

**ПРОСТОРОВА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ПРО ТИСК ПРУЖНОГО  
КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ НА  
ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИЙ ПІВПРОСТІР**

*В рамках лінеаризованої теорії пружності представлено розв'язок контактної задачі про тиск пружного кільцевого штампa з початковими напруженнями на попередньо напружений півпростір без урахування сил тертя. Дослідження представлено у загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу для рівних коренів визначального рівняння. Числова реалізація методу дала змогу графічно відобразити вплив початкових напружень на закон розподілу контактних характеристик тіл, для потенціалів найпростішої структури.*

*Ключові слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактна задача, кільцевий штамп, півпростір.*

Н.А. ЯРЕЦКАЯ  
Хмельницький национальный университет

**ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ДАВЛЕНИИ УПРУГОГО  
КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПА С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ НА ПРЕДВАРИТЕЛЬНО  
НАПРЯЖЕННОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО**

*В рамках лінеаризованої теорії пружності представлено рішення контактної задачі о давленні пружного кільцевого штампa з початковими напруженнями на попередньо напружене напівпространство без урахування сил тертя. Исследование представлено в общем виде для теории больших начальных деформаций и двух вариантов теории малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала для равных корней разрешающего уравнения. Численная реализация метода дала возможность графически отобразить влияние начальных напряжений на закон распределения контактных характеристик тел для потенциалов наипростейшей структуры.*

*Ключевые слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (остаточні) напруження, контактна задача, кільцевий штамп, напівпространство.*

N.A. YARETSKA  
Khmelnytsky National University

**SPATIAL CONTACT PROBLEM OF PRESSURE OF THE ELASTIC ANNULAR PUNCH  
WITH INITIAL STRESSES ON THE PRE-STRESSED SEMI-SPACE**

*The article is devoted to the study of the contact interaction of a pre-stressed annular stamp and a half-space with initial stresses without taking friction forces into account. The problem is solved for the case of equal roots of the resolving equation. The study is presented in a general form for the theory of large initial (finite) deformations and two versions of the theory of small initial deformations in the framework of the linearized theory of elasticity for an arbitrary structure of the elastic potential.*

*There is assumed that the initial states of the elastic annular stamp and the elastic half-space remain homogeneous and equal. The study is carried out in the coordinates of the initial deformed state, which are interrelated with Lagrange coordinates (natural state). In addition, the influence of the annular stamp causes small perturbations of the basic elastic deformed state.*

*Also, it is assumed that the elastic annular stamp and the elastic half-space are made of different isotropic, transversal-isotropic or composite materials.*

*Numerical analysis is presented by the form of graphs and tables of contact stresses and displacements of a potential for a harmonic type. The algorithm for solving this problem is implemented in the form of a computer program (Maple 17).*

*The influence of the initial stress on the contact interaction between the elastic annular stamp and the elastic half-space of the potentials of a particular structure is investigated.*

*The value of the studies carried out is that taking into account the influence of the initial stresses in the bodies on the law of distribution of the contact characteristics of elastic bodies at the points of their interaction can allow us to take into account, more effectively, the wear resistance of materials by properly estimating their*

*strength reserves. Also, it can sufficiently reduce their material consumption, while retaining the necessary functional characteristics of materials.*

*Consequently, the observed effect of the initial stresses is significant and must be taken into account when calculating the strength in structural details.*

*Key words: the linearized elasticity theory, initial (residual) stresses, contact problem, annular punch, half-space.*

### **Постановка проблеми**

Просторові контактні задачі є важливим розділом механіки деформованого твердого тіла, які формують теоретичну основу для розрахунків на контактну міцність, жорсткість і зносостійкість рухомих і нерухомих з'єднань.

Одним із важливих чинників контактної взаємодії тіл є вплив початкових напружень. Незважаючи на істотне досягнення в розвитку контактних задач, все ж питання впливу початкових напружень на контактну взаємодію пружних тіл залишилося майже повністю неопрацьованим до останнього часу. Як відомо, практично у всіх елементах конструкції присутні початкові напруження. Останні можуть бути викликані різного роду причинами, наприклад технологічними процесами, що супроводжують виготовлення цілого ряду матеріалів або складанням конструкції. У випадку композиційних матеріалів початкові напруження, як правило, відповідають напруженням уздовж армуючих елементів. У земній корі вони утворюються за рахунок дії гравітаційних сил і технічних процесів. Їх необхідно враховувати при розв'язуванні задач, які пов'язані із деформацією ґрунтів (особливо мерзлих). Крім цього, у пружно-пластичних тілах також можуть бути присутні внутрішні залишкові напруження після зняття навантаження.

