

УДК 539.3:624.131

В.В. КОВТУН

Хмельницький національний університет

НАПРУЖЕННЯ ПО ПОТЕНЦІАЛЬНИХ ПЛОЩИНКАХ КОВЗАННЯ У СИПКОМУ СЕРЕДОВИЩІ

В статті на розвиток теорії напруженого стану розглядається розширення її положень на клас специфічних спряжених площинок, по яких є сталими відношення дотичних напружень до нормальних, тобто по них повне напруження відхиляється від нормалі на однаковий кут. Такі площинки є важливими для механіки сипких середовищ, оскільки можуть розглядатись як потенціальні площинки ковзання у сипкому середовищі.

The article deals with the theory of stress state and its influence on the class of specific conjugate planes. The ratio of tangential stress to normal one is such planes is constant, that is total stress deviates from the perpendicular at an equal angle. Such conjugate planes are important for the Mechanics of Cohesionless Medium because they may be considered to be potential shear planes in cohesionless medium.

Ключові слова: напруження, сипке середовище.

Вступ

В теорії пластичності широко використовується поняття площинок ковзання. Це площинки, по яких в момент переходу середовища у пластичний стан, в явній формі виконується умова пластичності. Для металів перехід в пластичну стадію їх деформування описується умовами пластичності Губера-Мізеса або Треска-Сен-Венана [1]. Обидві умови пов'язують перехід матеріалів у пластичний стан з компонентами девіатора напружень (з дотичними напруженнями). Нормальні ж напруження (компоненти кульового тензора) в ці умови не входять. Для плоскої задачі обидві умови переходу матеріалу у пластичний стан можна трактувати як досягнення величини максимального дотичного напруження границі текучості. Максимальне дотичне напруження виникає по площинках, нахилених до головних під кутом $p/4$. Тому саме ці ортогональні напрями асоціюються з лініями ковзання.

Умови переходу в граничний стан великої групи матеріалів, таких як гірські породи, природні ґрунти, зернисті, гранульовані, сипкі та інші структурно неоднорідні або фізично дискретні матеріали, включають в себе як компоненти девіатора, так і компоненти кульового тензора напружень.

Найбільш відомим представником цього класу є сипке середовище, напружений стан якого і є предметом описаних в статті досліджень.

Перехід сипкого середовища у граничний стан в загальному випадку описується умовою Боткіна-Шлейхера [2]

$$\frac{t_0}{s_0} = \operatorname{tg} \gamma, \quad (1)$$

де t_0, s_0 – дотичне та нормальне напруження по октаедричній площинці;

γ – граничний кут відхилення октаедричного напруження від нормалі.

Для плоскої деформації більш чітко виконується умова Мора-Кулона [3]

$$\frac{t_M}{s_M} = \operatorname{tg} j, \quad (2)$$

де t_M, s_M – дотичне та нормальне напруження, що діють по неортогональних площинках найбільшого відхилення від нормалі повного напруження P_M ;

j – кут внутрішнього тертя, максимальний кут відхилення P_M у граничній стадії.

За умовою (2) площинки ковзання у сипкому середовищі асоціюються з неортогональними площинками, по яких максимальним є відношення дотичного і нормального напружень, а не з ортогональними площинками, де виникають найбільші напруження.

Співвідношення між напруженнями по площинках ковзання для умов граничної рівноваги (статики сипкого середовища) достатньо повно досліджені В.В.Соколовським [4]. Пізніше в своїй фундаментальній монографії [5] В.В.Соколовський висловив думку про можливість побудови деформаційної теорії сипкого середовища. Для цього необхідно одержати співвідношення між напруженнями по неортогональних площинках, які в граничній стадії деформування можуть стати площинками ковзання. Частково ця ідея реалізована в докторській дисертації Ф.М.Шихієва [6]. Проте, дослідження Шихієва Ф.М. обмежились тільки площинками найбільшого відхилення.

В розвиток вказаних досліджень розглянемо важливі для побудови деформаційної моделі сипкого середовища, але недостатньо вивчені в теорії напруженого стану співвідношення між напруженнями для специфічних, спряжених площинок, до яких відносяться і площинки найбільшого відхилення.

Вихідні положення, припущення, гіпотези

1. Розглядається плоска задача сипкого середовища, яке при моделюванні напруженого стану вважається квазісуцільним.

2. Враховуючи те, що сипке середовище не сприймає розтягуючих напружень, будемо вважати додатними стискуючі напруження.

