

## ПЛОСКА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДИСКРЕТНОГО СЕРЕДОВИЩА

*Розглядаються статичні, геометричні та фізичні співвідношення, а також крайові умови, що формують крайову задачу плоскої розрахункової області, заповненої фізично дискретним матеріалом, який працює в умовах плоско-деформованого напруженого стану. Наводиться математичне та скінчено-елементне формулювання задачі. Описуються ітераційні процедури розв'язання плоскої крайової задачі механіки дискретного середовища методом скінчених елементів.*

*Ключові слова: плоска крайова задача; дискретне середовище; внутрішнє кулонове тертя; дилатансія.*

O.A. DOROFYEV, O.V. BAHRII, V.V. KOVTUN  
Khmelnitskyi National University

### FLAT BOUNDARY VALUE PROBLEM OF A DISCRETE MEDIUM

*The article deals with the defining relations of the plane boundary value problem of a discrete medium and specific methods of its solution. A boundary value problem is considered to assess the state of a discrete medium. Its physical ratios should reflect the fundamental features of the deformation of the discrete medium: the influence of internal Coulomb friction on the deformation process at all stages of loading; occurrence of volume deformations during shear (dilatancy); significant influence of the type of stress-strain state on the nature of the laws of discrete materials deformation. The problem is formulated as a boundary value problem of a flat physically nonlinear inhomogeneous area filled with a discrete material that does not perceive tensile stresses and counteracts external perturbations only due to internal dry pendant friction. The material is considered to be quasi-continuous, which is deformed under conditions of plane deformation according to the experimentally established nonlinear laws of Coulomb's rheological model. The hypothesis of small deformations is introduced, which allows using linear differential Cauchy dependences to fulfil the condition of deformation continuity. It is assumed that the stress-strain state of the calculation area is estimated only by the stresses and strains that occur in the plane of deformation perpendicular to the axis with zero deformation. Mathematical and finite-element formulation of the problem is given. Iterative procedures for solving a plane boundary value problem of the mechanics of a discrete medium by the finite element method are described.*

*Keywords: flat boundary value problem, discrete environment, internal Coulomb's friction, dilatation.*

**Вступ.** Інженерна механіка розглядає контактну взаємодію матеріалів різних класів: твердих тіл; рідин; газів; фізично-дискретних матеріалів. При силовому чи кінематичному навантаженні матеріали деформуються, – змінюють свій напружено-деформований стан, що теоретично можна описати шляхом формулювання і розв'язання відповідної крайової задачі. Для описання напружено-деформованого стану твердих тіл використовуються добре апробовані теорії пружності, пластичності, повзучості; для рідин – апарат гідромеханіки; для газів – аеродинаміки. Розрахункової ж моделі більш складних реологічних об'єктів – дискретних матеріалів – ще недостатньо розроблені.

Аналіз реологічних моделей, які пропонувалися для описання напружено-деформованого стану дискретного середовища, показав [1], що найбільш перспективним є використання моделей нелінійної механіки ґрунтів, які розглядають дискретне середовище як квазісуцільне, що деформується за специфічними нелінійними законами. Характер цих законів встановлюється експериментально за результатами спеціальних лабораторних випробувань макрозразків конкретного матеріалу.

Встановлені експериментально закони деформування використовуються для формулювання нелінійних фізичних рівнянь плоскої крайової задачі механіки дискретних матеріалів.

**Метою статті** є обґрунтування визначальних співвідношень плоскої крайової задачі дискретного середовища і специфічних методів її розв'язання.

**Стан проблеми.** Визначальні співвідношення крайової задачі будь-якого середовища повинні відображати особливості деформування матеріалу, що його заповнює. Результати лабораторних випробувань дискретних матеріалів, переважно сухих пісків, дозволили встановити принципові відмінності законів їх деформування від твердих тіл [2].

На відміну від твердих тіл деформування дискретного середовища відбувається переважно за рахунок взаємних зсувів твердих частинок матеріалу по хаотично орієнтованих мікроконтактах. Цим зсувам протидіють сили внутрішнього кулонового тертя, вплив якого не відображають співвідношення класичних теорій пружності і пластичності.

Для оцінки стану дискретного середовища при силовому чи кінематичному збуренні розглядається відповідна крайова задача, фізичні співвідношення якої повинні відображати такі принципові особливості його деформування:

1. **Вплив внутрішнього кулонового тертя на процес деформування на усіх етапах навантаження.** Цю особливість можна врахувати, якщо закон формозміни дискретного середовища представити у вигляді залежності девіатора деформацій  $\{D_{\varepsilon}\}$  не тільки від девіатора напружень  $\{D_{\sigma}\}$ , але й від кульового тензора деформацій  $\{\sigma_0\}$ , тобто як залежність між другим інваріантом тензора деформацій  $I_2^{\varepsilon}$  та інваріантами  $I_1^{\sigma}$ ,

$I_2^{\sigma}$  тензора напружень

$$I_2^\varepsilon = \varphi(I_1^\sigma, I_2^\sigma). \quad (1)$$

2. Виникнення об'ємних деформацій при зсувах (дилатансія). Прояв дилатансії з позицій механіки твердого деформованого тіла можна представити як залежність між першим інваріантом тензора деформацій  $I_1^\varepsilon$  і інваріантами  $I_1^\sigma, I_2^\sigma$  тензора напружень

$$I_1^\varepsilon = \psi(I_1^\sigma, I_2^\sigma). \quad (2)$$

3. Суттєвий вплив на характер законів деформування дискретних матеріалів виду напружено-деформованого стану. На відміну від твердих тіл дискретні матеріали завжди працюють в умовах складного (тривісного) напруженого стану. Деформований же стан матеріалу може бути: *простим, одновісним* (стискання в об'ємі); *плоским, двовісним*, коли деформації поздовж одного напрямку обмежені (протяжні споруди); *складним, тривісним*. Залежністю законів деформування від виду напружено-деформованого стану можна знехтувати, якщо характер цих законів встановлюється в умовах того ж напружено-деформованого стану, в якому працює матеріал в природі. Наприклад, при формулюванні фізичних співвідношень плоскої крайової задачі дискретного середовища можна використати інваріантні залежності (1) і (2). Але вони повинні бути одержані за результатами випробувань зразків матеріалу на приладах, у яких відтворюється плоско-деформований напружений стан, характерний для більшості протяжних інженерних конструкцій.

