МОДИФІКАЦІЯ КОМБІНАТОРНОЇ ГРИ БАШЕ – ГРА З «ОСОБЛИВИМ» ХОДОМ

Драч І. В.[1], *Зегельман М.М.*[2]
[1] *Хмельницький національний університет,* cogitare410@gmail.com
[2] *Кам'янець-Подільський ліцей,* zemark2012@gmail.com

Комбінаторні ігри як предмет серйозного дослідження стали привертати увагу математиків тільки з початку XX століття. Початок їх вивчення було покладено статтею Чарльза Боутона в 1902 р «Нім, гра з повною математичною теорією» [1].

Комбінаторна теорія ігор – це математична теорія, що вивчає ігри двох осіб, в яких у кожен момент часу є позиція, яку гравці почергово змінюють певним чином, щоб досягти певного виграшу. У цій теорії не вивчаються ігри, пов'язані з випадковістю, а тільки ігри, в яких і позиція, і всі можливі ходи однаково відомі обом гравцям [2].

Застосування комбінаторної теорії ігор до певної позиції полягає у визначенні оптимальної послідовності ходів для обох гравців аж до кінця гри, і таким чином визначенні оптимального ходу в кожній позиції.

Загалом, теорія ігор застосовується в різних галузях людської діяльності: в економіці, соціології, політології, біології, кібернетиці, військовій справі, тощо [3]. Найчастіше теорія ігор і конфліктні ситуації застосовуються в економіці. Для кожного гравця є певний набір стратегій, які гравець може застосувати. Перетинаючись, стратегії декількох гравців створюють певну ситуацію, де кожен гравець отримує певний результат (виграш чи програш). При виборі стратегії важливо враховувати не тільки отримання максимального виграшу для себе, але так само можливі кроки супротивника й їх вплив на ситуацію в цілому.

У даній статті розглянемо скінченні, неупереджені ігри без нічиїх. Такі ігри повністю визначаються своїми правилами і початковою позицією. Нас цікавитимуть розбиття позицій кожної гри на виграшні (В) і програшні (П) - позиції.

Стаття присвячена узагальненню та модифікації гри Баше [4] на довільну кількість наборів та з особливим ходом, який за гру можна зробити лише один раз. Для цього використано авторський метод умовно виграшних позицій, що й визначає новизну роботи.

Розглянемо гру Баше: на столі є набір з п'ятнадцяти предметів. Два гравці по черзі можуть взяти один, два або три предмети. Гравець, який не може зробити хід, програв. Хто виграє при правильній грі?

Переформулюємо цю задачу в еквівалентній інтерпретації: на аркуші позначено шістнадцять клітинок, розміщених у рядок з номерами від нуля до п'ятнадцяти. Спочатку фішка знаходиться в п'ятнадцятій клітинці. Два гравці за один хід можуть перенести фішку на одну, дві або три клітинки вліво. Гравець, який зробив хід на нульову клітинку, виграв. Тобто, іншими словами, гравець, який не може зробити хід, програв. Хто виграє при правильній грі?

Для таких ігор розглянемо метод виграшних та програшних позицій. Позиція є програшною, якщо гравець, який робить хід, програє, та виграшною, якщо гравець, який робить хід, виграє. Метод складається з трьох правил:

Умова завершення гри: клітинка, яка відповідає ситуації, коли нуль предметів – програшна (гравець не може зробити хід).

Якщо з клітинки можна зробити хід на програшну, то вона виграшна (В), супротивник опиниться у програшній ситуації.

Якщо з клітинки всі ходи ведуть на виграшні клітинки, то вона програшна (П). Для того, щоб застосувати це правило, необхідним є, щоб серед клітинок, на які ми можемо піти, не було невизначених.

Користуючись цими правилами, одержимо таблицю 1:

Таблиця 1

П	В	В	В	П	В	В	В	П	В	В	В	П	В	В	В
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Перший гравець має залишати своїм ходом число, яке націло ділиться на 4, тобто робити ходи на програшну клітинку.

Розглянемо узагальнення гри Баше на більшу кількість наборів.

Задача 1. На столі є m наборів предметів: у першому наборі – a_1 предметів, у другому – a_2 предметів, у наборі з номером m – a_m предметів. Два гравці по черзі можуть взяти будь-яку кількість предметів, яка не перевищує n з однієї купи. Гравець, який не може зробити хід, програв. Хто виграє при правильній грі?

Зрозуміло, що можна будувати багатовимірну таблицю, але при збільшенні кількості наборів в задачі це зробити буде дуже складно. Розглянемо алгоритм, який визначає виграшну чи програшну позицію. Для визначення типу позиції потрібно знайти остачі від ділення чисел a_1, a_2, ... , a_m на число n+1. Відповідні остачі позначимо r_1, r_2, ... , r_m. Знайдені остачі переводимо у двійкову систему числення та знаходимо суму двійкових розрядів.

