

Багрій О.В.Хмельницький національний університет,
м. Хмельницький, Україна
E-mail: avadaro@yahoo.com**АНАЛІЗ ВПЛИВУ ВНУТРІШНЬОГО
КУЛОНОВОГО ТЕРТЯ НА ДЕФОРМУВАННЯ
КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ**

УДК 620.17

В роботі досліджено залежності величин модуля зсуву G і коефіцієнта Пуассона ν від досягнутого рівня напружено-деформативного стану. Це дає можливість використовувати одержані співвідношення в розв'язанні плоскої фізично нелінійної задачі механіки дискретних матеріалів чисельними методами.

Ключові слова: внутрішнє тертя, апроксимація, модуль зсуву, коефіцієнт Пуассона, модуль об'ємної деформації.

Вступ

До великої групи композитних матеріалів з малою зв'язністю відносять, наприклад, бетони, будівельні суміші, природні ґрунти, вироби технічної кераміки та ін. Такі матеріали характеризуються зростанням міцності зі збільшенням величини стискуючих напружень, що трактується як прояв внутрішнього кулонового тертя. Для композитних матеріалів з малою зв'язністю вплив на деформування зв'язності логічно вивчати на зразках пластичного матеріалу, де цей вплив є визначальним; а вплив внутрішнього кулонового тертя – на зразках дискретного матеріалу, у якого відсутня зв'язність.

Вплив на деформування матеріалів внутрішнього кулонового тертя, що описується моделлю Кулона, досліджувався на прикладі дискретних матеріалів [1], чий опір зсувам повністю визначається сухим тертям.

Випробовувались зразки сухого кварцового піску Люберецького родовища. Гранулометричний склад піску наведений у [1]. Було проведено три серії дослідів, що відрізнялись тільки структурним станом матеріалу, який оцінювався величиною початкової відносної щільності. Початкові фізичні характеристики піску наведені у [1].

Результати випробувань макрозразків сухого кварцового піску в умовах плоскої деформації представлені сім'єю кривих [1, рис. 4, 5] та описують в просторі інваріантів S , P , Γ поверхню деформування матеріалів, у яких відсутня молекулярна зв'язність (поверхню Кулона).

Для формулювання фізичних співвідношень моделі Кулона одержану експериментально поверхню необхідно апроксимувати зручними для подальших розрахунків і аналізу функціями.

Найчастіше подібні експериментальні криві апроксимувались степеневими функціями виду

$$\tau = A \sigma_m \gamma^\alpha, \text{ або гіперболічними } \tau = \frac{n \sigma_m \gamma}{m + \gamma}, \text{ де } A, \alpha, n, m - \text{ параметри апроксимуючих функцій.}$$

Степенева апроксимація використовувалась В.В. Ковтуном [2], (1965 р.), С.С. Вяловим [3], (1978 р.), О.А. Дорофєєвим [4], (2004 р.). Перевагою такої апроксимації є простота використання степеневих функцій. До недоліків слід віднести те, що для степеневих залежностей початковий модуль зсуву $G_{(S=0)} = \infty$, а також неможливість чіткого описання за допомогою степеневих функцій переходу

матеріалу у граничний стан (при $\gamma \rightarrow \infty, \frac{d\tau}{d\gamma} \neq 0$).

Апроксимація діаграм „напруження - деформація” гіперболічною (дробово - лінійною) функцією

виду $\tau_i = \frac{G_0 \tau_S}{\tau_S + G_0 \gamma_i}$, що не враховує вплив стискуючого напруження на величину деформації

запропонована в 1931 році С.П. Тимошенко і пізніше використовувалась С.С. Вяловим, М.В. Малишевим та ін.

Вплив внутрішнього тертя (стискуючого напруження) на деформації дискретного матеріалу вперше описав А.І. Боткін [5], який використав апроксимуючу функцію виду

$$\tau_0 = \frac{c \gamma_0}{d + \gamma_0} \sigma_0, \quad (1)$$

де $\tau_0, \sigma_0, \gamma_0$ – октаедричні напруження і деформації;

c, d – параметри апроксимації.