Тому розробка ефективних методів розрахунку напружено-деформованого стану з урахуванням початкових напружень є актуальною і важливою науково-технічною проблемою.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

На сьогодні стосовно проблем, що мають відношення до контактної взаємодії пружних тіл, отримані результати із широкого кола питань. Вони представлені роботами [1–4]. Існує також ряд узагальнюючих публікацій [5], які повністю або частково пов'язані з тематикою даного дослідження. Незважаючи на істотні досягнення, кількість досліджень із контактної взаємодії попередньо напружених тіл є відносно малою.

Досить детальний огляд робіт пов'язаних із контактним тиском жорстких штампів (у тому числі і кільцевих) у разі відсутності початкових напружень наведено в монографії [5].

Дослідження контактної взаємодії жорстких і пружних штампів із попередньо напруженими тілами представлені в [1–4]. Причому розглядаються або пружні потенціали конкретної структури, або завдання ставиться в загальному вигляді для стислих (нестислих) тіл із потенціалом довільної структури на основі лінеаризованої теорії пружності.

У роботі [2] розглянуто розв'язок осесиметричної контактної задачі про тиск жорсткого кільцевого штампа складної конфігурації на пружний шар з початковими напруженнями. Вплив початкових напружень на контактну взаємодію жорсткого кільцевого штампа на пружний півпростір з початковими напруженнями представлено в роботі [6].

### **Мета дослідження**

1) У рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями [1] представити постановку та розв'язок задачі про тиск попередньо напруженого кільцевого штампа на півпростір з початковими напруженнями без урахування сил тертя для рівних коренів визначального рівняння [1];

2) Дослідження виконати у загальному вигляді для стислих і нестислих тіл для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу;

3) Отримати числові та графічні результати досліджень для потенціалу гармонічного типу, а також зробити висновки про вплив початкових напружень на контактну взаємодію тіл.

### **Викладення основного матеріалу дослідження**

Нехай скінченний попередньо напружений кільцевої штамп з плоскою основою, геометрична вісь симетрії якого збігається з віссю  $u_3$  циліндричної системи координат  $(r, \theta, u_3)$ , спрямована усередину півпростору (рис.1) і тисне на півпростір з силою  $P$ , після виникнення там початкового деформованого стану.  $R_1, R_2$  – внутрішній і зовнішній радіуси штампа, відповідно. Будемо вважати, що зовнішнє навантаження прикладене тільки до вільного торця пружного штампа. Під дією навантаження всі точки торця штампа переміщуються у напрямку осі симетрії  $u_3$  на одну і ту ж величину  $\varepsilon$ . Будемо вважати, що поверхні поза областю контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а у зоні контакту переміщення і напруження – неперервні.

Будемо розрізняти такі стани тіл з початковими напруженнями: природний, початковий та збурений. Всі величини, останнього, складаються із суми величин початкового стану та відповідних збурень. Оскільки збурення вважаємо меншими відповідних величин початкового стану, дослідження проводимо в рамках лінеаризованої теорії пружності [1].

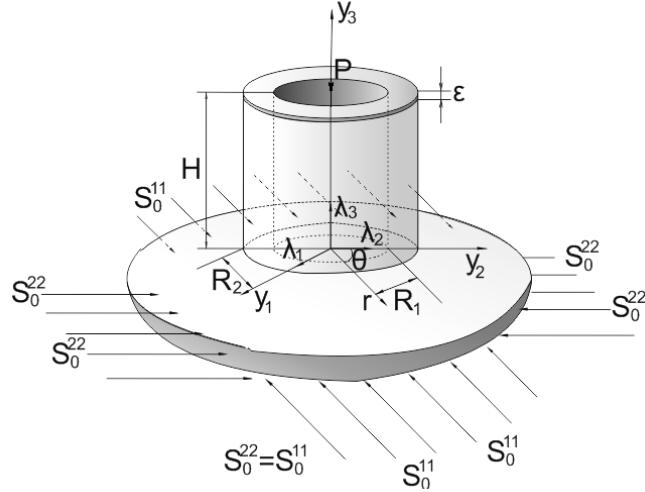


Рис. 1. Тиск попередньо напруженого кільцевого штамп на півпростір з початковими напруженнями.

