

Кузьменко А.Г.Хмельницкий национальный университет,
Украина**БЕЗРАЗМЕРНАЯ ФОРМА РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ПРИВЕДЕННОГО РАДИУСА В ТРИБОТЕХНИКЕ****1. Представление решения герцевской задачи для шара на плоскости в безразмерном виде****1.1. Формулы в размерном виде**

Для определения радиуса площадки контакта a , максимального контактного давления d_0 на площадке контакта, и сближения шара и плоскости U_0 , в соответствии с решением Герца для случая, когда материалы шара и плоскости одинаковы, в [2] приведены следующие формулы:

$$a = 1,109 \left(\frac{QR}{E} \right)^{1/3} = C_a \left(\frac{QR}{E} \right)^{1/3}, \quad (1)$$

$$d_0 = 0,388 \left(\frac{QE^2}{R^2} \right)^{1/3} C_{d_0} \left(\frac{QE^2}{R^2} \right)^{1/3}, \quad (2)$$

$$U_0 = 1,231 \left(\frac{Q^2}{E^2 R} \right)^{1/3} = C_u \left(\frac{Q^2}{E^2 R} \right)^{1/3}. \quad (3)$$

1.2. Процедура обезразмеривания

В соответствии с основными положениями теории подобия и размерностей любая зависимость определяемой величины (в данном случае $a(QRE)$, $d_0(QRE)$, $U_0(QRE)$) может быть представлена в виде критериального уравнения или зависимости безразмерной определяемой величины (a, d_0, U_0) от безразмерных комплексов из определяющих величин Q, R, E .

В случае если известно решение задачи в размерном виде типа (1), (2), (3) безразмерные комплексы или критерии получают интуитивно путем деления левых и правых частей в формулах на размерные величины так, чтобы получить безразмерные. В соответствии с этим положением:

1) в формуле (1) для радиуса площадки контакта разделив левую и правую части на радиус R (мм), имеющий размерность длины, мм, имеем:

$$\frac{a}{R} = \frac{C_a}{R} \left(\frac{QR}{E} \right)^{1/3} = C_a \left(\frac{QR}{ER^3} \right) = C_a \left(\frac{Q}{ER^2} \right)^{1/3}. \quad (4)$$

В результате слева имеем безразмерный комплекс Π_a :

$$\Pi_a = a/R, \text{ мм/мм}. \quad (4, a)$$

Справа имеем безразмерный комплекс Π_1 :

$$\Pi_1 = Q/ER^2 \frac{\text{кгс} \cdot \text{мм}^2}{\text{кгс} \cdot \text{мм}^2}. \quad (5)$$

Подставляя (4), (5) в (1), получаем безразмерное критериальное уравнение или выражение в виде:

$$\Pi_a = C_a \Pi_1^{1/3}; \quad (6)$$

2) В формуле (2) левую и правую части разделим на модуль упругости E , в результате имеем

$$\frac{\sigma_0}{E} = \frac{C_\sigma}{E} \left(\frac{QE^2}{R^2} \right)^{1/3} = C_\sigma \left(\frac{Q}{ER^2} \right), \quad (7)$$

где слева безразмерный комплекс

$$\Pi_{d_0} = \frac{d_0}{E} = \frac{\text{кгс}}{\text{мм}^2} \cdot \frac{\text{мм}^2}{\text{кгс}} [1], \quad (8)$$

Справа в скобках в (7) имеем безразмерный комплекс Π_1 ,

$$\Pi_1 = \frac{Q}{ER^2} = \frac{\text{кгс} \cdot \text{мм}^2}{\text{кгс} \cdot \text{мм}^2} [1], \quad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в (2), получаем его безразмерное выражение в виде:

$$\Pi_\sigma = C_{\sigma_0} \Pi_1^{1/3}, \quad (10)$$

3) в формуле (3) левую и правую части разделяем на радиус R

$$\frac{U_0}{R} = \frac{C_{u_0}}{R} \left(\frac{Q^2}{E^2 R} \right)^{1/3} = C_{u_0} \left(\frac{Q^2}{E^2 R^4} \right)^{1/3}, \quad (11)$$

где слева безразмерный комплекс

$$\Pi_{u_0} = \frac{U_0}{R} \cdot \frac{\text{мм}}{\text{мм}} [1]; \quad (12)$$

справа в скобках имеем безразмерный комплекс

$$\Pi_2 = \frac{Q^2}{E^2 R} = \frac{\text{кгс}^2}{\text{кгс}^4} \cdot \frac{\text{мм}^4}{\text{мм}^4} [1]; \quad (13)$$

подставляем (12) и (13) в (3) получаем безразмерное выражение для сближения

$$\Pi_{u_0} = C_u \Pi_2^{1/3}. \quad (14)$$

Таким образом, все зависимости основных параметров контактных давлений σ_0 , радиуса площадки контакта a , сближение U_0 получены в безразмерной форме:

$$\Pi_a = C_a \Pi_1^{1/3} \quad (15)$$

$$\Pi_{d_0} = C_{d_0} \Pi_1^{1/3} \quad (16)$$

$$\Pi_{u_0} = C_{u_0} \Pi_2^{1/3} \quad (17)$$

2. Преимущества безразмерной формы представления зависимостей

2.1. Компактность и простота аналитического представления

- 1) Зависимости облегчают анализ влияния разных факторов на определения параметров;
- 2) В частности интересно, что отношение критериев подобия давлений и радиуса площадки контакта - величина постоянная:

$$\frac{\Pi_a}{\Pi_{d_0}} = \frac{C_a}{C_{d_0}} \quad (18)$$

или по (1), (2)

$$\frac{a}{d_0} = \frac{C_a}{C_{d_0}} \cdot \frac{R}{E} \quad (19)$$

Что указывает на обобщенную линейность зависимости от радиуса площадки контактных осей давления.