В статті зроблено порівняння апроксимацій дослідних кривих, одержаних для умов плоскої

деформації, двома функціями:

- степенною

$$S = AP\Gamma^\alpha, \quad \frac{S}{P} = A\Gamma^\alpha; \quad (2)$$

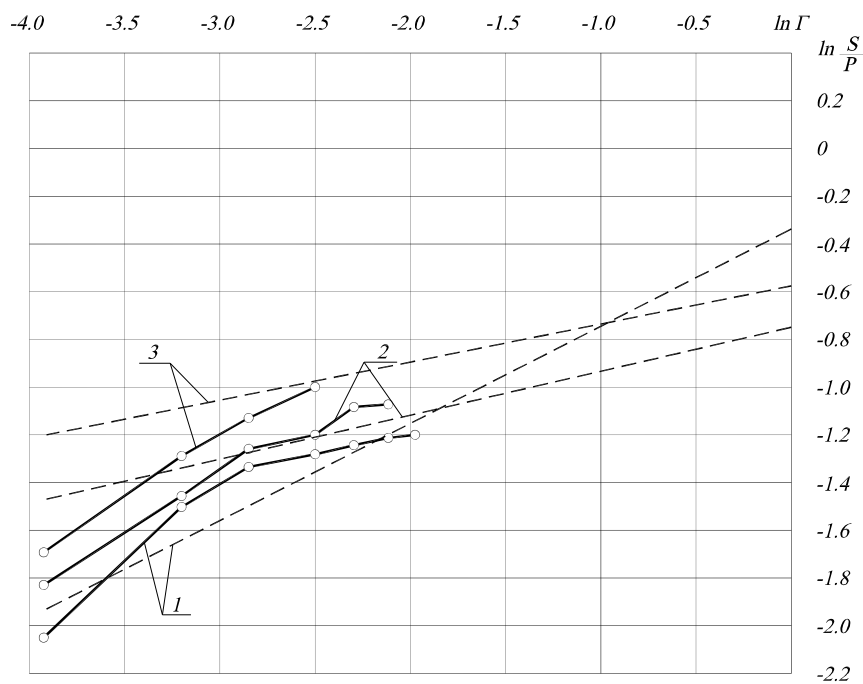
- дробово-лінійною

$$S = \frac{n\Gamma}{m + \Gamma}P, \quad \frac{S}{P} = \frac{n\Gamma}{m + \Gamma}. \quad (3)$$

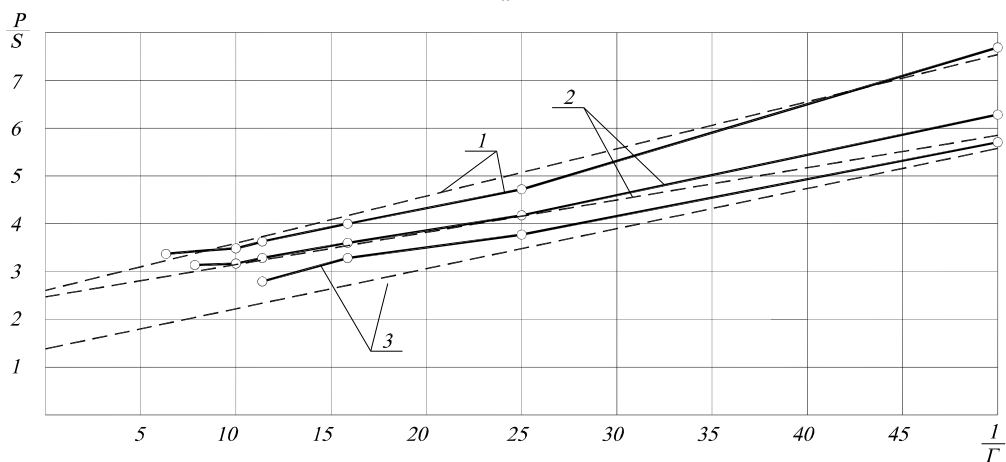
Метою апроксимації є вибір найбільш раціональної функції для описання деформування дискретних матеріалів в умовах плоскої деформації і визначення параметрів функції для конкретного матеріалу.