### Основний матеріал і результати.

#### Основні співвідношення плоскої крайової задачі дискретного середовища

Задача формулюється як крайова задача плоскої фізично-нелінійної неоднорідної області, заповненої дискретним матеріалом, який не сприймає розтягуючих напружень і протидіє зовнішнім збуренням тільки за рахунок внутрішнього сухого кулонового тертя.

Матеріал розглядається як квазісуцільний, що деформується в умовах плоскої деформації за встановленими експериментально нелінійними законами реологічної моделі Кулона. Вводиться гіпотеза малості деформацій, що дозволяє використовувати лінійні диференціальні залежності Коші для виконання умови нерозривності деформацій.

Вважається, що напружено-деформований стан розрахункової області оцінюється тільки напруженнями  $\sigma(x, y)$  і деформаціями  $\varepsilon(x, y)$ , що виникають у площині деформування  $x, y$ , перпендикулярній осі  $z$  з нульовою деформацією ( $\varepsilon_z = 0$ ).

У випадку плоскої деформації умова рівноваги записується двома диференціальними рівняннями

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= v_x \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= v_y \end{aligned} \right\},$$

де  $v_x, v_y$  – об'ємні сили;

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  – напруження в площині деформування.

Для подальшого використання систему рівнянь рівноваги зручно записати в матричній формі

$$[C]\{\sigma\} = \{v\}, \quad (3)$$

де  $[C]$  – матриця диференціального оператора

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix};$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \text{ – вектор напружень;}$$

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} \text{ – вектор об'ємних сил.}$$

Умову нерозривності деформацій безпосередньо одержують з лінійних диференціальних залежностей Коші

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \tau_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y},$$

які описуються одним матричним рівнянням

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\}, \quad (4)$$

в якому

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} - \text{вектори деформацій і переміщень в площині деформування } xy;$$

$[B]$  – матриця диференціального оператора

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Характер рівнянь рівноваги та нерозривності деформацій не залежить від особливостей деформування матеріалу.

Необхідні ж для формулювання крайової задачі фізичні співвідношення «напруження–деформації» встановлюються за результатами лабораторних випробувань макрозразків матеріалу в умовах, коли їх напружено-деформований стан збігається з особливостями задачі. У випадку плоскої крайової задачі механіки дискретного середовища використовуються співвідношення «напруження–деформації», що встановлені за результатами випробувань макрозразків матеріалу на оригінальних приладах плоскої деформації [4, 5]. Ці співвідношення записуються у формі інваріантних залежностей нелінійної теорії пружності зі змінними модулем зсуву  $G_{3M}$  і модулем об'ємної деформації  $K_{3M}$

$$S = G_{3M}\Gamma, \tag{5}$$

$$\sigma_m = K_{3M}\varepsilon_m, \tag{6}$$

в яких інваріанти тензорів напружень та деформацій мають чіткий фізичний зміст:

$S = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$  – другий інваріант тензора напружень; у випадку плоскої задачі – максимальне дотичне напруження;

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \text{середнє стискаюче напруження};$$

$$\Gamma = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \text{другий інваріант тензора деформацій за умови } \varepsilon_z = 0;$$

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - \text{деформація об'єму};$$

$\sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  – головні стискаючі напруження і деформації у площині деформування (за додатні приймаються стискаючі напруження).

Функціональна залежність (5) описує закон формозміни дискретного матеріалу в умовах плоского деформування, а залежність (6) – закон зміни об'єму. В механіці твердого деформівного тіла закони формозміни і зміни об'єму вважаються незалежними. У механіці ж дискретних матеріалів ці закони є взаємопов'язаними, а співвідношення (5) і (6) описують єдину поверхню деформування у багатовимірному просторі інваріантів

$$\Phi(S, \sigma_m, \Gamma, \varepsilon_m) = 0.$$

Характер цієї поверхні можна геометрично представити її зрізами

$$S = \varphi(\Gamma), \text{ при } \sigma_m = const \tag{7}$$

$$\varepsilon_m = \psi(\sigma_m), \text{ при } S = const. \tag{8}$$

Вирази (7) і (8) будуть аналогічними інваріантним залежностям (5) та (6) нелінійної теорії пружності за умови, що деформаційні параметри  $G_{3M}, K_{3M}$  визначаються за результатами випробувань зразків дискретного матеріалу відповідно при  $\sigma_m = const$  і  $S = const$ . Лабораторні випробування сухого кварцового піску на приладі плоскої деформації [6] при  $\sigma_m = const$  дозволяють апроксимувати експериментальну залежність (5) дробово-лінійною функцією

$$S = \frac{n\Gamma}{m + \Gamma} \sigma_m, \tag{9}$$

де  $n, m$  – параметри апроксимації. З виразу (9) безпосередньо визначається величина змінного січного модуля зсуву

$$G_{3M} = \frac{n}{m + \Gamma} \sigma_m. \tag{10}$$

Отже, величина модуля зсуву  $G_{3M}$  дискретного матеріалу залежить не тільки від деформацій зсуву  $\Gamma$ , як це прийнято в механіці твердого деформівного тіла, але й від стискаючого напруження  $\sigma_m$ . Ця

відмінність інтерпретується як вплив внутрішнього кулонового тертя на деформування дискретного матеріалу.

Для формулювання фізичних рівнянь крайової задачі у формі нелінійної теорії пружності необхідно крім змінного модуля зсуву  $G_{3M}$  експериментальним шляхом встановити величину другого параметра  $K_{3M}$ , який входить у залежність (6), котра описує закон зміни об'єму дискретного середовища. Ця задача суттєво ускладнюється в зв'язку з принциповою відмінністю закону зміни об'єму дискретного матеріалу і твердого тіла. Ще в 1886 р. О. Рейнольдс [3] встановив, що на зміни об'єму дискретного матеріалу впливають не тільки нормальні напруження, але й дотичні (прояв дилатансії). Тобто, закон зміни об'єму описується більш складною інваріантною функцією

$$\varepsilon_m = \psi(\sigma_m, S). \quad (11)$$

У вираз (6) входить змінний модуль деформації  $K_{3M}$ , який можна представити як суму двох доданків

$$K_{3M} = K_{3M}^{\sigma_m} + K_{3M}^{\delta}. \quad (12)$$

Перший доданок  $K_{3M}^{\sigma_m}$  відображає залежність об'ємних деформацій від стискаючого напруження  $\sigma_m$ . Його величину можна визначити за результатами випробувань зразків матеріалу на оригінальному компресійному приладі [7], [8]. Величина другої, дилатансійної складової  $K_{3M}^{\delta}$  знаходиться з відомого співвідношення механіки твердого деформівного тіла

$$K_{3M}^{\delta} = 2G_{3M} \frac{1 + \nu_{3M}}{1 - \nu_{3M}}, \quad (13)$$

у яке входять визначені експериментально змінний модуль зсуву  $G_{3M}$  і коефіцієнт Пуассона  $\nu_{3M}$ . Величину  $\nu_{3M}$  легко визначити з випробувань на приладі плоскої деформації ([4, 5]), в яких фіксуються головні напруження  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  в площині деформування і напруження  $\sigma_z$  у перпендикулярному напрямку.

