ОСЕСИМЕТРИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА И СЛОЯ С НАЧАЛЬНЫМИ (ОСТАТОЧНЫМИ) НАПРЯЖЕНИЯМИ

Н. А. Ярецкая, д. т. н., проф. В. Б. Рудницкий
Хмельницкий национальный университет
г. Хмельницкий, Украина.
E-mail: massacran2@ukr.net

Одной из важных и актуальных областей механики твердого деформированного тела есть изучение проблемы передачи нагрузки в конструкциях и деталях машин способом их контактного взаимодействия, принимая во внимание начальные (остаточные) напряжения.

На сегодняшний день увеличение надежности и долговечности инженерных сооружений есть одной из актуальных задач многих отраслей промышленности. Причем, это требует точного исполнения условий надежности и экономической целесообразности конструкций и одновременно низкой их материалоемкости. А успешному разрешению таких задач в большей мере помогают научные исследования в сфере механики контактного взаимодействия деформированных твердых тел с начальными (остаточными) напряжениями. Потому они вызывают большой интерес в наше время.

Впервые, общая постановка контактных задач теории упругости для сжимаемых и несжимаемых тел с начальными напряжениями при произвольной форме упругого потенциала изложены в работах академика АН УССР Гузя А. Н., профессоров Бабича С. Ю., Рудницкого В. Б. [1-5]. А современный анализ результатов для задач контактного взаимодействия упругих тел с начальным (остаточными) напряжениями выполнен в [1,2].

В статье в рамках линеаризованной теории упругости [1-7] приводится постановка и метод решения пространственной осесимметрической задачи для упругого цилиндра и слоя с начальными (остаточными) напряжениями при их контактном взаимодействии, без учета сил трения. Рассмотрим случаи, когда слой лежит на жестком основании без трения и скреплен с жестким основанием. Исследования выполнены в общем виде для теорий больших (конечных) начальных деформаций и различных вариантов теорий малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала. Предполагается, что упругие потенциалы – дважды непрерывно-дифференцируемые функции алгебраических инвариантов тензора деформации Грина, и начальное состояние в слое – однородное.

Все исследования проведены в координатах начального деформированного состояния $y_i \quad (i=\overline{1,3})$, которые связаны с лагранжевыми координатами (естественного состояния) отношениями $y_i = \lambda_i x_i \quad (i=\overline{1,3})$, где λ_i – коэффициенты удлинения, что определяют перемещения начального состояния.

Кроме того, предположим, что действие штампа вызывает в слое малое возмущение основного напряженно-деформированного состояния, для которого выполняются условия

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$$

Величины, относящиеся к упругому штампу и величины, относящиеся к предварительно напряженному слою, с начальными (остаточными) напряжениями записываем в обозначениях [3,4].

Пусть в упругий слой с начальными напряжениями (которые возникают до контакта) вдавливается упругий цилиндричный штамп высотой H под действием силы P, которая приложена к упругому штампу так, что его свободный торец деформируется в направлении оси Oy_3 на одинаковую величину ε, а поверхности вне области контакта остаются свободными от напряжений. В системе круговых цилиндрических координат $(r, \quad \theta, \quad z_i)$ такой постановке соответствуют граничные условия.

На торце упругого штампа $z_i = n_i^{-1/2} H$

$$u_3^{(1)} = -\varepsilon; \quad \tilde{Q}_{r3}^{(1)} = 0 \quad (0 \le r \le R) \tag{1}$$

На границе упругого слоя в области контакта $z_i = 0$

$$u_3^{(1)} = u_3^2; \quad \tilde{Q}_{33}^{(1)} = \tilde{Q}_{33}^{(2)} \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 \le r \le R) \tag{2}$$

На границе упругого слоя вне области контакта $z_i = 0$

$$\tilde{Q}_{33}^{(2)} = 0 \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (R \le r < \infty) \tag{3}$$

На боковой поверхности упругого штампа $r = R$

$$\tilde{Q}_{rr}^{(1)} = 0; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \le z_i \le H) \tag{4}$$