Для цього використовувались спеціальні (функціональні) шкали, в системі координат яких апроксимуючі функції описуються лінійними залежностями.

Логарифмуючи степеневу залежність (2) $\ln \frac{S}{P} = \ln A + \alpha \ln \Gamma$, одержуємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k = \alpha$, що відтинає на осі ординат відрізок $b = \ln A$ (рис. 1, а).



а



б

Рис. 1 – Графіки апроксимуючих функцій у функціональних шкалах:

а – степеневая функція;

б – дробово - лінійна функція;

1 – пухкий стан; 2 – стан середньої щільності; 3 – щільний стан

Функціональні координати дробово-лінійної функції (3) одержимо після введення обернених величин: $\xi = \frac{P}{S}$; $\omega = \frac{1}{\Gamma}$. Тоді співвідношення (3) перетворюється у лінійне $\xi = \frac{m}{n}\omega + \frac{1}{n}$, де кутовий

коефіцієнт прямої $k = \frac{m}{n}$, а відрізок на осі ординат $b = \frac{1}{n}$ (рис. 1, б).

Параметри k та b прямих у функціональних системах координат визначались методом найменших квадратів.

Коефіцієнти кореляції для степеневі апроксимації становили:

- серія 1 (пухкий стан): $\eta = 0,757$;

- серія 2 (середня щільність): $\eta = 0,772$;

- серія 3 (щільний стан): $\eta = 0,796$.

Коефіцієнти кореляції для апроксимації дробово - лінійною функцією:

- серія 1 (пухкий стан): $\eta = 0,893$;

- серія 2 (середня щільність): $\eta = 0,897$;

- серія 3 (щільний стан): $\eta = 0,899$.

Описана статистична обробка результатів випробувань зразків сухого кварцового піску з різною початковою щільністю в умовах плоскої деформації дозволила зробити наступні висновки.

Апроксимація експериментальних кривих дробово - лінійною функцією (3) краще узгоджується з дослідними даними, ніж апроксимація степеневою функцією (2), особливо на початковій та приграничній ділянках деформування.

Для трьох описаних у [1] серій з імовірністю $\lambda : 0,9$ одержані такі середні значення параметрів апроксимації n і m :

- серія 1 (пухкий стан): $n = 0,3979$; $m = 0,03999$;

- серія 2 (середня щільність): $n = 0,4115$; $m = 0,02817$;

- серія 3 (щільний стан): $n = 0,8923$; $m = 0,077103$.

Для формування на основі проведених експериментальних досліджень фізичних рівнянь "напруження - деформації" зручно використовувати поняття змінного "дотичного" або "січного" модуля зсуву:

$$G^d = \frac{dS}{d\Gamma} = \frac{nm}{(m + \Gamma)^2} P, \quad (4)$$

$$G^c = \frac{S}{\Gamma} = \frac{n}{m + \Gamma} P. \quad (5)$$

Як видно з наведених виразів, величина модуля зсуву залежить від досягнутих напружень P і деформацій Γ , що підтверджується графіками рис. 2, одержаними шляхом графічного диференціювання "згладжених" експериментальних кривих $S = f(\Gamma)$, $P = \text{const}$ [1].

Залежність модуля зсуву від стискующего напруження P відображає вплив сухого кулонового тертя. Характер цієї залежності можна прослідкувати, якщо перейти до відносного модуля зсуву:

$$G_0 = \frac{G}{P} = \frac{nm}{(m + \Gamma)^2}, \quad (6)$$

Експериментальні графіки $G_0 = f(\Gamma)$ для піску різного стану щільності побудовано за середніми значеннями G_0 і показано на рис. 3.