З умови плоскої деформації ( $\varepsilon_z = 0$ ) знаходимо

$$\nu_{3M} = \frac{\sigma_z}{\sigma_1 + \sigma_2}. \quad (14)$$

Випробування сухого піску на приладі плоскої деформації показали, що коефіцієнт Пуассона  $\nu_{3M}$  є найбільш стабільним безрозмірним деформаційним параметром, який зручно використовувати для аналізу напружено-деформованого стану дискретного середовища.

Фізичні рівняння плоскої задачі можна записати через знайдені експериментально деформаційні параметри  $G_{3M}$  і  $K_{3M}$  у координатній формі

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_{3M} + 2G_{3M}}{2} \varepsilon_x + \frac{K_{3M} - 2G_{3M}}{2} \varepsilon_y; \\ \sigma_y &= \frac{K_{3M} - 2G_{3M}}{2} \varepsilon_x + \frac{K_{3M} + 2G_{3M}}{2} \varepsilon_y; \\ \tau_{xy} &= G_{3M} \gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

або одним матричним рівнянням

$$\{\sigma\} = [D_{3M}] \{\varepsilon\}, \quad (16)$$

де  $[D_{3M}]$  – матриця змінних деформаційних параметрів

$$[D_{3M}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} K_{3M} + 2G_{3M} & K_{3M} - 2G_{3M} & 0 \\ K_{3M} - 2G_{3M} & K_{3M} + 2G_{3M} & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{3M} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

### Математичне формулювання плоскої крайової задачі механіки дискретних матеріалів

Розглядається вирізана з масиву дискретного середовища, що працює в умовах плоскої деформації, розрахункова область  $\theta$  одиничної товщини  $h=1$  (рис. 1).

На дільниці  $S(R)$  контуру задаються зовнішні силові навантаження  $R(x, y)$  (силові крайові умови); на дільниці  $S(u)$  – відомі переміщення  $u(x, y)$  (кінематичні крайові умови). На  $S(0)$  переміщення відсутні,  $u = 0$ .

Задача полягає у визначенні напружень  $\sigma(x, y)$ , деформацій  $\varepsilon(x, y)$  і переміщень  $u(x, y)$ , які відповідають прийнятій реологічній моделі середовища та заданим крайовим умовам на межі області.

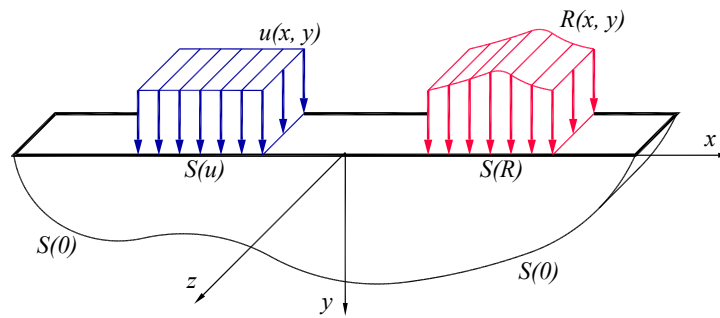


Рис. 1. Плошка розрахункова область

Для формулювання задачі використовуються три системи рівнянь, які зручно записати у матричній формі:

статичні рівняння рівноваги (3) –

$$[C]\{\sigma\} = \{v\};$$

геометричні рівняння Коші (4) –

$$[B]\{u\} = \{\varepsilon\};$$

фізичні рівняння (16) –

$$[D]_{zm} \{\varepsilon\} = \{\sigma\}.$$

Для конкретизації задачі задаються силові та кінематичні крайові умови на межі області

$$\left. \begin{aligned} [L]\{\sigma\} &= \{R_S\} \text{ на } S(R); \\ \{u\} &= \{u_S\} \text{ на } S(u); \\ \{u\} &= \{0\} \text{ на } S(0). \end{aligned} \right\},$$

де  $\{R_S\}$  – вектор відомих сил на межі  $S(R)$ ;

$[L]$  – матриця напрямних косинусів

$$[L] = \begin{bmatrix} m & 0 & l \\ 0 & l & m \end{bmatrix};$$

$\{u_S\}$  – відомі переміщення на межі  $S(u)$ ;

$\{0\}$  – відсутність переміщень на межі  $S(0)$ .

Враховуючи те, що у нелінійні фізичні рівняння входять змінні модулі деформації  $G_{zm}$  та  $K_{zm}$ , величина яких залежить від досягнутого рівня напружено-деформованого стану у кожній точці розрахункової області, сформульовану задачу можна класифікувати як фізично нелінійну крайову задачу неоднорідної плоскої області.

Очевидно, що для розв'язання такої складної задачі необхідно розробити спеціальні ітераційні процедури, які можна реалізувати тільки з використанням потужних комп'ютерних систем і результатів лабораторних випробувань макрозразків конкретного матеріалу на двовісне стискання в умовах плоскої деформації.

Запропоновано багато чисельних методів, які з використанням спеціальних ітераційних процедур дозволяють одержати рішення фізично-нелінійних задач механіки твердого деформівного тіла. Найбільш ефективним з них вважається метод скінчених елементів (МСК), який може бути базовим методом для розробки ітераційних алгоритмів розв'язання плоскої граничної задачі механіки дискретного середовища з урахуванням специфіки його деформування.

#### Скінчено-елементне формулювання задачі

Ідея методу скінчених елементів полягає у заміні суцільної розрахункової області системою скінчених елементів, які взаємодіють між собою тільки у вузлах. В цих точках, за визначенням, забезпечується виконання умови нерозривності деформування або умови рівноваги. Зусилля і переміщення у вузлах знаходяться методами будівельної механіки, найчастіше методом переміщень. Кожний скінчений елемент деформується згідно з фізичними співвідношеннями прийнятої реологічної моделі. Це дозволяє знайти напруження і деформації всередині елемента, що відповідають вузловим зусиллям та переміщенням, і звести розв'язок крайової задачі суцільної розрахункової області до більш простої задачі взаємодії системи скінчених елементів заданої форми, яка розв'язується відомими методами будівельної механіки.