На нижней поверхности слоя, лежащего на жестком основании и скрепленного с основанием, $z_i = -\frac{\lambda_3 H_2}{\sqrt{n_i}} = -\frac{H_i}{\sqrt{n_i}}$

$$u_3^{(2)} = 0 \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 \le r < \infty) \tag{5}$$

$$u_3^{(2)} = 0 \quad u_r^{(2)} = 0 \quad (0 \le r < \infty) \tag{6}$$

где $z_i = n_i^{-1/2} y_3$; $H_2 -$ толщина слоя в естественном (недеформированном) состоянии; $H_1 -$ толщина слоя в начальном деформированном состоянии; $R -$ радіус штампа; $n_i -$ корни разрешающего уравнения [5, формула (2,12)]; индекс (1) отвечает цилиндрическому штампу, а (2) - слою.

Напряженно-деформированное состояние в упругом слое с начальными (остаточными) напряжениями определим через гармонические функции в виде интегралов Ханкеля. Скажем, что преобразования Ханкеля хоть и не дают возможности получить точные решения, но позволят свести задачу к интегральным уравнениям типа Фредгольма, что позволят эффективнее использовать метод последовательных приближений для $\lambda_1 > \lambda_{kr}$ Удовлетворив третьему условию (2), второму – (3) и условиям (5), (6), после ряда преобразований имеем

$$\begin{gathered} u_3 = \frac{1}{\omega_1}\int_0^\infty \eta^{-1} F(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta - \frac{1}{\omega_1}\int_0^\infty \eta^{-1} F(\eta) G(\eta h) J_0(\eta\rho) d\eta; \\ \tilde{Q}_{33} = \frac{2\omega_2}{R}\int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta; \quad \tilde{Q}_{3r} = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

где

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{n_i}}{m_i}\begin{cases} (s_1 - s_0)^{-1} & n_1 = n_2; \\ (s_2 - s_3)^{-1} & n_1 \ne n_2; \end{cases} \quad \omega_2 = \begin{cases} c_{44}(1+m_1) l_1 (s - s_0) & n_1 = n_2; \\ c_{44}(1+m_1) l_1 (s - s_3) & n_1 \ne n_2; \end{cases}$$

$$s_0 = \frac{1+m_2}{1+m_1}; \quad s_1 = \frac{m_1 - 1}{m_1}; \quad s_2 = \frac{m_2}{m_1}\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}; \quad s_3 = s_0\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}; \quad s = s_0\frac{l_2}{l_1};$$

$$G(\eta h) = 1 - q_i^{-1}(\eta h); \quad h = H_1 / R; \quad \varphi_i = 2\eta\frac{h}{\sqrt{n_i}};$$

$$q_i = \begin{cases} (sh2\varphi_1 + 2\varphi_1 / s - s_0)(ch2\varphi_1 - 1)^{-1} \quad n_1 = n_2; \\ s(cth\varphi_2 - s_3 cth\varphi_2) \quad n_1 \ne n_2; \\ \dfrac{(1-s)(s_0 - s_1) + (1 - s_1)(s_0 - s) sh^2\varphi_1 + \varphi_1^2}{\varphi_1 - (1 - s_1) sh\varphi_1 ch\varphi_1} \quad n_1 = n_2; \\ \dfrac{(s_2 + s s_3) - (s + s_2 s_3) sh\varphi_2 ch\varphi_1 + (s_3 + s s_2) ch\varphi_2 sh\varphi_1}{(s_2 sh\varphi_1 sh\varphi_2 - ch\varphi_1 ch\varphi_2)} \quad n_1 \ne n_2; \end{cases} \tag{8}$$

В (8) q_1 та q_2 соответствуют (5), а q_3 и q_4 - (6).

Выражения (7) получены в общей форме для сжимаемых и несжимаемых тел, куда входят коэффициенты n_i, m_i, c_{44}, l_i. Значения этих коэффициентов для сжимаемых и несжимаемых тел поданы в [4].

Для определения напряженно-деформированного состояния осесиметрической статической задачи в упругом цилиндре используем линеаризованные уравнения [2,3] из которых следуют выражения для компонент вектора перемещения и тензора напряжения.