3. Для оцінки напруженого стану сипкого середовища в умовах плоскої задачі введемо два інваріанти, які включають тільки напруження в площині деформування x, y .

Перший інваріант

$$S = \frac{1}{2}(s_1 + s_2) = \frac{1}{2}(s_x + s_y), \tag{3}$$

де s_1, s_2 - головні напруження ($s_1 > s_2$);

s_x, s_y - нормальні напруження по ортогональних площинках з нормалями x і y .

Другий інваріант

$$x = \frac{s_1}{s_2}. \tag{4}$$

Легко впевнитись, що введені вирази (3), (4) є інваріантними відносно вибору системи координат і однозначно описують плоский напружений стан. Для цього достатньо визначити через них фундаментальні лінійний і квадратичний інваріанти, які для випадку плоскої задачі набувають вигляду

$$I_1 = s_x + s_y = s_1 + s_2; \tag{5}$$

$$I_2 = s_x s_y - t_{xy}^2 = s_1 s_2. \tag{6}$$

Співставивши ці вирази з (1) і (2), одержимо

$$I_1 = 2S; \tag{7}$$

$$I_2 = S^2 \frac{4x}{(1+x)^2}. \tag{8}$$

4. Введемо поняття *спряжених площинок*. Це площинки, по яких однакова величина відношення напружень, $-t/S = tg h$, або по яких повне напруження P відхиляється від нормалі на однаковий кут h .

Як легко впевнитись, наприклад, з круга Мора, який буде використовуватись і в подальших викладках, через кожну точку середовища, що знаходиться в умовах плоскої деформації, можна провести чотири (дві пари) спряжених площинок. На крузі Мора (рис. 1) їм відповідають чотири точки A, B, B', A' , відношення координат яких $t/S = tg h$ є однаковим. Точки M і M' відповідають площинкам з найбільшим відхиленням повного напруження P_m від нормалі ($h_{max} = r$), а точки a і b - головним площинкам ($h = 0$).

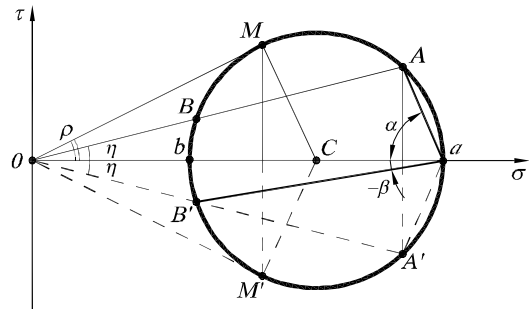


Рис. 1. Графічне представлення спряжених площинок в площині напружень

Отже широкий клас спряжених площинок включає в себе пару головних площинок ($h = 0$), а також пару важливих для механіки сипких середовищ неортогональних площинок найбільшого відхилення, для яких ($h = h_{max} = r$).

Співвідношення між напруженнями по спряжених площинках

Пара спряжених площинок aA і aB' утворюють з головною віссю s_1 кути a і $-b$ (рис. 1). Для одержання співвідношень між напруженнями по спряжених площинках розглянемо половину круга Мора з додатними координатами (рис. 2). На рис. 2 позначені дотичні t_A, t_B , нормальні s_A, s_B та повні P_A, P_B напруження по двох площинках з відхиленням повних напружень P_A, P_B на кут h .

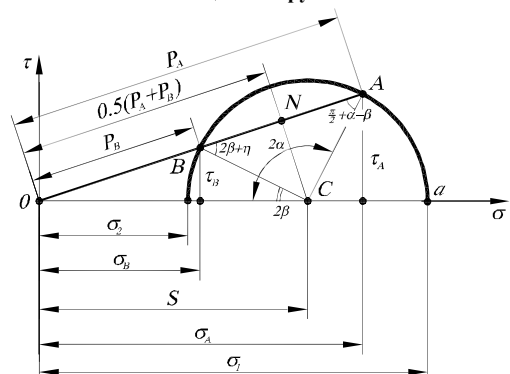


Рис. 2. До виводу співвідношень між напруженнями для спряжених площинок

Знайдемо співвідношення між цими напруженнями.

Для подальших виводів доведемо теорему.

Теорема 1. Добуток повних напружень для пари спряжених площинок є сталою величиною, що дорівнює другому інваріанту I_2 тензора напружень.

