XVI Міжнародна науково-практична конференція «Methods of solving complex problems in science», 25-28 квітня 2023 р., Прага, Чехія

Секція – Фізико-математичні науки

МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМИ КОНТАКТУ ДВОХ СПІВВІСНИХ ІДЕНТИЧНИХ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ЦИЛІНДРІВ ТА ШАРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Наталія Олександрівна Ярецька,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри вищої математики та комп’ютерних застосувань, Хмельницького національного університету
yaretskano@khmnu.edu.ua
Дмитро Віталійович Кучерук,
здобувач магістерського ступеня кафедри комп’ютерної інженерії та інформаційних систем Хмельницького національного університету
dmytrokucheruk@gmail.com

В сучасних умовах стрімкого розвитку науки і техніки моделювання та дослідження впливу початкових напружень на контактні характеристики пружних тіл, що взаємодіють, є актуальною проблемою як для фундаментальних розробок з механіки деформівного твердого тіла, так і для практичного використання у різних галузях промислового комплексу. Особливо це стосується розрахунку важких фундаментних плит і будівельних перекриттів, що знаходяться в полі дії гравітаційних сил тощо. Тому є досить актуальним побудова та дослідження математичних моделей, за допомогою яких проводять теоретичні дослідження впливу початкових напружень на контактну взаємодію пружних тіл.

Основні теоретичні результати з теорії контактної взаємодії пружних тіл були висвітлені в статтях [1, 2], а також у монографіях [3–5].

Одним з важливих факторів при контактній взаємодії є вплив початкових напружень, які практично завжди присутні в реальних конструкціях і деталях машин, тому розробка ефективних методів розрахунку напружено-деформованого стану з врахуванням початкових деформацій є актуальною і важливою науково-технічною проблемою.

У даній роботі, з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності [1-5], змодельоване та досліджене питання передачі навантаження від ідентичних співвісних пружних циліндричних штампів з початковими напруженнями до пружного шару з початковими напруженнями без врахування сил тертя. Дослідження виконано у загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Дослідження проведене в координатах початкового деформованого стану Oy_i,, що пов'язані з лагранжевими координатами: $y_i=\lambda_i x_i$ (i=1, 2, 3), де λ_i – коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану.

Прийнято, що початкові стани у циліндрах та шарі – однорідні та рівні, а пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовані функції алгебраїчних інваріантів тензора деформації Гріна [3]. Крім того, дія штампа викликає у півпросторі мале збурення основного напружено-деформованого стану.

Усі величини, що відносяться до верхнього та нижнього циліндричного штампу позначаються верхнім індексом (1) та (2), відповідно. Величини, що відносяться до пружного шару позначаються без верхнього індексу.

Враховуючи однорідність та рівність початкових напружено-деформованих станів у циліндрах та шарі, будуть виконуватися умови:

$$y_k = \lambda_k x_k, \quad \lambda_k = const, \; y_k = u_{0k} + x_k, \quad u_{0k} = \delta_{ik}(\lambda_k - 1)\frac{y_i}{\lambda_i}, \quad (k, i = 1,2,3) \tag{1}$$

де δ_{ik} - символ Кронекера.

У представленій математичній моделі врахована контактна взаємодія пружних стисливих та нестисливихі ізотропних тіл із довільною структурою пружного потенціалу. У випадку ортотропних матеріалів пиймається, що пружно еквівалентні напрямки будуть співпадати із напрямками осей координат.

Також, у даному досліджені будемо розглядати три стани тіл з початковими (залишковими) напруженнями: природний, коли у тілах відсутні напруження; початковий стан та збурений стан, всі величини якого складаються із суми відповідних величин початкового стану та збурень. Відзначимо, що збурення при цьому є набагато меншими відповідних величин початкового стану [1-3].

Розглянемо пружний попередньо-напружений шар, у який втискаються два співвісних ідентичних пружних циліндричних штампа з початковими (залишковими) напруженнями. Позначимо товщину шару після виникнення в ньому початкового напруженого стану через $2h = 2\lambda_1 h*$, де $h*$ – товщина шару у природному стані; $R^{(i)}, H^{(1)} (i = 1,2)$ – радіус та висоти пружних штампів, відповідно. Будемо вважати, що зовнішні навантаження прикладені тільки до вільних торців пружних штампів так, що їх точки зміщуються в напрямку осі Oy_3 на сталі величини $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}$, відносно площини $y_3 = 0$, а поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішнього навантаження, дія сил тертя в зоні контакту відсутня.

Для дослідження введемо лагранжеві координати (x_1, x_2, x_3), які в початковому стані співпадають з декартовими (y_1, y_2, y_3). Тому даній постановці відповідають наступні граничні умови:

1) на торцях пружних штампів

$$u_3^{(i)} = (-1)^i \varepsilon^{(i)}; \quad Q_{3r}^{(i)} = 0; \quad \forall\ r \in [0, R^{(i)}], \quad y_3 = (-1)^{i+1} h + (-1)^{i+1} H^{(i)},\ (i = \overline{1,2}) \tag{2}$$

2) на бічній поверхні пружних штампів

$$Q_{rr}^{(i)} = 0; \quad Q_{3r}^{(i)} = 0; \quad \forall\ y_3 \in [0, H^{(i)}], \quad r = R^{(i)}\ , \quad (i = \overline{1,2}) \tag{3}$$

3) на межі пружного шару в області контакту

$$U_3 = U_3^{(i)}; \quad Q_{33} = Q_{33}^{(i)}; \quad Q_{3r} = Q_{3r}^{(i)} \quad \forall\ r \in [0, R^{(i)}], \quad y_3 = (-1)^i h\ , \quad (i = \overline{1,2}) \tag{4}$$