Тогда для равных корней $n_1 = n_2$ общее решение $\chi = \chi_1 + z_1\chi_2$ будет иметь вид:

$$\chi = (1+z_1)\left(A_0 z_1 + B_0 + D_0 z_1\left(r^2 - \frac{2}{3}z_1^2\right)\right) + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k + z_1 B_k) I_0(v_1\gamma_k r) S_1(v_1\gamma_k z_1) + + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\alpha_k r)(S_2(\alpha_k z_1) + z_1 S_3(\alpha_k z_1))$$

А компоненты вектора перемещения для $n_1 = n_2$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
U_r &= \frac{1}{v_1}\Bigg(2D_0 r(2z_1+1) + \sum_{k=1}^{\infty} I_1(v_1\gamma_k r) v_1\gamma_k (B_k S_1(v_1\gamma_k z_1) + (A_k + z_1 B_k) v_1\gamma_k S_6(v_1\gamma_k z_1)) - \\
&- \sum_{k=1}^{\infty} B_k J_1(\alpha_k r)\alpha_k (S_3(\alpha_k z_1) + \alpha_k S_4(\alpha_k z_1) + z_1\alpha_k S_5(\alpha_k z_1))\Bigg) \\
U_3 &= a_1\Bigg(4D_0 z_1(z_1+1) + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k + z_1 B_k) I_0(v_1\gamma_k r) v_1^2\gamma_k^2 S_1(v_1\gamma_k z_1) - \\
&\sum_{k=1}^{\infty} J_1(\alpha_k r)\alpha_k^2 (S_2(\alpha_k z_1) + z_1 S_3(\alpha_k z_1))\Bigg) + a_2\Bigg(2A_0 - 4D_0 z_1(2z_1+1) + \\
&+ 2D_0 r^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_0(v_1\gamma_k r) v_1\gamma_k (2B_k S_1(v_1\gamma_k z_1) - (A_k + z_1 B_k) v_1\gamma_k S_6(v_1\gamma_k z_1)) + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\alpha_k r)\alpha_k (2S_5(\alpha_k z_1) + \alpha_k S_2(\alpha_k z_1) + z_1\alpha_k S_3(\alpha_k z_1))\Bigg)
\end{aligned} \qquad (9)$$

где $a_1 = \begin{cases} \dfrac{w_{1111}}{w_{1133} + w_{1313}}, & \text{сжимаемые тела} \\ \dfrac{x_{1111}}{x_{1133} + x_{1313}}, & \text{несжимаемые тела} \end{cases}$ $\quad a_2 = \begin{cases} \dfrac{w_{3113}}{n_1(w_{1133} + w_{1313})}, & \text{сжимаемые тела} \\ \dfrac{x_{3113}}{n_1(x_{1133} + x_{1313})}, & \text{несжимаемые тела} \end{cases}$

Из (9) получаем выражения для определения составляющих вектора напряжений при $r = const$ в круговых цилиндрических координатах

$$\begin{aligned}
Q_{rr} &= a_3\Bigg(2D_0(2z_1+1) + \sum_{k=1}^{\infty}(v_1\gamma_k (A_k + z_1 B_k) S_6(v_1\gamma_k z_1) + B_k S_1(v_1\gamma_k z_1))\left(I_0(v_1\gamma_k r) - \frac{I_1(v_1\gamma_k r)}{v_1\gamma_k r}\right) v_1^2\gamma_k^2 - \\
&- \sum_{k=1}^{\infty}\left(J_0(\alpha_k r) - \frac{J_1(\alpha_k r)}{\alpha_k r}\right)\alpha_k^2 (S_3(\alpha_k z_1) + \alpha_k S_4(\alpha_k z_1) + z_1\alpha_k S_5(\alpha_k z_1))\Bigg) + a_4\Bigg(4D_0(2z_1+1) + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} I_0(v_1\gamma_k r) v_1^2\gamma_k^2 (B_k S_1(v_1\gamma_k z_1) + (A_k + z_1 B_k) v_1\gamma_k S_6(v_1\gamma_k z_1)) - \\
&- \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\alpha_k r)\alpha_k^2 (S_3(\alpha_k z_1) + \alpha_k S_4(\alpha_k z_1) + z_1\alpha_k S_5(\alpha_k z_1)) + \frac{a_2}{a_1}\Bigg(-4D_0(4z_1+1) - \\
&- \sum_{k=1}^{\infty} I_0(v_1\gamma_k r) v_1^2\gamma_k^2 (3B_k S_1(v_1\gamma_k z_1) + (A_k + z_1 B_k) v_1\gamma_k S_6(v_1\gamma_k z_1)) + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\alpha_k r)\alpha_k^2 (3S_3(\alpha_k z_1) + \alpha_k S_4(\alpha_k z_1) + z_1\alpha_k S_5(\alpha_k z_1))\Bigg)\Bigg) + a_0'
\end{aligned} \qquad (10)$$

