

## ВИБІР КЛАСУ МЕХАНІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОПИСАННЯ ДЕФОРМУВАННЯ ДИСКРЕТНОГО СЕРЕДОВИЩА

*Розглянуто визначальні співвідношення моделей механіки твердого деформованого тіла, які принципово можуть описати специфічні особливості деформування дискретних матеріалів. Проведений аналіз дозволяє вибрати найбільш перспективний напрямок досліджень щодо побудови моделі дискретного середовища.*

*Ключові слова: дискретне середовище; внутрішнє кулонове тертя; дилатансія.*

V.V. KOVTUN, O.A. DOROFYEV

Khmelnytsky National University

### THE SELECTION OF THE CLASS OF MECHANICAL DEFORMATION MODEL FOR DESCRIPTION OF THE DISCRETE MEDIUM

**Abstract** – To develop a mechanical model of a discrete environment it is necessary to conduct analysis of existing models and choose the most effective line of research. Summarizing the results of experimental and theoretical studies, we can conclude that the mechanical model of a discrete environment necessarily should reflect its effect on the behaviour of two specific interrelated factors: internal Coulomb friction and dilatation. A model of granular environment; limit equilibrium models of loose environment, static models of loose environment are considered in the paper. Also the author describes soil mechanics models, taking into account the effect of internal friction, deformation theory of plasticity model type, dilatation model of plastic flow and others. The analysis of the mechanical models, given in the article, suggests that the most promising way of description of the behaviour of discrete environments under external load is a class of models of soil mechanics of plastic flow.

**Keywords:** discrete environment, internal Coulomb friction; dilatation.

#### Вступ

В останній час увагу фахівців та науковців в області інженерної механіки все більше привертають проблеми взаємодії інженерних конструкцій з дискретним середовищем. В першу чергу це пов'язано з необхідністю розрахунків підпирних стін, дамб, фундаментів споруд, елементів транспортуючих і зберігаючих дискретні матеріали інженерних конструкцій. Для розв'язування цих задач необхідно створити механічні (реологічні) моделі дискретного середовища, які б відображали принципові відмінності законів деформування дискретних матеріалів від класичних твердих тіл.

#### Стан проблеми

Аналіз відомих класичних моделей механіки деформованого твердого тіла показав, що вони не здатні у повній мірі описати поведінку дискретного середовища при взаємодії з елементами механічних систем. Це пов'язано з особливостями структури дискретних матеріалів.

Дискретне середовище являє собою набір твердих частинок, які зв'язані між собою хаотично орієнтованими односторонніми контактами, що передають тільки стискуючі та зсувні зусилля. Деформація середовища відбувається переважно за рахунок взаємних зсувів цих твердих частинок. Оскільки зв'язність середовища відсутня, взаємним зсувам частинок протидіють тільки сили  $T$  сухого тертя у мікроконтактах, які згідно закону Амонтона-Кулона пропорційні притискаючим нормальним зусиллям  $N$ ,  $T = N \cdot f$ . Для середовища з безліччю мікроконтактів це співвідношення трансформується у залежність опору зсуву  $\tau$  від нормальних стискуючих напружень  $\sigma$ ,  $\tau = f(\sigma)$ , яка по-суті, описує вплив внутрішнього кулонового тертя на деформування дискретного середовища.

Взаємний зсув частинок без їх руйнування можливий тільки за рахунок "перестрибування" однієї частинки через іншу. Це в свою чергу призводить до зміни об'єму в області кожного мікроконтакту, а загалом, до виникнення об'ємних деформацій в результаті зсувів частинок.

Залежність об'ємних деформацій від зсувів, що одержала назву "дилатансія", вперше описав О. Reynolds [1].

#### Постановка задачі досліджень

Узагальнюючи результати експериментальних і теоретичних досліджень, можна зробити висновок, що механічна модель дискретного середовища обов'язково повинна відображати вплив на його поведінку двох специфічних взаємопов'язаних факторів: внутрішнього кулонового тертя і дилатансії.

Класичні моделі механіки твердого деформованого тіла не відображають вищевказані особливості деформування дискретних матеріалів. Тому в останній час запропоновані нові "некласичні" моделі, які хоча б частково відображають вплив кулонового тертя та дилатансії на деформування дискретного середовища.

До цих моделей можна віднести: моделі зернистого середовища; моделі граничної рівноваги сипкого середовища; моделі статичного сипкого середовища; моделі механіки ґрунтів, що враховують вплив внутрішнього тертя; моделі теорії пластичності деформаційного типу; дилатансійні моделі пластичного плину та інші.

Для розробки механічної моделі дискретного середовища, що враховує специфічні особливості його деформування, необхідно провести аналіз перерахованих моделей і вибрати найбільш ефективний напрямок

досліджень, що і є метою досліджень в даній статті.