З виразу (6) для відносного модуля зсуву впливають такі особливості апроксимуючої дробово-лінійної функції.

При зменшенні деформації ($\Gamma \rightarrow 0$) величина відносного модуля зсуву G_0 зростає до свого найбільшого значення $G_0 \rightarrow \frac{n}{m}$. Отже, відношення параметрів $\frac{n}{m}$ має фізичний зміст. Воно дорівнює початковому відносному модулю зсуву:

$$G_{0n} = \frac{n}{m} \tag{7}$$

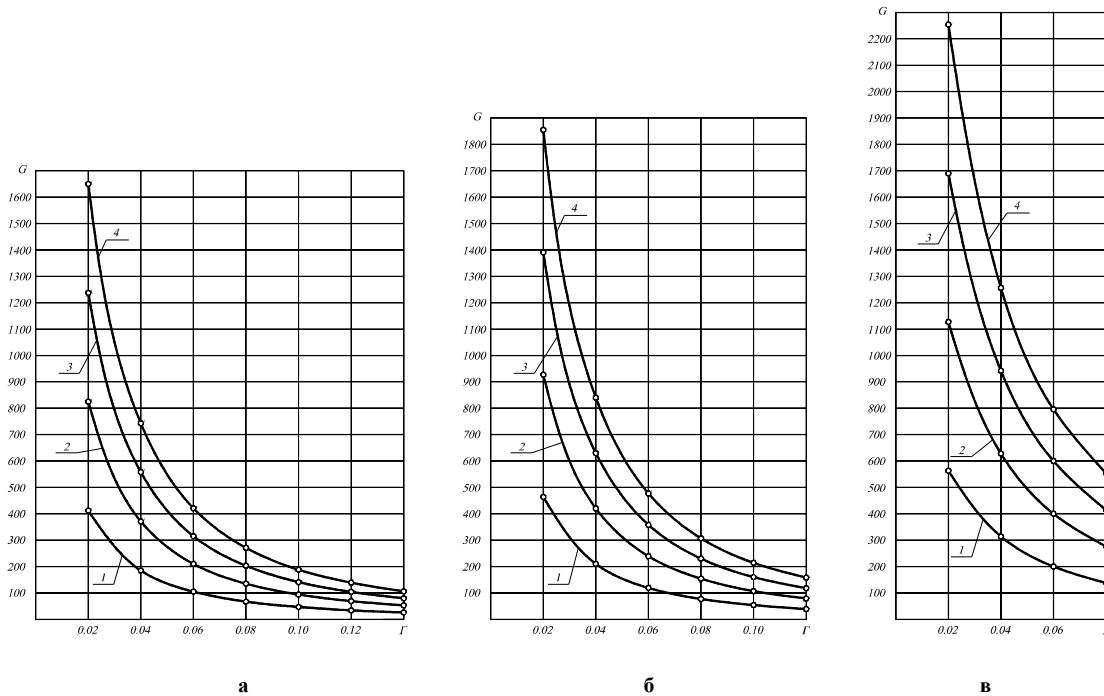


Рис. 2 – Залежність модуля зсуву G від деформації і стискуючих напружень:
а – пухкий стан;
б – середня щільність;
в – щільний стан;
1 – P = 98 кПа; 2 – P = 196 кПа;
3 – P = 294 кПа; 4 – P = 392 кПа

При зростанні деформації ($\Gamma \rightarrow \infty$) відносний модуль зменшується до нуля, що відповідає переходу матеріалу в граничний стан. В проведених дослідях модуль G_0 мало відрізняється від нуля вже при деформаціях $\Gamma : 0,1; 0,15; 0,1 \div 0,15$.