Для доведення теореми опустимо перпендикуляр CN на промінь OA (рис. 2) та запишемо очевидні співвідношення

$$P_A = \frac{P_A + P_B}{2} + \frac{P_A - P_B}{2}; \quad P_B = \frac{P_A + P_B}{2} - \frac{P_A - P_B}{2}.$$

Добуток напружень

$$P_A P_B = \left(\frac{P_A + P_B}{2} \right)^2 - \left(\frac{P_A - P_B}{2} \right)^2 = ON^2 - BN^2 = \\ = (OC^2 - CN^2) - (CB^2 - CN^2) = OC^2 - CB^2.$$

Враховуючи, що $OC = \frac{1}{2}(s_1 + s_2) = S$, а $CB = R = \frac{1}{2}(s_1 - s_2)$,

$$P_A P_B = S^2 - R^2 = s_1 \cdot s_2 = I_2 = const. \quad (9)$$

Теорема доведена.

Природньо, що одержаний для усього класу спряжених площинок вираз (9) є справедливим і для площинок з максимальним відхиленням повного напруження P_M . При $P_A = P_B = P_M$,

$$P_M^2 = S^2 - R^2 = I_2.$$

Останнє співвідношення є очевидним з рис. 1.

Наведемо необхідні для аналізу співвідношення між напруженнями по спряжених площинках, які легко одержуються з рис. 2.

$$P_A + P_B = I_1 \cos h = 2S \cos h; \quad (10)$$

$$s_A \cdot s_B = P_A \cdot P_B \cos^2 h = I_2 \cos^2 h = 2S \cos^2 h; \quad (11)$$

$$t_A \cdot t_B = P_A \cdot P_B \sin^2 h = I_2 \sin^2 h = 2S \sin^2 h; \quad (12)$$

$$s_A + s_B = I_1 \cos^2 h = 2S \cos^2 h; \quad (13)$$

$$t_A + t_B = \frac{1}{2} I_1 \sin 2h = S \sin 2h; \quad (14)$$

$$t_A \cdot s_B = t_B s_A = \frac{1}{2} I_2 \sin 2h = S \sin 2h; \quad (15)$$

$$t_A \cdot t_B + s_A \cdot s_B = I_2. \quad (16)$$

Для використання цих оригінальних виразів в інженерних розрахунках необхідно зв'язати кут h відхилення повного напруження з кутами нахилу спряжених площинок до головних.

З геометричних міркувань легко визначити вказані на рис. 2 кути.

$$\angle CBA = \angle CAB = 2b + h = \frac{1}{2}(p - (2a - 2b)).$$

Звідки випливає цікава залежність

$$a + b = \frac{p}{2} - h. \quad (17)$$

Одержана залежність дозволяє сформулювати **принцип спряженості** для загального класу спряжених площинок.

Доведемо теорему.

Теорема 2. *Повне напруження, що діє по будь-якій площинці, паралельне парній спряженій з нею площинці.*

Для доведення теореми розглянемо показану на рис. 3 пару спряжених площинок aA і aB , нахилених до головних під кутами a і b .

Площинка A складає з парною спряженою до неї площинкою B кут $a + b$. Повне напруження P_A нахилене до площинки A під кутом $\frac{p}{2} - h$. Згідно з співвідношенням (17)

$$a + b = \frac{p}{2} - h.$$

Отже, напруження P_A є паралельним площинці B . Аналогічно, напруження P_B паралельне площинці A . Доказане твердження, природньо, виконується для головних площинок і для

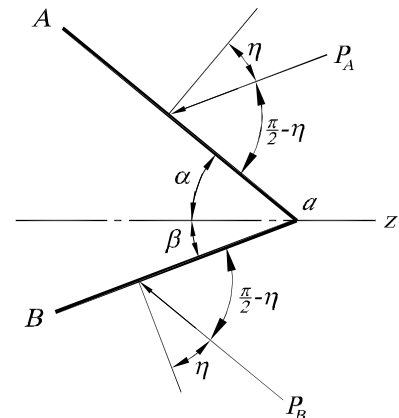


Рис. 3. Ілюстрація узагальненого принципу спряженості

симетричних неортогональних площинок максимального відхилення, які в граничному стані при $h_{\max} = j$ (рис. 4) розглядаються як площинки ковзання у сипкому середовищі. Саме для площинок ковзання С.С.Голушкевич [7] сформулював відомий принцип спряженості статки сипкого середовища. Тому одержані результати можна трактувати як розповсюдження принципу С.С.Голушкевича на більш широкий клас спряжених площинок, для яких площинки максимального відхилення є тільки частковим випадком. Співвідношення (7)...(16) між напруженнями по спряжених площинках легко зв'язати з орієнтацією цих площинок по відношенню до головних. Для цього зручно використати залежність (17) і векторні вирази $t = P \sin h$, $s = P \cos h$.