### **Аналіз існуючих моделей**

#### Моделі зернистого середовища

Моделі зернистого середовища ґрунтуються на використанні співвідношення Амонтона-Кулона для сил, що діють у кожному мікроконтакті. Середовище моделюється набором куль, циліндрів чи тіл іншої форми. В залежності від призначення моделі, вибираються особливості контактів, характерний розмір і форма частинок.

Для переходу від одиничних контактів до середовища з безліччю контактів, задаються структурою укладки однорідних чи різнорідних частинок, статистичним розподілом одиничних контактів, іноді ймовірнісними законами розподілу контактних зусиль в масиві дискретного матеріалу.

Для практичного використання таких моделей необхідно з позицій математичної статистики за результатами величезного об'єму експериментальних даних обґрунтувати середньостатистичні розміри частинок, їх форму, умови контактів і передачі зусиль. Це, фактично, унеможливило широке використання вказаних моделей.

Детальний опис моделей зернистих середовищ, що ґрунтується на "мікропідході", наведений у монографії І.І. Кандаурова [2]. Окремі задачі розглянуті в роботах Р.А. Мюлера, Р.Д. Міндліна, Г. Дересевича, В.В. Ковтуна. Слід відмітити, що моделі цього класу є бездеформаційними. Вони частково відображають вплив внутрішнього тертя, але не дозволяють описати прояв дилатансії.

Отже, побудова моделі дискретного середовища шляхом прямого узагальнення взаємодії частинок у мікроконтактах, представляється малоперспективною.

#### Моделі граничної рівноваги сипкого середовища

В моделях цього класу використовується припущення Кулона що сипке середовище це тверде тіло, яке не сприймає розтягуючих напружень.

Єдиними можливими деформаціями середовища є зсув по поверхнях розриву у граничному стані, коли повне зусилля по цих поверхнях відхиляється від нормалі на граничний кут  $\varphi$  (кут тертя), тобто на поверхні розриву реалізується умова Амонтона-Кулона. Після утворення поверхні розриву, розділені нею частини середовища рухаються одна відносно іншої як "абсолютно тверді тіла". Величини критичних зусиль, а потім і напружень, визначають з рівнянь рівноваги розділених об'ємів середовища, які обмежені поверхнею розриву.

Реалізація вказаних припущень вимагає задання характеру поверхні розриву і вирішення питання про однозначність розв'язку задачі.

Розв'язки задач за умови, що поверхня розриву є площина, одержали Кулон, Кульман, Ребхан, Понселе та багато інших науковців. Відомі рішення Г. Рейснера, Г.К. Клейна, С.С. Голушкевича, П.І. Яковлева, котрі вводили комбіновані поверхні розриву (площини та циліндричні поверхні у формі логарифмічних спіралей, парабол і т. і.). Ці рішення іноді спрощували практичні розрахунки, але не мали узагальнення в зв'язку з відсутністю однозначності розв'язку і умовністю прийнятих припущень.

Найбільш повний огляд моделей граничної рівноваги сипкого середовища виконаний Г.К. Клейном [3].

За результатами аналізу можна зробити висновок, що моделі граничної рівноваги сипкого середовища мають ряд принципових недоліків, які не дозволяють використати їх для формулювання сучасної моделі дискретного середовища. Преш за все, це "бездеформаційність" моделей, що не дозволяє описати на їх основі поля напружень, деформацій і переміщень, а, отже, одержати однозначні розв'язки. Крім того, криволінійні та комбіновані поверхні розриву в більшості випадків кінематично не можуть бути поверхнями ковзання.

#### Моделі статички сипкого середовища

Логічним розвитком моделей граничної рівноваги є моделі статички сипкого середовища. Основною відмінністю цього класу моделей від попередніх є припущення, що граничний стан середовища одночасно виникає в кожній його точці, а не тільки на поверхні розриву. Це припущення дозволяє віднести моделі статички сипкого середовища до моделей жорстко-пластичного тіла, в яких умова пластичності Треска - Сен-Венана замінена умовою Амонтона-Кулона.

Як і теорія пластичності, статика сипкого середовища обмежується розв'язуванням задачі плоскої деформації, коли два диференціальних рівняння рівноваги і гранична умова Мора-Кулона утворюють замкнену систему рівнянь відносно напружень  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ . Це дозволяє розглядати плоску граничну задачу як статично визначувану, коли її розв'язок може бути одержаний без залучення деформаційних співвідношень.

Найбільш повне обґрунтування моделі статички сипкого середовища і можливості її використання в інженерній практиці зроблено В.В. Соколовським [4]. Модель Соколовського В.В. може бути використана для оцінки граничного стану дискретного середовища, але не може розглядатись як потенційна модель для описання напружено-деформативного стану дискретного середовища, оскільки для цього необхідно враховувати характерні для деформування дискретного середовища фізичні співвідношення між напруженнями і деформаціями як у дограничному, так і у граничному станах.