Для дослідження застосуємо координати початкового деформованого стану  $(y_1, y_2, y_3)$ , які пов'язані з лагранжевими координатами  $(x_1, x_2, x_3)$  співвідношеннями:  $y_i = \lambda_i x_i$ . Тут  $\lambda_i$  ( $i=1,2,3$ ) – коефіцієнти видовження, які визначають переміщення початкового стану. Вісь  $y_3$  спрямована по нормалі до області контакту.

Припустимо, що початкові стани контактуючих тіл – однорідні та рівні, а пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовані функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [1]. Матеріали тіл, вважаємо ізотропним стисливими або нестисливими з довільною структурою пружного потенціалу.

Величини, які відносяться до пружного штамп, будемо записувати із верхнім індексом (1), а величини, які відносяться до пружного півпростору – із верхнім індексом (2).

У системі кругових циліндричних координат  $(r, \theta, z_1)$ , де  $z_1 = v_1^{-1} y_3$ ,  $v_1 = \sqrt{n_1}$ ,  $n_1 = n_2$  – корені визначального рівняння [1], даній постановці відповідають граничні умови:

- 1) На торці пружного кільцевого штамп  $z_1 = v_1^{-1} H$ :

$$U_3^{(1)} = -\varepsilon, \quad Q_{3r}^{(1)} = 0 \quad (R_1 < r < R_2) \quad (1)$$

- 2) На межі пружного півпростору в області контакту  $z_1=0$ :

$$U_3^{(1)} = U_3^{(2)}, \quad Q_{33}^{(1)} = Q_{33}^{(2)}, \quad Q_{3r}^{(1)} = Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (R_1 < r < R_2) \quad (2)$$

- 3) На межі пружного півпростору поза областю контакту  $z_1=0$ :

$$Q_{33}^{(2)} = 0, \quad U_3^{(2)} = 0, \quad Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (0 < r < R_1, R_2 < r < \infty) \quad (3)$$

- 4) На зовнішній бічній поверхні пружного кільцевого штамп  $r=R_2$ :

$$Q_{rr}^{(1)} = 0, \quad Q_{3r}^{(1)} = 0, \quad (0 < z_1 < H v_1^{-1}) \quad (4)$$

- 5) На внутрішній бічній поверхні пружного кільцевого штамп  $r=R_1$ :

$$Q_{rr}^{(1)} = 0, \quad Q_{3r}^{(1)} = 0, \quad (0 < z_1 < H v_1^{-1}) \quad (5)$$

Умова рівноваги, яка встановлює зв'язок між осадкою торця та рівнодіючою навантаження P:

$$P = -2\pi \int_{R_1}^{R_2} r Q_{33}^{(2)}(0, r) dr \quad (6)$$

Напружено-деформований стан у пружному кільцевому штампі у випадку рівних коренів  $n_1 = n_2$  будемо визначати за формулами:

$$U_r^{(1)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 6\tilde{C}_0^{(k)} r (v_1^{-1} + 2z_1) + \gamma_k v_1 I_1(v_1 \gamma_k r) \left[ (\tilde{A}_k + v_1 z_1 \tilde{B}_k) \gamma_k \cos(\gamma_k v_1 z_1) + \tilde{B}_k \sin(\gamma_k v_1 z_1) \right] - \right. \\ \left. - \alpha_k J_1(\alpha_k r) \left[ \alpha_k v_1^{-1} (\tilde{S}_4(\alpha_k z_1) + v_1 z_1 \tilde{S}_5(\alpha_k z_1)) - \tilde{S}_3(\alpha_k z_1) \right] \right\} N_k \\ U_3^{(1)} = \frac{\varepsilon}{R_1 - R_2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 12m_1 \tilde{C}_0^{(k)} z_1 v_1^{-1} (v_1^{-1} + z_1) + (1 - m_2) v_1^{-1} \left[ \tilde{A}_0^{(k)} + 3\tilde{C}_0^{(k)} (r^2 - 2z_1^2) \right] + \right. \\ \left. + \gamma_k I_0(\gamma_k v_1 r) \left[ (\tilde{A}_k + v_1 z_1 \tilde{B}_k) m_1 \gamma_k \sin(\gamma_k v_1 z_1) + (1 - m_2) \tilde{B}_k \cos(\gamma_k v_1 z_1) \right] - \right. \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha_k n_1^{-1} J_0(\alpha_k r) \left[ m_1 \alpha_k (\tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + z_1 v_1 \tilde{S}_3(\alpha_k z_1)) + (m_2 - 1) v_1 \tilde{S}_5(\alpha_k z_1) \right] N_k \\
Q_{33}^{(1)} = & C_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 12 \tilde{C}_0^{(k)} \left[ (1+m_1) l_1 (v_1^{-1} + z_1) + (1+m_2) l_2 z_1 \right] + \gamma_k^2 v_1^2 J_0(\gamma_k v_1 r) \left[ (1+m_1) l_1 \gamma_k (\tilde{A}_k + \right. \right. \\
& \left. \left. + v_1 z_1 \tilde{B}_k) \cos(\gamma_k v_1 z_1) + (1+m_2) l_2 \tilde{B}_k \sin(\gamma_k v_1 z_1) \right] - \right. \\
& \left. -\alpha_k^2 J_0(\alpha_k r) \left[ (1+m_1) l_1 \alpha_k v_1^{-1} (\tilde{S}_4(\alpha_k z_1) + v_1 z_1 \tilde{S}_5(\alpha_k z_1)) + (1+m_2) l_2 \tilde{S}_3(\alpha_k z_1) \right] \right\} N_k \\
Q_{3r}^{(1)} = & C_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -6 \tilde{C}_0^{(k)} r (1+m_2) v_1^{-1} + \gamma_k^2 v_1 I_1(\gamma_k v_1 r) \left[ (1+m_1) \gamma_k (\tilde{A}_k + v_1 z_1 \tilde{B}_k) \sin(\gamma_k v_1 z_1) - \right. \right. \\
& \left. \left. - (1+m_2) \tilde{B}_k \cos(\gamma_k v_1 z_1) \right] + \right. \\
& \left. + \alpha_k^2 v_1^{-1} J_1(\alpha_k r) \left[ \alpha_k (1+m_1) (\tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + v_1 z_1 \tilde{S}_3(\alpha_k z_1)) + (1+m_2) \tilde{S}_5(\alpha_k z_1) \right] \right\} N_k,
\end{aligned}$$

де  $\tilde{S}_4 = \tilde{E}_k ch(\alpha_k z_1) + \tilde{F}_k ch(\alpha_k z_1)$ ,  $\tilde{S}_5 = ch(\alpha_k z_1) + \tilde{M}_k sh(\alpha_k z_1)$ ,

$$\tilde{A}_0^{(k)} = \frac{v_1}{(R_1 - R_2)(1 - m_2)} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (1+m_2) f_1(R_1, R_2) + \frac{v_1 \theta_1 (I_0(\gamma_k v_1 R_1) - I_0(\gamma_k v_1 R_2))}{R_1 + R_2} \right\} \gamma_k \tilde{B}_k,$$

$$\tilde{C}_0^{(k)} = \frac{v_1}{3(R_2^2 - R_1^2)} \sum_{k=1}^{\infty} \{ I_0(\gamma_k v_1 R_1) - I_0(\gamma_k v_1 R_2) \} \gamma_k \tilde{B}_k, \quad \theta_1 = \frac{4Hm_1(1+H)}{v_1^3} + \frac{R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2}{3} - \frac{2H^2}{n_1},$$

$$f_1(R_1, R_2) = -R_1 I_0(\gamma_k v_1 R_1) + \frac{\pi R_1}{2} L_0(\gamma_k v_1 R_1) I_1(\gamma_k v_1 R_1) - \frac{\pi R_1}{2} L_1(\gamma_k v_1 R_1) I_0(\gamma_k v_1 R_1) +$$

$$+ R_2 I_0(\gamma_k v_1 R_2) - \frac{\pi R_2}{2} L_0(\gamma_k v_1 R_2) I_1(\gamma_k v_1 R_2) + \frac{\pi R_2}{2} L_1(\gamma_k v_1 R_2) I_0(\gamma_k v_1 R_2),$$