Зручність використання МСЕ для розв'язання нелінійних задач пояснюється простотою та чіткістю інтерпретації усіх етапів розрахунку, можливістю здійснювати поетапний контроль результатів. Але найбільш важливою особливістю методу є те, що для спеціально вибраних форми елемента і апроксимуючих функцій напруження та деформації не будуть змінюватися в межах одного елемента. Оскільки модулі деформацій дискретних матеріалів залежать від досягнутого рівня напруженого стану, значення модулів деформацій на конкретному етапі розрахунку в цьому випадку можна призначати не для кожної точки розрахункової області, а для кожного скінченого елемента. Це дає можливість реалізувати

спеціальні ітераційні алгоритми розрахунків чисельними методами.

Послідовність розв'язання крайової задачі методом скінчених елементів зводиться до використання наступних операцій:

створюють дискретну модель розрахункової області – розбивають суцільну область на сітку скінчених елементів (рис. 2);

зовнішні навантаження на межі області  $S(R)$ , а також об'ємні сили приводять до вузлових сил  $\{R\}$ , а відомі переміщення на межі  $S(u)$  – до вузлових переміщень  $\{\delta\}$ . Умову неможливості переміщень на межі  $S(0)$  задовольняють шляхом введення у вузлах на межі області відповідних зв'язів;

для кожного скінченого елемента формулюють матрицю жорсткості  $[k_e]$ , яка зв'язує між собою вектори вузлових сил з векторами переміщень вузлів, що належать одному і тому ж елементу;

формулюють глобальну матрицю жорсткості  $[K]$  системи елементів, яка враховує „внесок” кожного скінченого елемента у жорсткість всієї системи;

формулюють і розв'язують систему канонічних рівнянь будівельної механіки, найчастіше методу переміщень, в результаті чого знаходять вузлові переміщення, а через них – деформації і напруження в скінчених елементах.

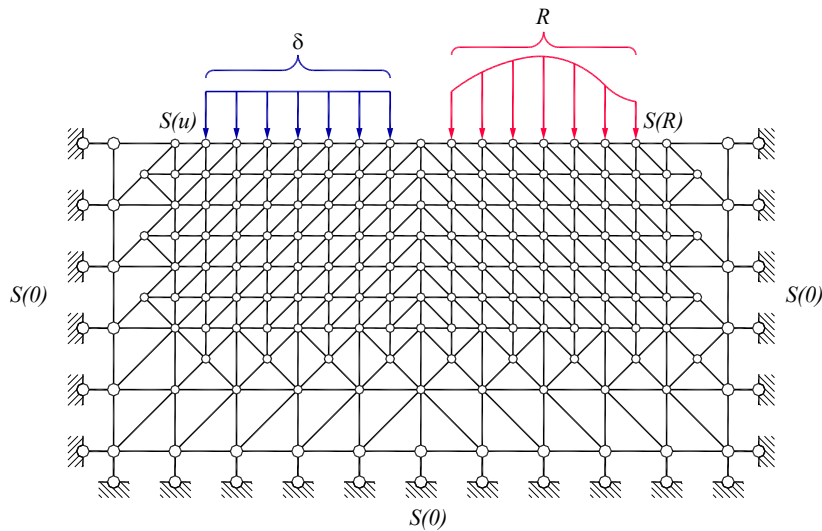


Рис. 2. Дискретна модель розрахункової області

Більшість описаних етапів є стандартними для МСЕ. Однак, для реалізації сформульованої попередньо фізично нелінійної задачі необхідно враховувати такі особливості.

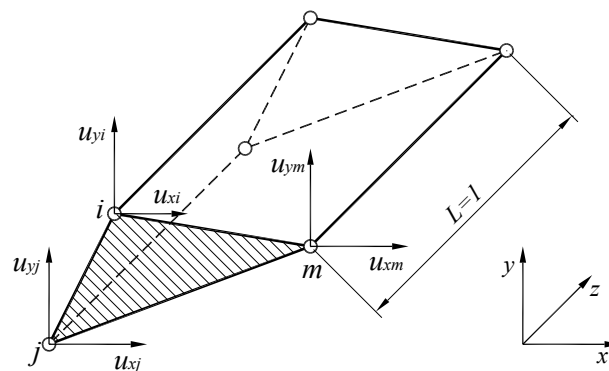


Рис. 3. Симплекс-елемент для плоскої задачі

1. Форма скінченого елемента і прийняті апроксимуючі функції повинні забезпечувати на кожному етапі розрахунку незмінність досягнутих значень напружень і деформацій в межах одного елемента, що дозволяє призначати величини змінних модулів деформації не для кожної точки області, а для кожного скінченого елемента. Це досягається вибором базового скінченого симплекс-елемента у формі трикутної призми сталої довжини  $L = 1 = const$  (рис. 3).

Апроксимуюча функція, що описує характер зміни переміщень від координат  $x$ ,  $y$  точок, приймається лінійною.

Переміщення  $\{u\}$  довільної точки в середині елемента виражаються через вузлові переміщення  $\{\delta_e\}$  його вузлів наступним співвідношенням

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = [N]\{\delta_e\} = [IN_i + IN_j + IN_m]\{\delta_e\}, \quad (18)$$

де  $I$  – одинична матриця розмірності  $2 \times 2$ ;  
 $N$  – функція форми

$$N = \frac{a + bx + cy}{2A}, \quad (19)$$

де  $a, b, c$  – коефіцієнти, які визначаються через вузлові переміщення;  
 $A$  – площа елемента (об'єм  $V = A \cdot 1$ ).

Деформації  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  точок скінченного елемента згідно зі співвідношеннями Коші знаходяться як похідні функції переміщень  $\{u\}$ . Для прийнятої лінійної апроксимації похідні не залежать від координат  $x, y$  точок елемента. Тому деформації в середині кожного елемента є сталими. В цьому легко переконатися, виконавши наступні диференціальні операції

$$\{\varepsilon_e\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [B_e]\{\delta_e\} = [B_i, B_j, B_m] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix}, \quad (20)$$

де  $B_i, B_j, B_m$  – підматриці матриці  $[B_e]$  диференціального оператора. Наприклад, підматриця  $[B_i]$  має вигляд

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial y} & \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Аналогічно записуються матриці  $[B_j], [B_m]$ .

Таким чином матриця  $[B_e]$ , а тому і деформації  $\{\varepsilon_e\}$  не залежать від координат точок всередині елемента.