$$Q_{r3} = a_5\left(\quad 4D_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} I_1(v_1\gamma_k r) v_1{}^2\gamma_k{}^2 (2B_k S_6(v_1\gamma_k z_1) - v_1\gamma_k (A_k + z_1 B_k) S_1(v_1\gamma_k z_1)) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\alpha_k r)\alpha_k{}^2 (2S_5(\alpha_k z_1) + \alpha_k S_2(\alpha_k z_1) + z_1\alpha_k S_3(\alpha_k z_1))\right) + \tag{11}$$

$$+ a_6\left(\sum_{k=1}^{\infty} (A_k + z_1 B_k) I_1(v_1\gamma_k r) v_1{}^3\gamma_k{}^3 S_1(v_1\gamma_k z_1) + \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\alpha_k r)\alpha_k{}^3 (S_2(\alpha_k z_1) + z_1 S_3(\alpha_k z_1))\right)$$

где $a_0{}' = \begin{cases} 0, & \text{сжимаемые тела} \\ p\lambda_1 q_1, & \text{несжимаемые тела} \end{cases}$ $\quad a_0{}'' = \begin{cases} 0, & \text{сжимаемые тела} \\ p\lambda_3 q_3, & \text{несжимаемые тела} \end{cases}$

$$a_3 = \begin{cases} -\dfrac{w_{1111}}{v_1}, & \text{сжимаемые тела} \\ -\dfrac{x_{1111}}{v_1}, & \text{несжимаемые тела} \end{cases} \qquad a_4 = \begin{cases} \dfrac{w_{1111} w_{1133}}{v_1(w_{1133} + w_{1313})}, & \text{сжимаемые тела} \\ \dfrac{x_{1111} x_{1133}}{v_1(x_{1133} + x_{1313})}, & \text{несжимаемые тела} \end{cases}$$

$$a_5 = \begin{cases} -\dfrac{w_{1313}}{n_1} + \dfrac{w_{3131} w_{3113}}{n_1(w_{1133} + w_{1313})}, & \text{сжимаемые тела} \\ -\dfrac{x_{1313}}{n_1} + \dfrac{x_{3131} x_{3113}}{n_1(x_{1133} + x_{1313})}, & \text{несжимаемые тела} \end{cases} \qquad a_6 = \begin{cases} \dfrac{w_{1111} w_{1331}}{(w_{1133} + w_{1313})}, & \text{сжимаемые тела} \\ \dfrac{x_{1111} x_{1331}}{(x_{1133} + x_{1313})}, & \text{несжимаемые тела} \end{cases}$$

при $y_3 = const$ в круговых цилиндрических координатах:

$$Q_{33} = \frac{1}{v_1}\left(a_7\left(2D_0(2z_1 + 1) + \sum_{k=1}^{\infty} (v_1\gamma_k (A_k + z_1 B_k) S_6(v_1\gamma_k z_1) + B_k S_1(v_1\gamma_k z_1))\left(I_0(v_1\gamma_k r) - \frac{I_1(v_1\gamma_k r)}{v_1\gamma_k r}\right) v_1{}^2\gamma_k{}^2 - \right.\right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty}\left(J_0(\alpha_k r) - \frac{J_1(\alpha_k r)}{\alpha_k r}\right)\alpha_k{}^2 (S_3(\alpha_k z_1) + \alpha_k S_4(\alpha_k z_1) + z_1\alpha_k S_5(\alpha_k z_1))\right) + a_8\left(\quad 4D_0(2z_1 + 1) + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} I_0(v_1\gamma_k r) v_1{}^2\gamma_k{}^2 (B_k S_1(v_1\gamma_k z_1) + (A_k + z_1 B_k) v_1\gamma_k S_6(v_1\gamma_k z_1)) -$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\alpha_k r)\alpha_k{}^2 (S_3(\alpha_k z_1) + \alpha_k S_4(\alpha_k z_1) + z_1\alpha_k S_5(\alpha_k z_1)) - a_9\left(\quad 4D_0(4z_1 + 1) + \right.\right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} I_0(v_1\gamma_k r) v_1{}^2\gamma_k{}^2 (3B_k S_1(v_1\gamma_k z_1) + (A_k + z_1 B_k) v_1\gamma_k S_6(v_1\gamma_k z_1)) -$$