$$\tilde{S}_2 = \tilde{E}_k sh(\alpha_k z_1) + \tilde{F}_k ch(\alpha_k z_1), \quad \tilde{S}_3 = sh(\alpha_k z_1) + \tilde{M}_k ch(\alpha_k z_1), \quad \tilde{M}_k = -cth(\alpha_k H v_1^{-1}), \quad \tilde{F}_k = -s_0 \alpha_k^{-1},$$

$$\tilde{E}_k = Hcth^2(\alpha_k H v_1^{-1}) - \tilde{F}_k cth(\alpha_k H v_1^{-1}) - H,$$

$$\tilde{A}_k = (R s_0 H^2 (I_0(\gamma_k v_1 R_1) - I_0(\gamma_k v_1 R_2)) (2n_1 (R_2^2 - R_1^2) I_1(\gamma_k v_1 R))^{-1} - s_0 (v_1 \gamma_k^2)^{-1} + 0.5H) \tilde{B}_k,$$

$$\tilde{B}_k = 0.5 \alpha_k (R_2^2 - R_1^2) J_0(\alpha_k R) \{ H \alpha_k (\tilde{c}_0 sh(\alpha_k H v_1^{-1}) + \tilde{c}_1 (1 - ch(\alpha_k H v_1^{-1})) (1 - s_0 sh(\alpha_k H v_1^{-1}))) + \left. + (1 - ch^2(\alpha_k H v_1^{-1})) (v_1 (\tilde{c}_0 + \tilde{c}_2 - \tilde{c}_1) - \tilde{c}_0 s_0) \right\} \left\{ \gamma_k (ch^2(\alpha_k H v_1^{-1}) - 1) [H(1 - \tilde{c}_0 + H(3\tilde{c}_0 + 2\tilde{c}_2 - 4\tilde{c}_1)) (I_0(\gamma_k v_1 R_1) - I_0(\gamma_k v_1 R_2)) + \tilde{c}_2 n_1 (R_2^2 - R_1^2) I_0(\gamma_k v_1 R)] \right\},$$

$R = (R_2 - R_1)H(r - R_1) - (R_2 - R_1)H(r - R_2) + \delta(R_1)(2R_1 - R_2) + \delta(R_1)R_2$ ,  $H(x)$  – функція Хевісайда,

$\delta(x)$  – функція Дірака,  $L_\nu(x)$  – модифікована функція Струвела,  $J_\nu(x), I_\nu(x)$  – функції Бесселя.

Напружено-деформований стан пружного півпростору з початковими напруженнями для  $n_1 = n_2$  визначимо через гармонійні функції у вигляді інтегралів Ханкеля. Задовольнивши умови (2) і (3) маємо:

$$U_3^{(2)} = -\frac{1}{\omega_3} \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta r) d\eta, \quad U_r^{(2)} = \omega_1 \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta r) d\eta, \quad Q_{33}^{(2)} = \frac{\omega_3}{R_2 - R_1} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r) d\eta, \quad Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (8)$$

де  $\omega_3 = C_{44} l_1 (1+m_1)(s-s_0)$ ,  $\omega_1 = s_0 - 1$ ,  $s_0 = (1+m_2)(1+m_1)^{-1}$ ,  $s = s_0 l_2 l_1^{-1}$ .

У (8) значення коефіцієнтів  $n_i, m_i, c_{44}, l_i$ , подані в [1]. Використовуючи розв'язки для циліндра (7) і задовольнивши другим умовам (1), (4) і (5), знаходимо власні значення задачі (1) - (6):

$$\gamma_k = \pi(2k+1)H^{-1}, \quad \alpha_k = \mu_k R^{-1} \quad (J_1(\mu_k) = 0) \quad (9)$$

З умов (2) і (3), визначимо невідому функцію  $F(\eta)$  для (8) із парних інтегральних рівнянь:

$$\int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta r) d\eta = f(r) \quad (R_1 < r < R_2), \quad \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r) d\eta = 0 \quad (0 < r < R_1, R_2 < r < \infty), \quad (10)$$

$$\text{де } f(r) = \frac{\omega_3 \varepsilon}{R_2 - R_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle (\tilde{A}_0^{(k)} + 3r^2 \tilde{C}_0^{(k)}) \frac{1-m_2}{v_1} + \gamma_k I_0(\gamma_k v_1 r) (1-m_2) \tilde{B}_k - \frac{\alpha_k}{n_1} J_0(\alpha_k r) (m_1 \alpha_k \tilde{F}_k + v_1 (m_2 - 1)) \right\rangle N_k.$$