Між деформаціями  $\{\varepsilon_e\}$  і напруженнями  $\{\sigma_e\}$  існує однозначний зв'язок (16)

$$\{\sigma_e\} = [D_e]_{3M} \{\varepsilon_e\}.$$

Тому величини компонентів тензора напружень в межах скінченного елемента також будуть сталими на кожному етапі навантаження.

Отже, вибір скінченного симплекс-елемента у формі трикутної призми з лінійною функцією переміщень задовольняє сформульованим вище вимогам.

2. Другою принциповою особливістю задачі, що розглядається, є необхідність врахування об'ємних сил тяжіння. Без цього розрахункова область дискретного матеріалу іноді не може сприймати зовнішнє навантаження. Як показано О. Зенкевичем [9], об'ємні сили  $X, Y$  можна привести до вузлових за допомогою інтегрального співвідношення

$$\{R_e\} = - \int [N]^T \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} dx dy. \quad (22)$$

Для введених форми елементів і лінійної апроксимуючої функції після інтегрування одержимо, що сила тяжіння порівну розподіляється між трьома вузлами елемента.

Процедура приведення відомих величин розподіленого навантаження  $P$  і переміщень  $u$  на границі розрахункової області до вузлових зусиль  $\{R\}$  і переміщень  $\{\delta\}$  не відрізняється від прийнятої для лінійних задач.

3. Наступний етап розрахунку – формулювання матриці жорсткості елемента – за прийнятих припущень також спрощується.

В загальному випадку матриця жорсткості скінченного елемента для плоскої задачі визначається виразом

$$[k_e] = \int [B_e]^T [D_e] [B_e] dx dy. \quad (23)$$

З урахуванням вище зазначених припущень вираз (23) набуває вигляду

$$[k_e] = [B_e]^T [D_e]_{3M} [B_e] A. \quad (24)$$

де  $A$  – площа перерізу скінченного елемента площиною  $xy$ .

Компоненти матриці  $[B_e]$  в межах скінченного елемента не залежать від координат, а матриця

деформаційних параметрів  $[D_e]_{3M}$  містить змінні модулі  $G_{3M}$  і  $K_{3M}$ , величини яких залежать від досягнутих в центрі ваги скінченного елемента напружень і деформацій.

$$[D_e]_{3M} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} K_{3M} + 2G_{3M} & K_{3M} - 2G_{3M} & 0 \\ K_{3M} - 2G_{3M} & K_{3M} + 2G_{3M} & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{3M} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

де  $G_{3M} = \frac{n}{m + \Gamma} \sigma_m$ ,  $K_{3M} = 2G_{3M} \frac{1 + \nu_{3M}}{1 - \nu_{3M}}$ .

4. Формування глобальної матриці жорсткості  $[K]$  системи елементів дискретної моделі розрахункової області є відомою процедурою „складання” матриць жорсткості елементів, описаною О. Зенкевичем [9].

Після формування глобальної матриці жорсткості  $[K]$  суцільна розрахункова область розглядається як звичайна механічна система деформівних елементів, розрахунок якої ведеться відомим методом переміщень будівельної механіки і зводиться до знаходження вузлових переміщень та вузлових зусиль. Для цього в шарнірних вузлах, що з'єднують між собою скінчені елементи, вводять додаткові в'язі, які перетворюють систему в кінематично визначувану. Введені в'язі дозволяють безліч можливих переміщень вузлів. Для одержання дійсних переміщень вузлів використовується принцип мінімізації потенціальної енергії системи (принцип Лагранжа).

Умова мінімуму потенціальної енергії в методі переміщень записується у вигляді системи канонічних рівнянь

$$[K]\{\delta\} = -\{R\}, \quad (26)$$

де  $\{R\}$  – вектор зовнішніх сил, прикладених у вузлах системи;

$\{\delta\}$  – вектор вузлових переміщень.

За своєю фізичною сутністю канонічні рівняння (26) є рівняннями рівноваги вузлів, у яких невідомими є вузлові переміщення  $\{\delta\}$ .

Для одержання розв'язку конкретної задачі рівняння (26) повинні задовольняти крайовим умовам. Форма запису цих умов залежить від структури основних рівнянь і відомих значень сил та переміщень на межі розрахункової області.

Якщо на межі розрахункової області задані силові крайові умови у формі відомих вузлових сил, вони автоматично враховуються вектором  $\{R\}$  зовнішніх сил (відповідні компоненти вектора прирівнюються відомих силам). Для вузлів на межі, що вільна від навантаження, компоненти вектора  $\{R\}$  прирівнюються нулю.

Якщо крайові умови задані у формі відомих переміщень вузлів на межі області, вектори  $\{\delta\}$  і  $\{R\}$ , а також матрицю жорсткості  $[K]$  частково модифікують за відомою процедурою, наприклад, за процедурою, описаною в [9].

Остаточну скінчено-елементне формулювання задачі зводиться до наступних операцій.

Створюють дискретну модель розрахункової області. Для цього суцільну область замінюють сіткою скінчених елементів, що мають форму трикутних призм, з'єднаних у вузлах. Формують необхідні матриці зв'язку номерів елементів і координат вузлів, вектори відомих навантажень і переміщень, силові та кінематичні граничні умови.

Для кожного скінченного елемента формують матрицю жорсткості  $[k_e]$ , що задовольняє умовам рівноваги і суцільності, а також фізичним співвідношенням між напруженнями і деформаціями.

За принципом „складання” матриць жорсткості елементів формують глобальну матрицю жорсткості  $[K]$  розрахункової області і записують систему лінійних рівнянь методу переміщень.

Розв'язуючи систему з урахуванням крайових умов одержують вектор вузлових переміщень

$$\{\delta\} = [K]^{-1}\{R\},$$

а через нього обчислюють деформації  $\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}$  і напруження  $\{\sigma\} = [D]_{3M}\{\varepsilon\}$  всередині елемента.

Описана процедура може бути реалізована для фізично нелінійної задачі тільки після розробки спеціальних обчислювальних ітераційних алгоритмів, суть яких полягає в тому, що складна фізично нелінійна задача розв'язується поетапно, коли на кожному етапі вирішується лінійна задача, в якій величини деформаційних параметрів елемента призначаються в залежності від досягнутого в ньому на попередньому етапі рівня напружень і деформацій.