$$\left.\left.\left. - \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\alpha_k r)\alpha_k{}^2 (3S_3(\alpha_k z_1) + \alpha_k S_4(\alpha_k z_1) + z_1\alpha_k S_5(\alpha_k z_1))\right)\right)\right) + a_0{}''$$

(12)

$$Q_{3r} = a_5\left(\quad 4D_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} I_1(v_1\gamma_k r) v_1{}^2\gamma_k{}^2 (2B_k S_6(v_1\gamma_k z_1) - v_1\gamma_k (A_k + z_1 B_k) S_1(v_1\gamma_k z_1)) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\alpha_k r)\alpha_k{}^2 (2S_5(\alpha_k z_1) + \alpha_k S_2(\alpha_k z_1) + z_1\alpha_k S_3(\alpha_k z_1))\right) +$$

$$+ a_{10}\left(\sum_{k=1}^{\infty} (A_k + z_1 B_k) I_1(v_1\gamma_k r) v_1{}^3\gamma_k{}^3 S_1(v_1\gamma_k z_1) + \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\alpha_k r)\alpha_k{}^3 (S_2(\alpha_k z_1) + z_1 S_3(\alpha_k z_1))\right)$$

где $a_7 = \begin{cases} -w_{3311}, & \text{сжимаемые тела} \\ -x_{3311}, & \text{несжимаемые тела} \end{cases}$ $a_8 = \begin{cases} \dfrac{w_{1111}w_{3333}}{(w_{1133}+w_{1313})}, & \text{сжимаемые тела} \\ \dfrac{x_{1111}x_{3333}}{(x_{1133}+x_{1313})}, & \text{несжимаемые тела} \end{cases}$

$a_9 = \begin{cases} \dfrac{w_{3333}w_{3113}}{n_1(w_{1133}+w_{1313})}, & \text{сжимаемые тела} \\ \dfrac{x_{3333}x_{3113}}{n_1(x_{1133}+x_{1313})}, & \text{несжимаемые тела} \end{cases}$ $a_{10} = \begin{cases} \dfrac{w_{1111}w_{3131}}{(w_{1133}+w_{1313})}, & \text{сжимаемые тела} \\ \dfrac{x_{1111}x_{3131}}{(x_{1133}+x_{1313})}, & \text{несжимаемые тела} \end{cases}$

$$\begin{aligned} S_1 &= C_k \sin(\gamma_k \nu_i z_i) + D_k \cos(\gamma_k \nu_i z_i), & S_2 &= E_k sh(\alpha_k z_i) + F_k ch(\alpha_k z_i), \\ S_3 &= N_k sh(\alpha_k z_i) + M_k ch(\alpha_k z_i), & S_4 &= E_k ch(\alpha_k z_i) + F_k ch(\alpha_k z_i), \\ S_5 &= N_k ch(\alpha_k z_i) + M_k sh(\alpha_k z_i), & S_6 &= C_k \cos(\gamma_k \nu_i z_i) - D_k \sin(\gamma_k \nu_i z_i) \end{aligned} \tag{13}$$

В штампе и слое с начальными напряжениями в случае сжимаемых и несжимаемых моделей решение представлено через одну гармоническую функцию. Для отыскания контактного давления в слое и штампе задача сводится к интегральному уравнению типа Фредгольма. Это уравнение специальным приемом приведено к системе алгебраических уравнений

$$\alpha_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{kn} \chi_n = d_k \quad (k = 0,1,2,..)$$