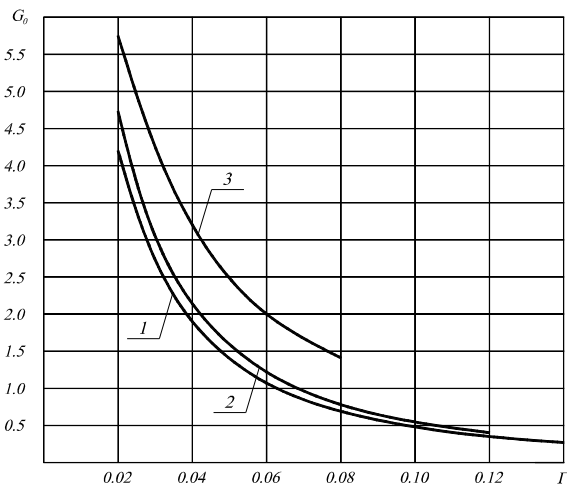


Рис. 3 – Відносний модуль зсуву:
1 – пухкий стан;
2 – середня щільність;
3 – щільний стан

Фізичні залежності "напруження - деформації" у механіці деформівного тіла представляють у вигляді двох незалежних інваріантних співвідношень, які зручно записати через змінні модулі деформації G_{zm} , K_{zm} , величини яких залежать від досягнутого рівня напружень та деформацій:

$$S = G_{zm}(\Gamma, P)\Gamma;$$

$$P = K_{zm}(\theta, S)\theta.$$

Таке представлення поверхні деформування вимагає незалежного визначення двох функцій G_{zm} , K_{zm} або інших змінних параметрів: модуля Юнга E_{zm} , коефіцієнта

Пуассона ν_{zm} , параметра Ляме λ_{zm} та ін.

Найбільш зручною для визначення в умовах плоскої деформації є функція модуля зсуву $G_{zm}(\Gamma, P)$. Характер функції G_{zm} , встановлений за результатами випробувань кварцового піску в умовах плоскої деформації, описано вище (див. (4), (5)).

Незалежно визначити експериментальним шляхом функцію модуля об'ємної деформації $K_{зм}(\theta, S)$ не вдається в зв'язку з проявом недостатньо вивченого ефекту дилатансії. Однак проведені експериментальні дослідження дозволяють легко визначити величину коефіцієнта Пуассона $\nu_{зм}$ на кожному етапі навантаження і за допомогою відомого співвідношення для умов плоскої деформації перейти до модуля об'ємної деформації $K_{зм}$:

$$K_{зм} = 2G_{зм} \frac{1 + \nu_{зм}}{1 - \nu_{зм}}$$

Методика визначення $\nu_{зм}$ в умовах одновісної деформації описана у [6].

Результати експериментальних досліджень наведені для сухого кварцового дрібнозернистого піску середньої початкової щільності.

Характеристики матеріалу:

- об'ємна маса – 1565 ± 15 кг/м³;
- коефіцієнт пористості $e = 0,72 \pm 0,014$;
- початкова відносна щільність $I = 0,512$.

Випробування проведені в умовах одновісної деформації на приладі, описаному в [7]. Розміри зразка у камері приладу: $d = 80$ мм, $h = 50$ мм, площа перерізу зразка $A = 5026 \text{ см}^2$, $50,265 \text{ см}^2$. Модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона визначались за виразами, наведеними у [6]. Результати випробувань представлені у табл. 1.