4) на межі пружного шару поза областю контакту

$$Q_{33} = Q_{3r} = 0\ , \quad \forall\ r \in [r,\ +\infty]\ , \quad y_3 = \pm h \tag{5}$$

Умови рівноваги мають вигляд:

$$\int_0^{R^{(1)}} \rho [Q_{33}]_{y_3 = h} d\rho - \int_0^{R^{(2)}} \rho [Q_{33}]_{y_3 = -h} d\rho = 0 \tag{6}$$

А рівнодіюча зовнішніх сил визначаються рівністю:

$$P = -2\pi \int_0^{R^{(1)}} \rho [Q_{33}]_{y_3 = h} d\rho = -2\pi \int_0^{R^{(2)}} \rho [Q_{33}]_{y_3 = -h} d\rho \tag{7}$$

І для того, щоб завершити постановку математичної моделі та відповідних їй граничних умов, припустимо, що напруження і переміщення у шарі при $r \to \infty$ зменшуються, а на межі контакту шару та штампів – необмежені.

Далі, для розв'язку та дослідження математичної моделі зводимо задачу до системи парних інтегральних рівнянь:

$$\int_0^\infty \frac{f(\xi)}{\xi} J_0(\xi\rho) d\xi = g(\rho), \text{ при } \rho < R^{(i)},\ \left(i = \overline{1,2}\right) \tag{8}$$

$$\int_0^\infty f(\xi) J_0(\xi\rho) d\xi = 0, \text{ при } \rho > R^{(i)},\ \left(i = \overline{1,2}\right)$$

де $f(\xi)$ – шукана функція, $\theta_3 = \dfrac{m_1(s_1 - s_0)}{\sqrt{n_1}}$, $\theta_4 = \dfrac{1}{n_1}\left(\sqrt{n_1}(m_2 - 1) - m_1 s_0\right)$, $\left(i = \overline{1,2}\right)$, $\rho = \dfrac{r}{R^{(i)}}$, $0 \le \rho \le 1$ та при $n_1 \ne n_2$:

$$g(\rho) = \frac{\varepsilon^{(i)}}{\theta_3}\left[\chi_0^{(i)} - 1 - \theta_4 \sum_{k=1}^\infty \chi_k^{(i)} J_0(\mu_k \rho) + \frac{\theta_3}{\varepsilon^{(i)}} \int_0^\infty \frac{f(\xi)}{\xi} F\left(\xi h^{(i)}\right) J_1(\xi\rho) d\xi\right],\ \left(i = \overline{1,2}\right)$$

Тут $\chi_k^{(i)}$ $(i = \overline{1,2}; k = 0,1,2,...)$ – сталі через які виражаються усі компоненти вектора переміщення та тензора напружень, а вид функції $F(\xi)$ визначається із граничних умов (2) - (7).

З (8) отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма ІІ роду відносно $f(\xi)$:

$$\frac{f(\xi)}{\xi} = \frac{2\varepsilon^{(i)}}{\pi\theta_3}\left[\left(\chi_0^{(i)} - 1\right)\psi_0(\xi, 0) - \theta_4 \sum_{k=1}^\infty \chi_k^{(i)} \psi_0(\xi, \mu_k) + \frac{\theta_3}{\varepsilon^{(i)}} \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} F\left(t h^{(i)}\right) \psi_0(\xi, t) dt\right], (i = \overline{1,2})$$

де $\psi_n(x, y) = \int_0^1 t^n \cos xt \cos ytdt$

Для визначення сталих $\chi_k^{(i)}$ $(i = \overline{1,2}; k = 0,1,2,...)$ отримаємо нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\eta_k^{(i)} \chi_k^{(i)} + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{kn}^{(i)} \chi_n^{(i)} = \beta_k^{(i)}, \; (i = \overline{1,2}; k = 0,1,2,...) \tag{9}$$

Обчислення ускладнюється квадратурами, що входять до виразів вище записаних функцій. Тому будемо користуватись наближеними методами обчислення. Так, розкладемо коефіцієнти систем (9) в ряди за степенями $h^{(i)}$ $\left(i = \overline{1,2}\right)$ та, обчисливши сталі величини χ_k^i $(k \in Z)$ із системи (9) методом редукції, одержимо розв'язки для співвісних ідентичних циліндричних штампів та шару з початковими напруженнями.

На основі проведених числових обчислень для потенціалів конкретної структури можна зробити наступні узагальнюючі висновки: початкові напруження в шарі та ідентичних циліндрах приводять до зменшення контактних напружень у випадку стиску. У випадку розтягу – до їх зростання, а для переміщень при ідентичних початкових і залишкових напруженнях відмічається ефект "резонансного характеру" не тільки в шарі, але і в пружних штампах.

Список літератури

1. Yaretskaya N. F. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *Int. Appl. Mech. Rew*. 2018. 54, №5. Pp. 539-543. https://doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y
2. Babych, S.Y., Yarets'ka, N.O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *Int Appl Mech.* 2021. 57, №3. P. 297-305. https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7
3. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Германия, Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
4. Yaretska N. O. Mathematical model and solution of spatial contact problem for prestressed cylindrical punch and elastic layer./ Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences**:** Collective monograph. - Riga, Latvia : "Baltija Publishing", 2022. – Pp. 261-295. https://doi.org/10.30525/978-9934-26-200-5-10
5. Ярецька Н.О. Математична модель передачі навантаження від попередньо напруженого циліндричного штампа до пружного шару з початковими напруженнями. // Н.О. Ярецька та ін. / Physical and mathematical justification of scientific achievements: monograph. - International Science Group. – Boston: Primedia e Launch, 2020. – С. 60 – 80.