Зауважимо, що при будь-якому ході гравця остача при діленні на n або збільшиться, або зменшиться (для того, щоб остача залишилась та сама, потрібно, щоб кількість забраних предметів ділилась на n, проте дозволені лише ходи 1, 2, … , n-1). Отже, ходи гравців бувають двох типів, коли остача при діленні на n збільшується і зменшується. У випадку, коли другий гравець зробить хід, при якому остача збільшиться, перший гравець завжди може доповнити хід другого гравця до n. Тобто, якщо один гравець взяв однин предмет, інший з цього набору має взяти n-1. Якщо другий гравець зробив хід, при якому остача зменшилась, то перший знаходить остачі при діленні на 4 та застосовує алгоритм гри Нім [5, 1].

Розглянемо модифікацію гри Баше з «особливим» ходом.

Задача 2. На столі є два набори предметів по одинадцять предметів у кожному. Два гравці по черзі можуть взяти один, два або три предмети з одного набору. «Особливий хід»: гравець може взяти один, два або три предмети з двох наборів одразу, але тільки один раз. Гравець, який не може зробити хід, програв. Хто виграє при правильній грі?

Хід з двох наборів - «особливий», ускладнює розв’язання задачі. Будемо заповнювати таблицю для першого гравця, але її може використати і другий гравець, змінивши у клітинках таблиці індекси місцями. Клітинку, в якій перший гравець виграє тоді і тільки тоді, коли в нього є «особливий» хід, позначимо B_1. Клітинку, в якій перший гравець виграє тоді і тільки тоді, коли в другого гравця немає «особливого» ходу, назвемо $B_{\overline{2}}$. Клітинку, в якій перший гравець виграє тоді і тільки тоді, коли в першого гравця є «особливий» хід або у другого гравця його немає, позначимо $B_{1\vee\overline{2}}$. Клітинку, в якій перший гравець виграє тоді і тільки тоді, коли в першого гравця є «особливий» хід і в другого гравця «особливого» ходу немає, позначимо $B_{1\wedge\overline{2}}$ Розглянемо правила визначення позицій (таблиця 2):

Таблиця 2

Тип клітинки, на яку можна зробити хід	Звичайний хід	Особливий хід
В	П	П
П	В	B_1
B_1	$B_{\overline{2}}$	$B_{1\wedge\overline{2}}$
$B_{\overline{2}}$	B_1	П
$B_{1\vee\overline{2}}$	$B_{1\wedge\overline{2}}$	П
$B_{1\wedge\overline{2}}$	$B_{1\vee\overline{2}}$	$B_{1\wedge\overline{2}}$

Другий рядок таблиці означає, що якщо з клітинки можна зробити звичайний хід на П, то тип клітинки – В. Якщо з клітинки можна зробити особливий хід на П, то тип клітинки не менше, ніж В$_1$. Зрозуміло, що для гравця найкраща позиція – це В, а найгірша – це П. Найкраща позиція – В => $B_{1\vee\bar{2}}$ => B_1, $B_{\bar{2}}$ => $B_{1\wedge\bar{2}}$ => П – найгірша позиція.

Якщо з клітинки можна зробити декілька ходів, які приводять до різних типів клітин, то потрібно вибрати найкращий з можливих варіантів, зазначених вище, та зробити відповідний хід. Якщо після одного ходу одержується тип клітинки B_1, після іншого – $B_{\bar{2}}$ і кращих ходів немає, то потрібно поставити тип клітинки $B_{1\vee\bar{2}}$.

Користуючись сформульованими правилами, заповнимо необхідну для гри таблицю 3.

Таблиця 3

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	П	В	В	В	П	В	В	В	П	В	В	В
1	В	B_1	$B_{\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	В	B_1	$B_{\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	В	B_1	$B_{\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$
2	В	$B_{\bar{2}}$	B_1	$B_{1\vee\bar{2}}$	В	$B_{\bar{2}}$	B_1	$B_{1\vee\bar{2}}$	В	$B_{\bar{2}}$	B_1	$B_{1\vee\bar{2}}$
3	В	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	B_1	В	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	B_1	В	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	B_1
4	П	В	В	В	$B_{1\wedge\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\wedge\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$
5	В	B_1	$B_{\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	B_1	$B_{\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	B_1	$B_{\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$
6	В	$B_{\bar{2}}$	B_1	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{\bar{2}}$	B_1	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{\bar{2}}$	B_1	$B_{1\vee\bar{2}}$
7	В	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	B_1	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\wedge\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\wedge\bar{2}}$
8	П	В	В	В	$B_{1\wedge\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\wedge\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$
9	В	B_1	$B_{\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	B_1	$B_{\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	B_1	$B_{\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$
10	В	$B_{\bar{2}}$	B_1	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{\bar{2}}$	B_1	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{\bar{2}}$	B_1	$B_{1\vee\bar{2}}$
11	В	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	B_1	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\wedge\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\vee\bar{2}}$	$B_{1\wedge\bar{2}}$

Позиції, що залежать від наявності «особливих» ходів у кожного з гравців, назвемо умовно виграшними.