Таблиця 1

**Результати експериментальних досліджень
в умовах одновісної деформації**

№ досліджу	N , кН	σ_z , кПа	Δh , мм	ε	P , кПа	δ , мм	E , МПа	ν
1	0,4	78,9	2,14	0,0428	73,8	2,02	27,86	0,31
2	0,39	78,3	3,48	0,0696	67,0	2,51	27,15	0,34
3	0,37	73,4	3,28	0,0656	69,5	3,09	26,19	0,32
4	0,34	68,3	2,49	0,0498	70,3	3,25	27,8	0,32
5	0,37	73,7	2,90	0,058	76,5	3,09	26,05	0,31
6	0,33	65,5	3,03	0,0606	76,8	2,09	26,75	0,3
7	0,38	75,6	2,86	0,0572	67,0	2,23	26,71	0,33
8	0,34	67,7	2,89	0,0578	65,5	2,56	27,24	0,33
9	0,34	66,8	2,47	0,0494	74,6	2,91	27,57	0,31
10	0,36	71,2	3,27	0,0654	77,8	3,04	27,13	0,33

Осереднені значення модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона в діапазоні зміни напружень $65 \div 80$ кПа становлять $E = 27,05 \pm 0,59$ МПа; $\nu = 0,32 \pm 0,012$.

Для випробувань на приладі плоскої деформації коефіцієнт Пуассона визначався з умови $\varepsilon_z = 0$:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_{зм}} [\sigma_z - \nu_{зм} (\sigma_1 + \sigma_2)] = 0; \quad \nu_{зм} = \frac{\sigma_z}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

Випробування проведені на приладі плоскої деформації (серія 2, 15 дослідів). Досліди проводились при сталих величинах суми головних напружень: $P = 98; 196; 294; 392$ кПа. Коефіцієнт

Пуассона визначався в діапазоні відносних деформацій $\nu = 0,07 \div 0,09$ з виразу $\nu = \frac{\sigma_z}{\sigma_1 + \sigma_2}$.

Одержано такі середні значення коефіцієнта Пуассона:

при $P: 98 \text{ кПа}$ $\nu_{сеп} : 0,39 \text{ } 0,39$;

при $P: 196 \text{ кПа}$ $\nu_{сеп} : 0,39 \text{ } 0,39$;

при $P: 294 \text{ кПа}$ $\nu_{сеп} : 0,38 \text{ } 0,38$;

при $P: 392 \pm 10$ 392 кПа $\nu_{\text{ср}}: 0,39 \pm 0,013$.

Значення коефіцієнта Пуассона в інтервалі відносних деформацій $\Gamma: 0,07 \div 0,09$ становило $\nu: 0,39 \pm 0,013$.

Аналіз результатів експериментальних досліджень дозволяє зробити висновок, що коефіцієнт Пуассона є найбільш стабільним параметром деформування дискретних матеріалів у дограничній стадії.

Осереднене значення ν у вказаних інтервалах навантаження для умов одновісної деформації, де вплив дилатансії практично відсутній, складало $\nu: 0,32 \pm 0,012$. Для умов плоскої деформації $\nu: 0,39 \pm 0,013$.

Це дозволило зробити припущення, що при формулюванні фізичних рівнянь плоскої задачі коефіцієнт Пуассона в першому наближенні можна прийняти як умовно сталу величину. Для піску середньої щільності прийнято $\nu: 0,39$.

Таким чином, для запису фізичних рівнянь плоскої задачі рекомендується експериментально визначати за описаними методиками змінні деформаційні параметри $G_{\text{зм}}$ і ν , а модуль об'ємної

деформації $K_{\text{зм}}$ обчислювати з відомого співвідношення для плоскої деформації $K_{\text{зм}} = 2G_{\text{зм}} \frac{1+\nu}{1-\nu}$.

Висновки

Досліджено залежності величин модуля зсуву G і коефіцієнта Пуассона ν від досягнутого рівня напружено - деформативного стану. Це дає можливість використовувати одержані співвідношення в розв'язанні плоскої фізично нелінійної задачі механіки дискретних матеріалів чисельними методами.