#### Ітераційні алгоритми рішення крайової задачі дискретного середовища

Для розв'язання складної фізично-нелінійної крайової задачі механіки дискретних матеріалів запропоновано ітераційні процедури, подібні тим, що використовуються для розв'язання задач теорії пластичності, коли ітерації виконуються в межах кожного скінченного елемента, а не для усієї області, а рішення крайової задачі континуальної плоскої області введенням скінчених елементів зводиться до розв'язання системи канонічних рівнянь методу переміщень будівельної механіки з урахуванням відповідно

сформульованих крайових умов.

Для прийнятих симплекс-елементів ітераційні процедури можуть бути реалізовані одним з трьох відомих методів [9]: змінних жорсткостей, початкових напружень та початкових деформацій. Найбільш зручним для інженерного використання виявився метод змінних жорсткостей.

Відомо, що рішення задачі буде єдиним, якщо воно задовольняє умовам рівноваги, нерозривності деформацій, прийнятим в моделі законам деформування та відповідає крайовим умовам розрахункової схеми.

При розв'язанні задачі в переміщеннях з використанням МСЕ для прийнятих симплекс-елементів умова нерозривності деформацій завжди виконуються у вузлах і на гранях елемента. Розв'язання системи канонічних лінійних рівнянь методу переміщень, які за своїм змістом є рівняннями рівноваги, природно, забезпечує виконання умов рівноваги у кожному вузлі дискретної розрахункової області. Тому розрахункова процедура організовується таким чином, щоб одержані рішення відповідали також і законам деформування матеріалу. Для цього і розроблено спеціальні ітераційні алгоритми методів змінних жорсткостей, початкових напружень або початкових деформацій, які відрізняються тільки способом одержання рішень.

При розв'язанні нелінійної задачі методом змінних жорсткостей усі „нелінійності” зводять в матрицю  $[D]_{3m}$  змінних деформаційних параметрів, а далі – в матрицю  $[k_e]$  жорсткості елемента. Деформаційні параметри  $G_{3m}$  і  $K_{3m}$ , що входять в ці матриці, корегуються для кожного наступного етапу ітерації в залежності від досягнутого на попередньому етапі рівня напружень і деформацій.

На першому етапі ітераційного алгоритму за цим методом розв'язують лінійну задачу однорідної області. Для усіх скінчених елементів задають одні і ті ж початкові значення модуля зсуву  $G_1$  та модуля об'ємної деформації  $K_1$ , які призначають за результатами випробувань зразків матеріалу в умовах плоскої деформації. Формують матриці жорсткості  $[k_1^e]$  кожного елемента, а за правилом „збирання” і глобальну матрицю жорсткості  $[K_1]$  системи.

Розв'язують систему канонічних рівнянь методу переміщень з урахуванням крайових умов, в результаті чого визначають вектор вузлових переміщень  $\{\delta\}_1$

$$\{\delta\}_1 = [K_1]^{-1}\{R\},$$

де  $\{R\}$  – вектор вузлових сил.

За визначеними вузловими переміщеннями знаходять вектори досягнутих на першій ітерації деформацій  $\{\varepsilon\}_1$  і напружень  $\{\sigma\}_1$  в кожному елементі

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}_1 &= [B]\{\delta\}_1, \\ \{\sigma\}_1 &= [D][B]\{\delta\}_1. \end{aligned}$$

За цими величинами обчислюють інваріанти  $S_1$ ,  $\sigma_1^m$ ,  $\Gamma_1$  тензорів напружень і деформацій. В просторі інваріантів значенням  $S_1$ ,  $\sigma_1^m$ ,  $\Gamma_1$  відповідає точка  $A_1$  (рис. 4), а напруження  $\{\sigma\}_1$  і деформації  $\{\varepsilon\}_1$ , що одержані з рішення на першому етапі лінійної задачі, відповідають призначеним величинам модулів  $G_1$  і  $K_1$ , але не узгоджуються з нелінійними законами деформування. Визначений з лінійного розв'язку напружено-деформований стан кожного скінченого елемента задовольняє умовам рівноваги і суцільності, але не задовольняє фізичним нелінійними рівняннями, що описують поверхню деформування матеріалу. Тому одержана точка  $A_1$  (рис. 4) в загальному випадку не лежить на поверхні деформування. Досягнутій деформації  $\Gamma_1$  на цій поверхні відповідає точка  $a_1$ . Відрізок  $A_1a_1$  відображає різницю між лінійним і нелінійним розв'язком (нев'язку).

Для зменшення невязки проводять наступні ітерації.

На другій ітерації призначають нові значення модулів деформації  $G_2 = \frac{S_1}{\Gamma_1} = \frac{n}{m + \Gamma_1} \sigma_1^m$ ;

$K_2 = 2G_2 \frac{1+\nu}{1-\nu}$ , свої для кожного елемента, і розв'язують лінійну задачу вже для неоднорідної області,

оскільки деформаційні параметри  $G_2$  і  $K_2$  будуть різними для кожного скінченого елемента. Далі формують матриці жорсткості  $[k_2^e]$  елементів, глобальну матрицю жорсткості  $[K_2]$  системи, знаходять вузлові переміщення  $\{\delta\}_2$ , деформації  $\{\varepsilon\}_2$  і напруження  $\{\sigma\}_2$  в усіх елементах. Підраховують інваріанти  $S_2$ ,  $\sigma_2^m$ ,  $\Gamma_2$  одержаних на другому етапі тензорів напружень і деформацій, визначають невязку між лінійним рішенням і поверхнею деформування. Якщо невязка більша наперед заданої малої величини,

продовжують ітераційний процес з модулями деформації  $G_3 = \frac{S_2}{\Gamma_2} = \frac{n}{m + \Gamma_2} \sigma_2^m$ ;  $K_3 = 2G_3 \frac{1 + \nu_{3M}}{1 - \nu_{3M}}$ .

