояния, т.к. h выбирается из условия, что вероятность перехода системы в период ЦН в более высокое состояние, чем следущее, имеет более высокий порядок малости, кроме того, износ m-го слоя означает отказ СТ (достижение предельной величины износа) или переход в поглощающее состояние.

$$[P]^{c\ m} = \begin{bmatrix} P_{1,1}(t) & P_{1,2}(t) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_{2,2}(t) & P_{2,3}(t) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ & & & P_{m-1,m-1}(t) & P_{m-1,m}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}. \qquad (18)$$

Безусловная вероятность нахождения системы-тела в том или ином состоянии определиться:

$$[T_i]^{c\ m} = [T_{i-1}][P]^{c\ m}. \qquad (19)$$

А вероятность нахождения системы в поглощающем m-состоянии и будет вероятностью износа тела на допустимую величину.

Литература

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. -М.: Наука, 1991.

2. Сорокатый Р.В., Кузьменко А.Г. Определение параметров модели процессов изнашивания представляемых в виде цепи Маркова // Проблемы трения и изнашивания. - 1995.-№1.

3. Богданофф Дж., Козин Ф. Вероятностные модели накопления повреждений: Пер. с англ. - М.: Мир, 1989.