Література

1. Багрій О. В. Вплив внутрішнього кулонового тертя на деформування композитних матеріалів з малою зв'язністю / О. В. Багрій // Проблеми трибології. – 2013. – № 4. – С. 114-119.
2. Ковтун В. В. К вопросу о связи между напряжениями и деформациями в грунтах / В. В. Ковтун // Морские порты. – 1965. – № 1. – С. 69-74.
3. Вялов С. С. Реологические основы механики грунтов / Вялов С. С. – М. : Высшая школа, 1978. – 447 с.
4. Дорофеев О. А. Математична модель взаємодії елементів машин з дискретним середовищем та методи її реалізації : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. тех. наук : спец. 01.05.02 "Математичне моделювання та обчислювальні методи" / О. А. Дорофеев. – Тернопіль, 2004. – 20 с.
5. Боткин А. И. Исследование напряженного состояния в сыпучих и связных грунтах / А. И. Боткин // Известия ВНИИГ. – 1939. – Т. 24. – С. 215-225.
6. Пат. 11675 Україна, МПК (2006) G 01 N 33/24. Спосіб визначення деформаційних параметрів пористих матеріалів за результатами лабораторних випробувань / заявники Ковтун В. В., Багрій О. В. ; власник Хмельн. нац. ун-т. – № u 2005 03929 ; заявл. 25.04.05 ; опубл. 16.01.06, Бюл. № 1. – 3 с.
7. Пат. 18390 Україна, МПК (2006) G 01 N 33/24. Пристрій для лабораторних випробувань пористих матеріалів / заявники Ковтун В. В., Багрій О. В. ; власник Хмельн. нац. ун-т. – № u 2006 03878 ; заявл. 07.04.06 ; опубл. 15.11.06, Бюл. № 11. – 4 с.

Bagriy O.V. Analysis of influence of internal Coulomb friction on the deformation of composite materials.

In work investigated dependence of the values of the shear modulus and Poisson's ratio of the achieved level of the stress-strain state. This makes it possible to use the value obtained in solving planar physically nonlinear problems of the mechanics of discrete materials on numerical methods.

Keywords: the internal friction, approximation, shear modulus, Poisson ratio, module of volumetric deformation.

References

1. Bagriy O. V. Vpliv vnutrishn'ogo kulonovogo tertya na deformuvannya kompozitnih materialiv z maloyu zv'yaznistyu. Problemi tribologii. 2013. N 4. S. 114–119.
2. Kovtun V. V. K voprosu o svyazi mejdu napryajeniyami i deformacijami v gruntah. Morskie porty. 1965. N 1. S. 69–74.
3. Vyalov S. S. Reologicheskie osnovy mehaniki gruntov. – M. : Vysshaya shkola, 1978. 447 s.
4. Dorofeev O. A. Matematichna model' vzaemodii elementiv mashin z diskretnim seredovischem ta metodi ii realizacii : avtoref. dis. na zdobuttya nauk. stupenya kand. teh. nauk : spec. 01.05.02 "Matematichne modelyuvannya ta obchislyval'ni metodi". Ternopil', 2004. 20 s.
5. Botkin A. I. Issledovanie napryajennogo sostoyaniya v sypuchih i svyaznyh gruntah. Izvestiya VNIIG. 1939. T. 24. S.215–225.
6. Pat. 11675 Ukraina, MPK (2006) G 01 N 33/24. Sposib viznachennya deformaciynih parametriv poristih materialiv za rezul'tatami laboratornih viprobuvan'. zayavniki Kovtun V. V., Bagriy O. V. ; vlasnik Hmel'n. nac. un-t. N u 2005 03929 ; zayavl. 25.04.05 ; opubl. 16.01.06, Byul. N 1. 3 s.
7. Pat. 18390 Ukraina, MPK (2006) G 01 N 33/24. Pristriy dlya laboratornih viprobuvan' poristih materialiv. zayavniki Kovtun V. V., Bagriy O. V. ; vlasnik Hmel'n. nac. un-t. N u 2006 03878; zayavl. 07.04.06; opubl. 15.11.06, Byul. N 11. – 4 s.