Застосувавши формулу звернення [1] до (10) перейдемо відносно функції  $F(\eta)$  до інтегрального рівняння типу Фредгольма другого роду, тобто:

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = \frac{2\omega_3}{\pi(R_2 - R_1)} \left\langle \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (1+m_2)f_1(R_1, R_2) + \frac{I_0(\gamma_k v_1 R_1) - I_0(\gamma_k v_1 R_2)}{R_2 + R_1} (v_1 \theta_1 - (1-m_2)(R_2^2 - R_1^2)) \gamma_k \tilde{B}_k \psi_0(\eta, 0) + \right. \right. \\ \left. \left. + (R_1 - R_2) \left\{ \gamma_k \psi_0(\eta, i\gamma_k v_1 (R_2 - R_1)) (1-m_2) \tilde{B}_k + \frac{\alpha_k}{n_1} \psi_0(\eta, \mu_k) ((1-m_2)v_1 - s_0 m_1) \right\} \right] N_k \right\rangle \quad (11)$$

де  $\psi_n(x, y) = \int_0^1 t^n \cos xt \cos ytdt$ .

Задовольнивши другу граничну умову (2), маємо:

$$\int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} (J_1(\eta R_2) - J_1(\eta R_1)) d\eta = C_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle 2l_1(1+m_1) \gamma_k (I_0(\gamma_k v_1 R_1) - I_0(\gamma_k v_1 R_2)) \tilde{B}_k + \gamma_k^2 v_1 l_1 (1+m_1) (R_2 I_1(\gamma_k v_1 R_2) - \right. \\ \left. - R_1 I_1(\gamma_k v_1 R_1)) \tilde{A}_k - \alpha_k (R_2 J_1(\alpha_k R_2) - R_1 J_1(\alpha_k R_1)) \left( \frac{l_1}{v_1} (1+m_1) \alpha_k \tilde{E}_k + (1+m_2) l_2 \tilde{M}_k \right) \right\rangle N_k$$

Враховуючи перші дві умови (2), ортогональність бesselевих функцій  $J_0(\mu_k \rho)$  та значень деяких інтегралів [1] для визначення сталих  $N_i$  ( $i=0,1,2,\dots$ ), з (7) (8) і (10), отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau_{nk} \chi_n = \beta_k \quad (k=0,1,2,\dots) \quad (12)$$

Коефіцієнти системи представимо у вигляді:

$$\tau_{kn} = \left\{ (1+m_2) f_1(R_1, R_2) + (I_0(\gamma_n v_1 R_1) - I_0(\gamma_n v_1 R_2)) (R_1 + R_2)^{-1} (v_1 \theta_1 - (R_2^2 - R_1^2) (1-m_2)) \right\} \gamma_n \tilde{B}_k + \\ + (R_1 - R_2) \left\{ \gamma_n \tilde{B}_k (1-m_2) \psi_0(0, i\gamma_n v_1 R) + \frac{\alpha_n}{n_1} \psi_0(0, \mu_n) ((1-m_2)v_1 + m_1 s_0) \right\} - \\ - C_{44} \left\{ 2(1+m_1) l_1 \gamma_n \tilde{B}_k (I_0(\gamma_n v_1 R_1) - I_0(\gamma_n v_1 R_2)) + \gamma_n^2 (1+m_1) l_1 v_1 (R_2 I_1(\gamma_n v_1 R_2) - \right. \\ \left. - R_1 I_1(\gamma_n v_1 R_1)) \tilde{A}_k - \alpha_n (R_2 J_1(\alpha_n R_2) - R_1 J_1(\alpha_n R_1)) ((1+m_1) l_1 v_1^{-1} \alpha_n \tilde{E}_k + (1+m_2) l_2 \tilde{M}_k) \right\}, \\ \beta_k = 2\omega_3 \varepsilon (\pi R_1 R_2)^{-1}$$