через неизвестные χ_n которой, выражены компоненты вектора напряжений и вектора перемещений. Доказана квазирегулярность системы в случае потенциалов произвольной структуры. Система решена методом редукции. На основании полученных формул для контактных напряжений и перемещений построены графики и диаграммы, дающие графическое и численное представление о влиянии начальных напряжений на закон распределения контактных напряжений и перемещений в области контактного взаимодействия. Основное внимание уделено исследованию влияния начальных напряжений на напряженно деформированное состояние контактирующих тел и их упругого соединения. Отмечено значительное влияние начальных напряжений на характер и величину распределения напряжений и перемещений в области контакта и упругого штампа. Влияние начальных напряжений в поставленных задачах различное и зависит от вида упругого потенциала, величины начальных деформаций и колеблется в пределах от одного и более порядка.

Обнаружен новый механический эффект, характерный тем, что при стремлении начальных напряжений к величинам, соответствующим потере поверхностной устойчивости полупространства, как в слое с начальными (остаточными) напряжениями, так и в упругом штампе возникают явления «резонансного характера», обнаруженные ранее А. Н. Гузем в [5].

Таким образом, в статье представлена теория контактного взаимодействия предварительно напряженных полубесконечных упругих тел с упругими штампами конечных размеров. Из сравнения диаграмм для контактных напряжений в случае полупространства (слоя) с начальными (остаточными) напряжениями и без начальных напряжений сделаны рекомендации для инженерных методов расчета. Суть их состоит в следующем:

1. Наличие сжимающих начальных напряжений в упругом штампе и слое приводит к значительному уменьшению контактных усилий и увеличению перемещений под штампом, для растягивающих начальных напряжений характерно увеличение контактных усилий и уменьшение перемещений под штампом. Таким образом, можно подобрать такое начальное напряженное состояние, при котором характерные эксплуатационные напряжения в местах соприкосновения принимают минимальные значения.

2. При расчете на прочность по контактным перемещениям в местах соприкосновения взаимодействующих тел с начальными напряжениями более опасными являются сжимающие начальные напряжения, по контактным усилиям растягивающие начальные напряжения.

3. Влияние начальных напряжений в упругом штампе и слое на напряженно-деформированное состояние в упругом штампе сказывается только на его поверхности в области $\xi < 1$ ($\xi -$безразмерная координата по высоте упругого штампа) и зависит от вида упругого потенциала.

4. С инженерной точки зрения, возникновение начальных напряжений, по величине близких к поверхностной неустойчивости, является весьма опасным, так как это приводит к резкому изменению напряженно-деформированного состояния.

Література

1.Babich S. Yu.,Guz A.N., Rudsnitsky V. B. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research // Appl. Mech. Reviews.- 1998.- 51, № 5 - p.343- 371.

2.Babich S. Yu.,Guz A.N.,Rudnitsky V.B. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches // Int. Appl. Mech.- 2004.- 40,№7.- p. 744-765.

3.Guz A.N., Rudnitsky V.B. Fundamentals of the contact interaction theory of elastic bodies with initial (residual) stresses. - Khmelnitskiy, Software the Miller "Scientific editions". - 2006. – p. 710.

4.Guz A.N., Rudnitsky V.B. Contact problems for elastic bodies with initial (residual) stresses. - Khmelnitskiy, Software the Miller "Scientific editions". - 2004. – p. 682.

5.Гузь А. Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. - Киев: Наук. думка, 1983. – 286 с.

6.V. B. Rudnitsky, N. O. Yaretska Contact interaction of resilient die and cylindrical die with initial (residual) tension. // Вісник Хмельницького національного університету. Науковий журнал: Технічні науки. – Хмельницький: ХНУ, 5.2007, – с. 136-137.

7. N. O. Yaretska Contact interaction of resilient and cylindrical dies with initial (residual) tension. // Czasopismo technichne: ztsyt 3/2008 (ROK 105). – Wydawnictwo politechniki лкфлщцылшуою – Mechanika, z.3-M/2008. – c. 213-216.