Нехай C, D – блоки клітинок:

$$C=\begin{matrix} П & B & B & B \\ B & B_1 & B_{\overline{2}} & B_{1\vee\overline{2}} \\ B & B_{\overline{2}} & B_1 & B_{1\vee\overline{2}} \\ B & B_{1\vee\overline{2}} & B_{1\vee\overline{2}} & B_1 \end{matrix} \qquad D=\begin{matrix} B_{1\wedge\overline{2}} & B_{1\vee\overline{2}} & B_{1\vee\overline{2}} & B_{1\vee\overline{2}} \\ B_{1\vee\overline{2}} & B_1 & B_{\overline{2}} & B_{1\vee\overline{2}} \\ B_{1\vee\overline{2}} & B_{\overline{2}} & B_1 & B_{1\vee\overline{2}} \\ B_{1\vee\overline{2}} & B_{1\vee\overline{2}} & B_{1\vee\overline{2}} & B_{1\wedge\overline{2}} \end{matrix}$$

тоді таблицю для гри можна записати у вигляді:

$$\begin{matrix} C & C & \dots & C & C \\ C & D & \dots & D & D \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C & D & \dots & D & D \\ C & D & \dots & D & D \end{matrix} \qquad (1)$$

Доведемо це твердження методом математичної індукції за кількістю блоків в одному рядку.

1) При n=2 використаємо правила, описані вище, одержимо $\begin{matrix} C & C \\ C & D \end{matrix}$.

2) Припустимо, що твердження виконується при n=k. Тобто таблиця гри $4k \times 4k$ має блочний вигляд 1.

3) Доведемо, що при n=k+1 таблиці гри мають блочний вигляд.

Використавши припущення індукції та той факт, що останні чотири рядки і стовпці не впливають на рядки та стовпці з меншими номерами (оскільки будь-який хід не збільшує координати клітинки), ми одержимо, що таблиця, крім останніх чотирьох рядків та стовпців, має блочний вигляд. Використаємо правила та заповнимо останні чотири рядки та чотири стовпці таблиці та одержимо (1).

Згідно з принципом математичної індукції, таблиці гри будь-якої розмірності мають такий блочний вигляд, як (1).

Якщо на початку гри тип клітинки В, або B_1, або $B_{1\vee\overline{2}}$, то при правильній грі виграє перший гравець, в інших випадках ($B_{\overline{2}}$, $B_{1\wedge\overline{2}}$, П) виграє другий гравець. Тобто початкова клітинка гри a_{ij} для першого гравця програшна, якщо i та j діляться на 4 або одна остача від ділення i та j на 4 дорівнює 1, а інша – 2 або i та j не менші, ніж 7, та при діленні на 4 дають остачу 3.

Розглянемо стратегію першого гравця, яка полягає в тому, що особливий хід він використовує тільки тоді, коли гравець переходить на клітинку П або коли фішка знаходиться на клітинці a_{44} (з a_{44} можна зробити хід на a_{11}). Зрозуміло, що хід на клітинку П виграшний, після нього будуть звичайні ходи також на П. Хід з a_{44} на a_{11} виграшний, якщо у другого гравця вже немає особливого ходу, тобто гра після особливого ходу очевидна. До особливого ходу перший гравець грає наступним чином: ходить на П, якщо немає ходу, то на $B_{1 \wedge \overline{2}}$, якщо немає ходу , то на $B_{\overline{2}}$, якщо немає ходу, то на B_1.

Таким чином, розроблено стратегію виграшу для принципово нової модифікації гри Баше з умовно виграшними клітинками.

Висновки

Створено узагальнений варіант гри для більшої кількості наборів, а також розглянуто гру Баше з «особливим» ходом, який в партії можна зробити один раз. Для цієї гри розроблено принципово новий алгоритм з умовно виграшними позиціями, який враховує, чи зроблено гравцями «особливий» хід. Доведено, що таблиця цієї гри має блочну структуру. Знайдено, які клітинки на початку гри є виграшними для першого гравця, а які програшними. Гра Баше з «особливим» ходом розглядає не два типи клітинок, а шість, що є більш складнішим випадком порівняно зі звичайною грою Баше.

Література

1. Charles L. Bouton Nim, a Game with a Complete Mathematical Theory / Charles L. Bouton // The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 3, No. 1/4. (1901 - 1902). P. 35-39.
2. Essam El-Seidy Models of Combinatorial Games and Some Applications: A Survey./ Essam El-Seidy, Salah Eldin S. Hussein, Awad Talal Alabdala // Journal of Game Theory, 2016, 5(2). P. 27-41.
3. Pu-yan Nie Game Theory and Applications in Economics / Pu-yan Nie, Takashi Matsuhisa, X. Henry Wang, Pei-ai Zhang // Journal of Applied Mathematics. Volume 2014 , Article ID 936192, 2 pages.
4. Theodore L. Turocy Game Theory. / Theodore L. Turocy, Bernhard von Stengel // CDAM Research Report LSE-CDAM-2001-09 October 8, 2001.
5. Christopher Freeman. Nim: Serious Math with a Simple Game. Prufrock Press Inc: 2005. pp. 15-21, 27-44.