Одержані співвідношення між напруженнями по спряжених площинках, кутами їх нахилу до головних площинок і інваріантами тензора напружень наведені в таблиці 1. Паралельно в таблиці записані впливаючі з них, взагалі кажучи, відомі вирази для ортогональних головних площинок і симетричних неортогональних площинок найбільшого відхилення, які входять у сім'ю спряжених площинок.

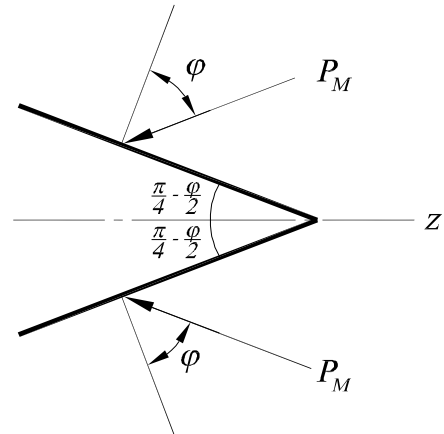


Рис. 4. Напруження по площинках максимального відхилення

Таблиця 1

Співвідношення між напруженнями та інваріантами напруженого стану

Спряжені площинки (загальний випадок)	Площинки максимального відхилення $h_{\max} = r$	Головні площинки $h = 0$
$P_A \cdot P_B = I_2$;	$P_M^2 = I_2$	$s_1 \cdot s_2 = I_2$
$P_A + P_B = I_1 \cosh = I_1 \sin(a + b)$; (18)	$P_M = \frac{1}{2} I_1 \cos r$	$s_1 + s_2 = I_2$
$s_A \cdot s_B = I_2 \cos^2 h = I_2 \sin^2(a + b)$; (19)	$s_M^2 = I_2 \cos^2 r$	$s_1 \cdot s_2 = I_2$
$t_A \cdot t_B = I_2 \sin^2 h = I_2 \cos^2(a + b)$; (20)	$t_M^2 = I_2 \sin^2 r$	-
$s_A + s_B = I_1 \cos^2 h = I_1 \sin^2(a + b)$; (21)	$s_M = \frac{1}{2} I_1 \cos^2 r$	$s_1 + s_2 = I_1$
$t_A + t_B = \frac{1}{2} I_1 \sin 2h = \frac{1}{2} I_1 \sin 2(a + b)$; (22)	$t_M = I_1 \sin 2r$	-
$t_A \cdot s_B + t_B \cdot s_A = I_2 \sin 2h = I_2 \sin 2(a + b)$; (23)	$t_M s_M = \frac{1}{2} I_2 \sin 2r$	-
$t_A \cdot t_B + s_A \cdot s_B = I_2$. (24)	$t_M^2 + s_M^2 = P_M^2 = I_2$	$s_1 \cdot s_2 = I_2$

Цікаво простежити за трансформацією спряжених площинок при зміні кута відхилення h . В загальному випадку довільному куту h відповідають дві пари спряжених площинок (рис. 5). Першу пару утворюють площинки A і B , що нахилені до головного напрямку I під кутами a і $-b$, другу – площинки A' , B' з кутами нахилу b , $-a$. При зменшенні кута h до нуля, $h \rightarrow 0$, $a \rightarrow p/2$, $b \rightarrow 0$, чотири спряжені площинки зливаються з двома головними.

При зростанні h до $h_{\max} = r$, вони переходять у дві неортогональні симетричні площинки M, M' з максимальним відхиленням повного напруження P_M на кут $h_{\max} = r$. Ці площинки нахилені до головних під кутами $p/4 \pm r/2$.

Одержані співвідношення для напружень по спряжених площинках дозволяють розв'язати пряму та обернену задачі теорії напруженого стану.