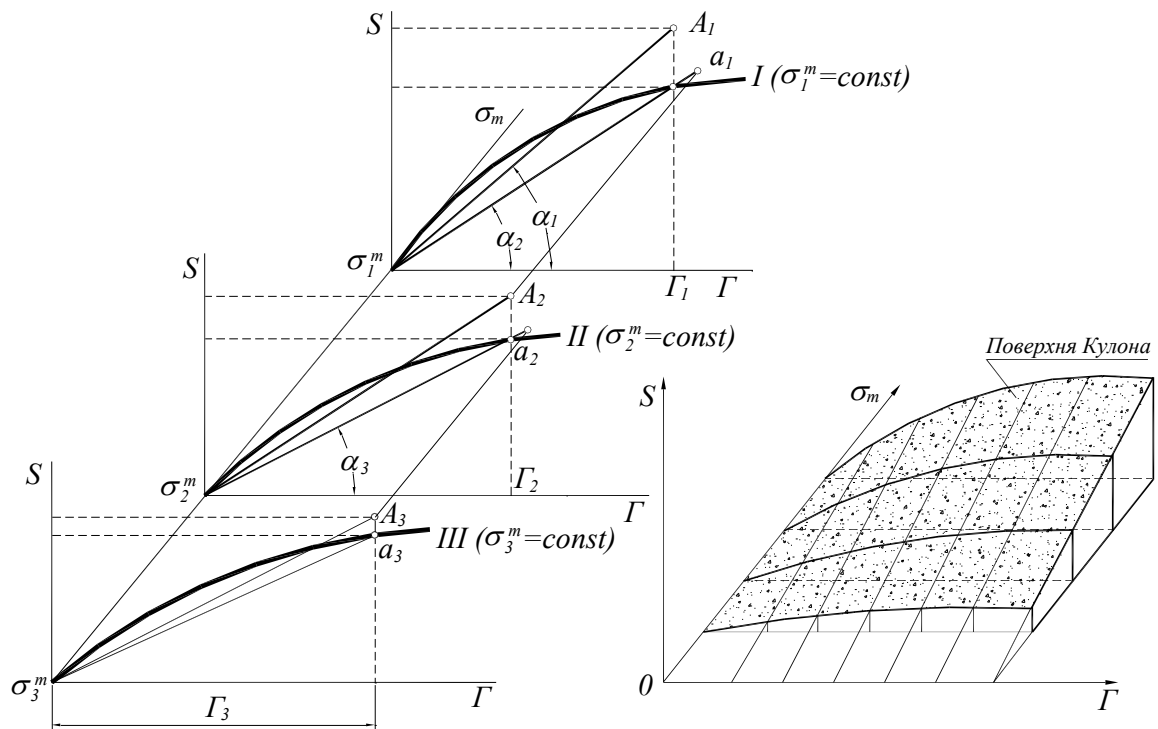


Рис. 4. Графічне представлення ітераційного процесу

Описаний процес наглядно ілюструється побудовами, що показані на рис. 4.

Лінійному рішенню на першому етапі в просторі інваріантів  $\Gamma, S, \sigma_m$  відповідає точка  $A_1(\Gamma_1, S_1, \sigma_1^m)$  і крива  $I$ , що є зрізом поверхні деформування площиною  $\sigma_1^m = const$ , а досягнутому рівню деформацій  $\Gamma_1$  – точка  $a_1$  на кривій  $I$ . Відрізок  $A_1a_1$  розглядається як нев'язка між лінійним і нелінійним рішеннями. Модуль зсуву  $G_2$ , що використовується на 2-му етапі ітерації дорівнює тангенсу кута нахилу січної  $O_1a_1$  ( $G_2 = \text{tg}\alpha_2$ ). Відповідно для третього етапу  $G_3 = \text{tg}\alpha_3$  і т.д. Таким чином, на кожному наступному етапі ітераційного процесу величини модулів деформації призначають за напружено-деформативним станом, досягнутим в елементі на попередньому етапі. Процес закінчується на  $k$ -му етапі, коли нев'язка  $\xi$  стає меншою прийнятої допустимої величини  $[\xi]$

$$\xi = \left| \frac{S_l^{(k)} - S_T^{(k)}}{S_T^{(k)}} \right| \leq [\xi]$$

де  $S_l^{(k)}$  – значення інваріанта тензора напружень, що відповідає досягнутому в лінійному рішенні деформаціям  $\Gamma^{(k)}$ ;

$S_T^{(k)}$  – значення інваріанта тензора напружень, що знаходиться з нелінійного фізичного співвідношення

$$S_T^{(k)} = \frac{n\Gamma^{(k)}}{m + \Gamma^{(k)}} \sigma^{(k)m}$$

Рекурентні залежності, що описують запропонований алгоритм для  $k$ -го етапу, можна записати таким чином:

$$\left. \begin{aligned} G_{3M}^{(k)} &= \frac{S^{(k-1)}}{\Gamma^{(k-1)}}; \\ K_{3M}^{(k)} &= 2G_{3M}^{(k)} \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu}; \end{aligned} \right\} \text{ – корегування деформаційних параметрів;}$$

$$[D^{(k)}]_{3M} = [D] \left( G_{3M}^{(k)}, K_{3M}^{(k)} \right) \text{ – формулювання нової матриці деформаційних параметрів;}$$

$\left[ k_e^{(k)} \right] = [B]^T [D^{(k)}]_{3m} [B] A \rightarrow [K^{(k)}]$  – формування матриці жорсткості кожного скінченного

елемента;

$\left[ K^{(k)} \right] \left\{ \delta^{(k)} \right\} = \{ R \}$  – формування системи рівнянь методу переміщень;

$\left\{ \delta^{(k)} \right\} = \left[ K^{(k)} \right]^{-1} \{ R \}$  – визначення вузлових переміщень лінійних алгебраїчних рівнянь (розв'язання системи лінійних рівнянь методу переміщень);

$\left\{ \epsilon^{(k)} \right\} = [B^{(k)}] \left\{ \delta^{(k)} \right\} \rightarrow \Gamma^{(k)}$  – обчислення деформацій;

$\left\{ \sigma^{(k)} \right\} = [D^{(k)}] [B^{(k)}] \left\{ \delta^{(k)} \right\} \rightarrow S^{(k)}, \sigma_{(k)}^m$  – обчислення напружень;

$S_T^{(k)} = \frac{n\Gamma^{(k)}}{m + \Gamma^{(k)}} \sigma_{(k)}^m$  – визначення величини інваріанту, що відповідає поверхні деформування;

$\xi = \left| \frac{S^{(k)} - S_T^{(k)}}{S_T^{(k)}} \right| \leftrightarrow [\xi]$  – перевірка розходження.

Відмінність описаної ітераційної процедури від відомих процедур теорії пластичності полягає в тому, що "зближення" відбувається не в одній площині напружень – деформацій  $(S - \Gamma)$ , а в тривимірному просторі  $(S - \Gamma - \sigma_m)$ . Положення кожної кривої  $(S^{(k)} - \Gamma^{(k)})$  визначається рівнем досягнутого стискуючого напруження  $\sigma_k^m$ .

Для розв'язання нелінійної крайової задачі механіки дискретних матеріалів з використанням описаних ітераційних процедур за участі авторів статті розроблено спеціальний програмний комплекс GEO, який об'єднує програми, що реалізують окремі процедури ітераційного процесу [10], а також створено лабораторне забезпечення, необхідне для практичного використання програмного комплексу.