Використовуючи умову (6), встановимо зв'язок між осіданням і рівнодіючою навантаження  $P$  у вигляді:

$$P = - \frac{4\omega_3^2 \varepsilon}{(R_2 - R_1) R_2 R_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (I_0(\gamma_k v_1 R_1) - I_0(\gamma_k v_1 R_2)) (v_1 \theta_1 - (R_2^2 - R_1^2) (1-m_2)) \gamma_k - \right. \\ \left. - (1-m_2) v_1^{-1} sh(\gamma_k v_1 (R_2 - R_1)) \right\} \tilde{B}_k + v_1^{-1} \sin \mu_k ((m_2 - 1)v_1 - s_0 m_1) \left\} N_k.$$

Після визначення невідомих сталих  $N_i$  ( $i=0,1,2,\dots$ ) із (12), обчислимо переміщення та напруження як у пружному штампі, так і у пружному півпросторі за формулами (7), (8). В результаті цього, розв'язок представимо у вигляді рядів через нескінченну систему констант, які визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (12). Причому у системі (12) коефіцієнти  $\beta_k$  та  $\tau_{kn}$  залежать від величин, що визначають структуру пружного потенціалу та висоти штампа  $H$ , а вільні члени залежать тільки від  $n_1, n_2$ .

Було проведено чисельне розв'язання системи (12) для гармонічного потенціалу (рис. 2, 3) при значеннях параметрів:  $R_1=1.0$ ,  $R_2=2.0$ ,  $\varepsilon=10^{-5}$ ,  $E=3.92$ ,  $\sigma=0.47$ ,  $\lambda_1=0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3$ , де  $R_1 < R_2$ . Алгоритм розв'язку поставленої задачі реалізований у вигляді комп'ютерної програми у пакеті Maple 17.

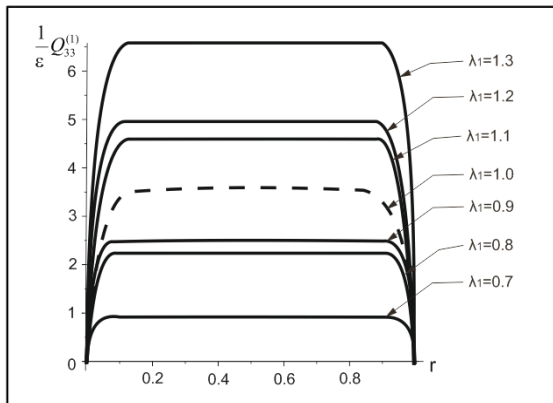


Рис. 2. Нормальные контактные напряжения.

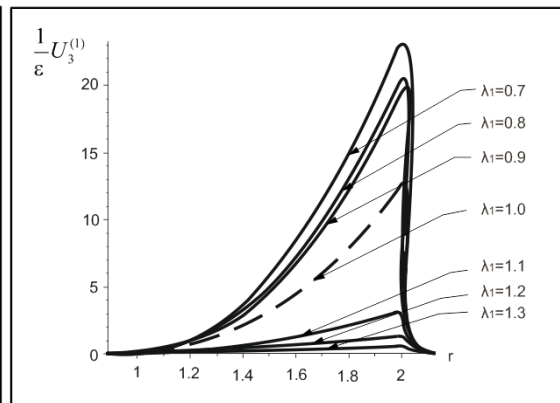


Рис. 3. Нормальные контактные перемещения.

На рис. 2, 3 представлені, відповідно, розподіли нормальних контактних напружень  $\varepsilon^{-1}Q_{33}$  та переміщень  $\varepsilon^{-1}U_3$  під кільцевим штампом у зоні контакту у безрозмірних координатах. Причому значенням коефіцієнтів видовження  $\lambda_1$  відповідають криві знизу до гори по зростанню  $\lambda_1$ . Пунктирні криві відповідають випадку відсутності початкових напружень ( $\lambda_1=1$ ), а суцільні – їх наявності.

На рис. 2 початок координат по осі  $r$  відповідає  $r=R_1$ . Із рис. 2, 3 бачимо, що початкові напруження при стисканні призводять до зменшення сили контактних, а при розтягненні – до їх збільшення.

**Таблиця 1. Чисельні значення сили  $P/\varepsilon$**

Потенціал гармонічного типу	$\lambda_1$	0,7	0,8	0,9	<b>1</b>	1,1	1,2
	$P/\varepsilon$		0,3458	0,4128	0,4401	<b>0,4521</b>	0,4567

У Табл. 1 представлено співвідношення числових значень сили  $P$ , що діє на верхній торець пружного штампа, при заданих величинах початкових напружень із випадком відсутності початкових напружень. Випадок відсутності початкових напружень виділений у Табл. 1 жирним шрифтом.