Пряма задача. Відомі головні напруження s_1, s_2 . Знайти напруження по спряжених

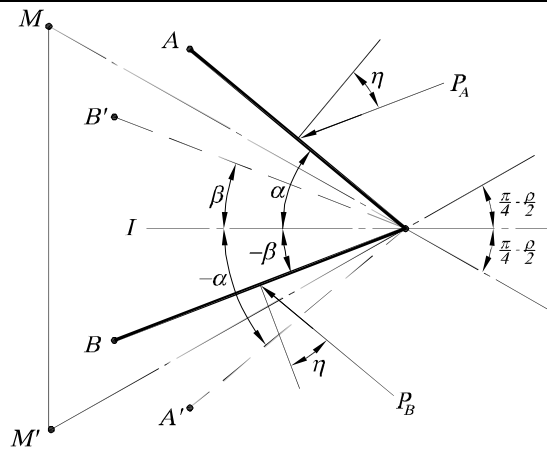


Рис. 5. Трансформація спряжених площинок

площинках з кутом відхилення h .

Графічний розв'язок легко одержати з круга Мора (див. рис. 1).

За відомими напруженнями s_1, s_2 будують круг Мора. З початку координат проводять два променя OA і OA_1 під кутом h . Координати точок A, A', B, B' у вибраному масштабі рівні нормальним і дотичним напруженням, а відрізки OA і OB – повним напруженням по спряжених площинках. Для визначення орієнтації площинки відносно головних проводять січні aA, aB через полюс a круга Мора. Спряжені площинки паралельні цим січним.

Аналітичний розв'язок.

Для знаходження повних напружень P_A і P_B використовують одержані раніше вирази (8), (10)

$$P_A P_B = I_2 = s_1 s_2;$$

$$P_A + P_B = I_1 \cos h = 2S \cosh.$$

Звідки

$$P_A = S \cosh + \sqrt{S^2 \cos^2 h - I_2}; \quad (25)$$

$$P_B = S \cosh - \sqrt{S^2 \cos^2 h - I_2}. \quad (26)$$

В явній формі повні напруження можуть бути записані через головні

$$P_A = \frac{s_1 + s_2}{2} \cosh + \frac{1}{2} \sqrt{(s_1 + s_2)^2 \cos^2 h - 4s_1 s_2}; \quad (27)$$

$$P_B = \frac{s_1 + s_2}{2} \cosh - \frac{1}{2} \sqrt{(s_1 + s_2)^2 \cos^2 h - 4s_1 s_2}, \quad (28)$$

або через напруження s_x, s_y, t_{xy} по довільних ортогональних площинках

$$P_A = \frac{s_x + s_y}{2} \cosh + \frac{1}{2} \sqrt{(s_x + s_y)^2 \cos^2 h - 4(s_x s_y - t_{xy}^2)}; \quad (29)$$

$$P_B = \frac{s_x + s_y}{2} \cosh - \frac{1}{2} \sqrt{(s_x + s_y)^2 \cos^2 h - 4(s_x s_y - t_{xy}^2)}. \quad (30)$$

Дотичні та нормальні напруження по спряжених площинках знаходять з елементарних співвідношень

$$t_A = P_A \sinh; \quad s_A = P_A \cosh;$$

$$t_B = P_B \sinh; \quad s_B = P_B \cosh.$$

Кути, що утворюють спряжені площинки з головними визначають з відомих формул теорії напруженого стану

$$\operatorname{tga} = \frac{t_A}{s_1 - s_A} = \frac{\operatorname{tgh}}{\frac{s_1 - 1}{s_A}}; \quad (31)$$

$$\operatorname{tgb} = \frac{t_A}{s_1 - s_B} = \frac{\operatorname{tgh}}{\frac{s_1 - 1}{s_B}}. \quad (32)$$

Обернена задача. Відомі напруження, що діють по площинках з кутом відхилення h . Знайти головні напруження.

Графічний розв'язок задачі є очевидним з рис. 2.

В площині напружень s, t з початку координат O проводять промінь під кутом h до осі s . Відкладаючи на ньому відрізки, рівні повним напруженням P_A і P_B , одержують точки A і B , що лежать на крузі Мора. Проводять перпендикуляр через середину відрізка AB і на перетині його з віссю s одержують точку C – центр круга. Окреслюють круг радіусом CA чи CB , абсиси точок a і b дорівнюють головним напруженням s_1, s_2 .

Аналітичний розв'язок.