Можливість використання цього програмного комплексу для розв'язання крайової задачі дискретних матеріалів показана в [11].

**Висновки.** В статті описані співвідношення, що формулюють плоску крайову задачу дискретного середовища, яка класифікується як фізично-нелінійна задача неоднорідної області, що деформується за законами реологічної моделі Кулона. Наведено скінчено-елементне формулювання задачі, що в поєднанні зі спеціальними ітераційними процедурами дозволяє розв'язувати задачу відомих методом скінчених елементів.

## Література

1. Ковтун В. В. Основи механіки дискретних матеріалів : монографія / В. В. Ковтун, О. А. Дорофєєв. – Хмельницький : ХНУ, 2018. – 131 с.
2. Ковтун В. В. Експериментальне обґрунтування вихідних положень механіки дискретного середовища і визначення розрахункових параметрів моделей / В. В. Ковтун, О. А. Дорофєєв // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2011. – № 3. – С. 20–27.
3. Reynolds O. Experiments showing dilatancy, a property of granular material / O. Reynolds. – Proc. Roy. Inst. 2, 1886. – P. 354–363.
4. А. с. 1158925 СССР. Прибор для исследований свойств грунта в условиях плоской деформации / В. В. Ковтун, В. Г. Безносюк, Н. А. Мазур. – № 3673183/29-33 ; заявл. 16.12.83 ; опубл. 30.05.85, Бюл. № 20.
5. А. с. 1141158 СССР. Нагрузочное устройство для испытаний грунтов в приборах трехосного сжатия / В. В. Ковтун, В. Г. Безносюк, Н. А. Мазур. – № 3673169/29-33 ; заявл. 16.12.83 ; опубл. 23.02.85, Бюл. № 7.
6. Ковтун В. В. Визначальні співвідношення механіки дискретного середовища / В. В. Ковтун // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2008. – №5. – С. 69–76.
7. Пат. 11675 Україна, МПКG01N 33/24. Спосіб визначення деформаційних параметрів пористих матеріалів за результатами лабораторних випробувань / В. В. Ковтун, О. В. Багрій ; власник Хмельн. нац. ун-т. – № 200503929 ; заявл. 25.04.2005 ; опубл. 16.01.2006, Бюл. № 1. – 3 с.
8. Пат. 18390 Україна, МПКG01N 33/24. Пристрій для лабораторних випробувань пористих матеріалів / В. В. Ковтун, О. В. Багрій ; власник Хмельн. нац. ун-т. – № 200603878 ; заявл. 07.04.2006 ; опубл. 15.11.2006, Бюл. № 11. – 4 с.
9. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
10. Ковтун В. В. Метод конечных элементов в портовом гидротехническом строительстве / В. В. Ковтун, В. Т. Бугаев – М. : Мортехинформреклама, 1987. – 48 с.
11. Багрій О. В. Деформування середовища з урахуванням внутрішнього кулонового тертя в умовах

плоскої деформації : дис. ... канд. техн. наук : 01.02.04 / Багрій Олена Вікторівна ; Мін-во освіти і науки України, Хмельницький національний університет. – Хмельницький, 2009. – 145 с.

#### References

1. Kovtun V. V. *Osnovy mekhaniky dyskretnykh materialiv : monohrafiia* / V. V. Kovtun, O. A. Dorofieiev. – Khmelnytskyi : KhNU, 2018. – 131 s.
2. Kovtun V. V. Eksperymentalne obgruntuvannya vykhidnykh polozhen mekhaniky dyskretnoho seredovyscha i vyznachennia rozrakhunkovykh parametriv modelei / V. V. Kovtun, O. A. Dorofieiev // *Herald of Khmelnytskyi National University*. – 2011. – № 3. – S. 20–27.
3. Reynolds O. Experiments showing dilatancy, a property of granular material / O. Reynolds. – *Proc. Roy. Inst.* 2, 1886. – P. 354–363.
4. A. s. 1158925 SSSR. Pribor dlya issledovaniy svojstv grunta v usloviyah ploskoj deformacii / V. V. Kovtun, V. G. Beznosyuk, N. A. Mazur. – № 3673183/29-33 ; zayavl. 16.12.83 ; opublik. 30.05.85, Byul. № 20.
5. A. s. 1141158 SSSR. Nagruzochnoe ustrojstvo dlya ispytaniy gruntov v priborah trehosnogo szhatiya / V. V. Kovtun, V. G. Beznosyuk, N. A. Mazur. – № 3673169/29-33 ; zayavl. 16.12.83 ; opublik. 23.02.85, Byul. № 7.
6. Kovtun V. V. Vyznachalni spivvidnoshennia mekhaniky dyskretnoho seredovyscha / V. V. Kovtun // *Herald of Khmelnytskyi National University*. – 2008. – №5. – S. 69–76.
7. Pat. 11675 Ukraina, MPKG01N 33/24. Sposib vyznachennia deformatsiinykh parametriv porystykh materialiv za rezultatamy laboratornykh vyprobuvan / V. V. Kovtun, O. V. Bahrii ; vlasnyk Khmeln. nats. un-t. – № 200503929 ; zaiavl. 25.04.2005 ; opublik. 16.01.2006, Biul. № 1. – 3 s.
8. Pat. 18390 Ukraina, MPKG01N 33/24. Prystrii dlia laboratornykh vyprobuvan porystykh materialiv / V. V. Kovtun, O. V. Bahrii ; vlasnyk Khmeln. nats. un-t. – № 200603878 ; zaiavl. 07.04.2006 ; opublik. 15.11.2006, Biul. № 11. – 4 s.
9. Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tehnikе* / O. Zenkevich. – M. : Mir, 1975. – 541 s.
10. Kovtun V. V. Metod konechnykh elementov v portovom gidrotehnicheskomy stroitelstve / V. V. Kovtun, V. T. Bugaev – M. : Morteinformreklama, 1987. – 48 s.
11. Bahrii O. V. Deformuvannya seredovyscha z urakhuvanniam vnutrishnoho kulonovoho tertia v umovakh ploskoj deformatsii : dys. ... kand. tekhn. nauk : 01.02.04 / Bahrii Olena Viktorivna ; Min-vo osvity i nauky Ukrainy, Khmelnytskyi natsionalnyi universytet. – Khmelnytskyi, 2009. – 145 s.

Надійшла / Paper received : 05.11.2020 р. Надрукована/Printed :27.11.2020 р.