#### **Висновки**

На основі чисельного аналізу можна побачити, що максимальні за модулем значення контактних переміщень (рис.3) досягаються в точках близьких до зовнішньої бічної сторони пружного кільцевого штампа в області контакту.

Крім цього можна помітити, що при постійному зовнішньому навантаженні зміна пружного потенціалу призводить до зміни характеру розподілу контактних напружень і переміщень під пружним кільцевим штампом. А вплив початкових напружень на напружено-деформований стан пружного півпростору, в який втискається пружний кільцевий штамп, полягає в наступному: 1) початкові напруження у півпросторі та штампі зменшуються у випадку стиску ( $\lambda_1 < 1$ ) та збільшуються при розтягуванні ( $\lambda_1 > 1$ ), що видно із рис. 2; 2) при стисканні ( $\lambda_1 < 1$ ) початкові напруження у півпросторі та штампі призводять до збільшення переміщень по абсолютній величині, а у випадку розтягування ( $\lambda_1 > 1$ ) – до їх зменшення; 3) при відсутності початкових напружень ( $\lambda_1 = 1$ ) отримані результати збігаються із класичними; 4) при постійному значенні осідання торця штампа  $\varepsilon$  для потенціалу гармонічного типу, присутність початкових напружень приводить до зменшення рівнодіючої навантаження  $P$  при стисканні ( $\lambda_1 < 1$ ), та її збільшення у випадку розтягування ( $\lambda_1 > 1$ ) (Табл.1).

#### **Список використаної літератури**

1. Гузь А.Н, Рудницький В.Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями : монографія. Хмельницький: вид. ПП Мельник, 2006. 710 с.
  2. Шелестовський Б., Габрусєва І. Контактна взаємодія кільцевого штампа із попередньо напруженим півпростором. *Вісник ТДТУ*. 2009. № 3, т. 14. С. 48-53.
  3. Діхтярук М.М., Ярецька Н.О. Контактна взаємодія нескінченного стрингера з однією та двома попередньо напруженими смугами. *Актуальні наукові дослідження в сучасному світі: збірник наукових праць*. 2018. №2(34), ч. 1. С. 75-83.
  4. Yaretskaya N.A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *International Applied Mechanics*. 2014. Vol. 50, №4. P. 378-388.
  5. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. *Развитие идей Л.А. Галина в механике*. 2013. 480 с.
  6. Yaretskaya N. F. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2018. Vol. 54, №5. P. 539 –543.
1. Guz A.N, Rudnitskiy V.B. Osnovy teorii kontaktnogo vzaimodeystviya uprugih tel s nachalnymi (ostatochnymi) napryazheniyami : monografiya. Hmel'nitskiy: vid. PP Melnik, 2006. 710 s.
  2. Shelestovskiy B., Habrusieva I. Kontaktna vzaiemodiia kiltsevoho shtampa iz poperedno napruzhenym pivprostorum. *Visnyk TDTU*. 2009. № 3, t. 14. S. 48-53.
  3. Dikhtiaruk M.M., Yaretska N.O. Kontaktna vzaiemodiia neskinchennoho strynhera z odniieiu ta dvoma poperedno napruzhenymu smuhamy. *Aktualnye nauchnye yssledovaniya v sovremennom myre: sb. nauchnykh trudov*. 2018. №2(34), ch. 1. S. 75-83.
  4. Yaretskaya N.A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *International Applied Mechanics*. 2014. Vol. 50, №4. P. 378-388.
  5. Guz A.N., Babich S.Yu., Rudnitskiy V.B. Kontaktnoe vzaimodeystvie uprugih tel s nachalnymi (ostatochnymi) napryazhenimi. *Razvitie idey L.A. Galina v mehanike*. 2013. 480 s.
  6. Yaretskaya N. F. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2018. Vol. 54, №5. P. 539 –543.

ЯРЕЦЬКА Наталія Олександрівна - к.ф.-м.н., старший викладач кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань Хмельницького національного університету, e-mail: [massacran2@ukr.net](mailto:massacran2@ukr.net)