Головні напруження знаходяться через параметри круга Мора з виразу

$$s_{1,2} = S \pm R, \quad (33)$$

де $S = \frac{P_1 + P_2}{2 \cosh}, \quad R = \sqrt{S^2 - P_1 P_2}.$

Отже,

$$S_{1,2} = \frac{P_1 + P_2}{2 \cosh h} \pm \sqrt{\left(\frac{P_1 + P_2}{2 \cosh h}\right)^2 - P_1 P_2} . \quad (34)$$

Якщо за вихідні прийняти напруження P_M по площинках максимального відхилення, $S = \frac{P_M}{\cos r}$,

$$R = P_M \cdot \operatorname{tg} \eta$$

$$S_{1,2} = \frac{P_M}{\cos r} \pm P_M \cdot \operatorname{tg} \rho = S(1 \pm \sin r) . \quad (35)$$

Висновки

Наведені у статті результати досліджень розширюють положення теорії напруженого стану, сформульовані переважно для ортогональних напрямів, на більш загальний клас неортогональних спряжених площинок, які представляють особливий інтерес для механіки ґрунтів і сипких середовищ, оскільки можуть бути використані для формулювання деформаційної моделі сипкого середовища. Достовірність результатів обумовлюється використанням добре апробованого математичного апарату теорії напруженого стану та співпадінням результатів, одержаних для загального випадку спряжених площинок з відомими співвідношеннями для головних площинок і площинок граничної рівноваги сипкого середовища.

Література

1. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Малинин Н. Н. – М. : Машиностроение, 1975. – 400 с.
2. Боткин А. И. О прочности сыпких и хрупких материалов / А. И. Боткин // Известия научно-исследовательского института гидротехники. – 1940. – Т. 26. – С. 205–236.
3. Ковтун В. В. Экспериментальное исследование прочности песков в условиях плоской деформации / В. В. Ковтун // Труды Союзморниипроекта. Вып. 17. – М. : Транспорт, 1967. – С. 95–98.
4. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды / Соколовский В. В. – М. : Наука, 1960. – 243 с.
5. Соколовский В. В. Теория пластичности / Соколовский В. В. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.
6. Шихиев Ф. М. Кинематическая теория давления ґрунтов на причальные сооружения и другие типы жестких и гибких ограждений: дис. ... доктора техн. наук : 05.22.18 / Фуад Мувсумович Шихиев. – Одесса : ОИИМФ, 1964. – 471 с.
7. Голушкевич С. С. Статика предельных состояний ґрунтовых масс / Голушкевич С. С. – М. : Гос. изд. теор. лит., 1957. – 288 с.

Надійшла 2.12.2009 р.

УДК 620. 193. 16

А.І. ГОРДЕЄВ

Хмельницький національний університет

РОЗВИТОК НАУКОВИХ ОСНОВ ПРОЕКТУВАННЯ ВІБРАЦІЙНОГО ОБЛАДНАННЯ ДЛЯ ЗМІНИ ВЛАСТИВОСТЕЙ ВОДИ ТА ЇЇ ЗНЕЗАРАЖУВАННЯ

Наведено аналіз використання вібраційних коливань та кавітації у рідині. Запропоновано технологію та вібраційне обладнання для зміни властивостей води та її знезаражування. Запропоновано наукові основи загальної методики проектування вібраційного обладнання на основі гідропульсатора.

The analysis of use of vibrating fluctuations and catching in a liquid is given. It is offered technology and vibrating equipment for change of properties of water and anthemion. It is offered scientific bases of a general technique of designing of the vibrating equipment on a basis vibrating.

Ключові слова: коливання рідини, кавітація, проектування вібраційних машин.

Використання вібраційних коливань у технологіях обумовлюється потребами підвищення інтенсивності, поліпшення якісних показників, а в деяких випадках і можливістю реалізації технологічних процесів. Унікальні можливості вібраційного поля дозволяють успішно здійснювати не тільки оздоблювальну – зачисну та зміцнювальну операції, але і такі операції, як сепарація, перемішування, вібротранспортування за важких експлуатаційних умов, гомогенізація, фільтрування, сушіння, насичення середовища певними речовинами, руйнування поверхонь та ряд інших процесів. Це обумовлює ефективність застосування вібраційних технологічних машин в багатьох галузях промислового виробництва.

Розвиток вібраційних конвеєрних машин веде початок із хвильових та вібраційних конвеєрів, які виконують суто транспортні функції. Фундаментальні роботи І.І. Блехмана, І.Ф. Гончаревича, Г.Ю.