- 3) Из безразмерных соотношений (15), (16) следует всеобщий кубический характер зависимостей параметров контакта от безразмерных компонентов Π_1 и Π_2 .

2.2. Облегчение процедуры определения размерных параметров через безразмерные

1) при определении радиуса площадки контакта сначала строится кубическая зависимость (15) в виде одной кубической кривой;

2) для конкретной задачи определяется безразмерный параметр Π_1 ;

3) по (15) определяется параметр Π_a ;

4) по зависимости (4a) определяется радиус площадки контакта:

$$a = R\Pi_a \quad (20)$$

2.3. Аналогичным образом определяются

величины максимального контактного давления

$$\sigma_0 = R\Pi_{\sigma_0} \quad (21)$$

и величины сближения

$$U_0 = R\Pi_{u_0} \quad (22)$$

3. Размерные и безразмерные выражения для определения приведенного радиуса

3.1 Схема контакта тел двойкой кривизны

В соответствии с методом приведенного радиуса [3] контакт двух тел двойкой кривизны (рис.1).

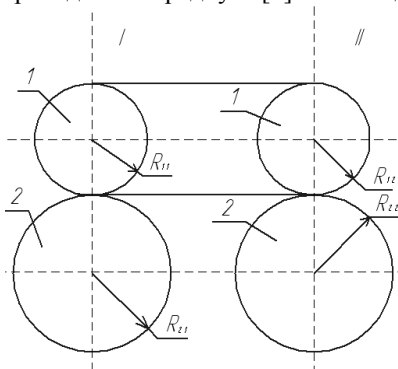


Рис. 1 – схема двух тел двойкой кривизны:
1 – первое тело; 2 – второе тело; I – первая главная плоскость симметрии
II – вторая главная плоскость симметрии

По схеме рис. 1 индексируются радиусы R_{ij} , в которых первый индекс соответствует номеру тела; j – второй индекс соответствует номеру главной плоскости симметрии.

3.2. Размерные формулы для приведенного радиуса R_* определяются из выражений

$$R_* = (R_1^* \cdot R_2^*)^{1/2}, \quad (23)$$

$$\frac{1}{R_1^*} = \left(\pm \frac{1}{R_{11}} \pm \frac{1}{R_{12}} \right), \quad (24)$$

$$\frac{1}{R_2^*} = \left(\pm \frac{1}{R_{21}} \pm \frac{1}{R_{22}} \right). \quad (25)$$

Знак «+» ставится для выпуклых поверхностей, знак «-» соответствует вогнутым поверхностям.

3.3. Безразмерное представление приведенного радиуса

1) в качестве базового возьмем радиус R_{11} ;

2) слева и справа в (24) умножив на R_{11} , имеем

$$\frac{R_{11}}{R_1^*} = \left(\pm 1 \pm \frac{R_{11}}{R_{12}} \right) \quad (26)$$

или вводя обозначение безразмерного радиуса R_1^* в первой плоскости

$$\frac{1}{R_1^*} = \left(\pm 1 \pm \frac{R_{11}}{R_{12}} \right); \quad (26, a)$$

3) аналогично получаем выражение для второго безразмерного радиуса

$$\frac{R_{11}}{R_2^*} = \left(\pm \frac{R_{11}}{R_{12}} \pm \frac{R_{11}}{R_{22}} \right) \quad (27)$$

$$\frac{1}{R_2^*} = \left(\pm \frac{R_{11}}{R_{12}} \pm \frac{R_{11}}{R_{22}} \right); \quad (27, a)$$

4) умножив в (23) справа и слева на R_{11} , получаем

$$\frac{R_{11}}{R_*} = \left(\frac{R_{11}}{R_1^*} \cdot \frac{R_{11}}{R_2^*} \right)^{1/2}; \quad (28)$$

5) в итоге имеем выражение для безразмерного приведенного радиуса

$$\frac{1}{R_*} = \left(\frac{1}{R_1^*} \cdot \frac{1}{R_2^*} \right)^{1/2} \quad (29)$$

или

$$\bar{R}_* = \left(\bar{R}_1^* \cdot \bar{R}_2^* \right)^{1/2} \quad (30)$$

3.4 Главный вывод из приведенных рассуждений о безразмерном радиусе заключается в следующем:

Метод приведенного радиуса соответствует основным положениям теории подобия и размерностей чем подтверждается его научная обоснованность.

Выводы

1. В работе предложена безразмерная критериальная форма решения задачи о контакте шара и плоскости.

2. Предложена безразмерная форма решения задач о контакте тел двоякой кривизны методом обобщенного приведенного радиуса

3. Показано, что метод приведенного радиуса соответствует основным положениям теории подобия и размерностей, что является его научным обоснованием

Литература

1. Расчеты на прочность в машиностроении / под.ред. Пономарьова С.Д. том II.–М.:Машгиз, 1958.–974 с.
2. Писаренко Г.С., Яковлев В.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов – Киев: Наукова думка, 1988. – 734 с.
3. Кузьменко А.Г. Развитие методов контактной трибомеханике. – Хмельницкий: ХНУ, 2010. – 270 с.

Надійшла 21.11.2011