#### Моделі механіки ґрунтів деформаційного типу

Після найпростіших моделей жорстко-пластичного тіла логічно продовжити пошук у напрямку більш інформативних деформаційних моделей теорії пластичності. На це вказує В.В. Соколовський [5], який пропонує ввести в систему рівнянь граничної задачі фізичні рівняння "напруження-деформації" сипкого середовища. Аналіз таких моделей показує, що їх визначальні рівняння найчастіше описують вплив на закони деформування тільки внутрішнього кулонового тертя, не враховують формозміни і не відображають прояв дилатансії.

Першою моделлю цього класу вважається модель А.І. Боткіна [6]. Як це прийнято в механіці твердого тіла, модель використовує незалежні закони деформування об'єму і форми. Закон зміни об'єму приймається автором у вигляді найпростішої лінійної залежності Гука між першими інваріантами тензорів напружень і деформацій.

Закон формозміни, на відміну від теорії пластичності металів, враховує вплив середнього стискуючого напруження  $\sigma_0$  і записується у вигляді наступної дробово-лінійної функції

$$\frac{\tau_0}{\sigma_0} = \frac{A\gamma_0}{B + \gamma_0}, \quad (1)$$

де  $\sigma_0$ ,  $\tau_0$ ,  $\gamma_0$  – напруження і деформації по октаедричній площині в координатній системі напруження-деформації;  $A$ ,  $B$  – параметри моделі конкретного дискретного матеріалу. Залежність (1) описує поверхню деформування у формі коноїда (рис. 1, а), яка може бути представлена в координатах (рис. 1, б) сімейством кривих, кожна з яких відповідає сталому значенню  $\sigma_0 = \text{const}$ .

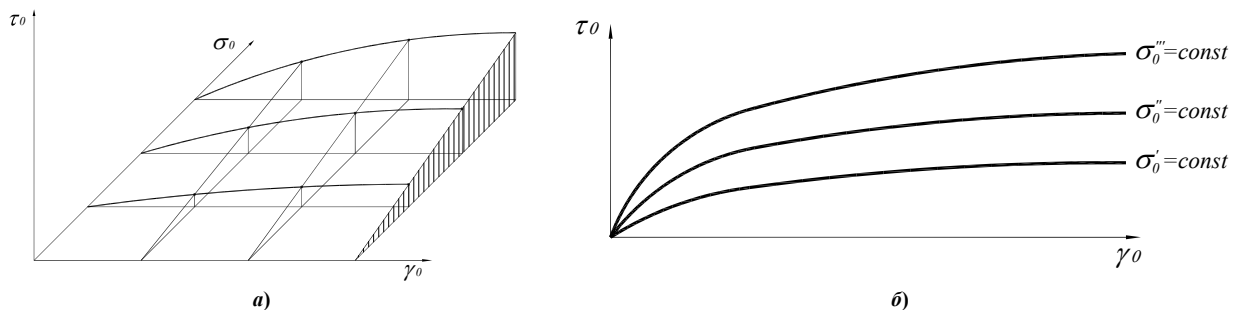


Рис. 1. Графічна інтерпретація залежностей А.І. Боткіна:  
а) поверхня деформування б) зрізи поверхні площинами  $\sigma_0 = \text{const}$

Модель А.І. Боткіна задовільно відображає особливості деформування матеріалів з суттєвим внутрішнім тертям, до яких належать дискретні матеріали, але не враховує прояв дилатансії. Крім того, їй притаманні недоліки усіх моделей теорії пластичності деформаційного типу, а саме, – фізичні рівняння зв'язують напруження з досягнутими (кінцевими) деформаціями, що не дозволяє описати вплив послідовності навантаження, оскільки одним і тим самим напруженням, в залежності від "шляху" навантаження можуть відповідати різні кінцеві деформації.

До моделей механіки ґрунтів деформаційного типу належить модель, розроблена Ф.М. Шихієвим для плоскої деформації [7]. Закон зміни об'єму приймається у вигляді запропонованого автором принцип еквівалентних моделей, який також не враховує вплив дилатансії.

Закон формозміни формулюється як співвідношення "напруження-деформації" по потенціальним площинкам. Ці площинки у граничному стані стають фактичними площинками ковзання

$$\text{tg} \rho = \frac{\tau_\alpha}{\sigma_\alpha} = \text{tg} \varphi \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\text{гр}}}, \quad (2)$$

де  $\rho$  – максимальний кут відхилення повного напруження від нормалі;  $\varphi$  – кут внутрішнього тертя (граничне значення кута  $\rho$ );  $\gamma_\alpha$ ,  $\gamma_{\text{гр}}$  – деформації по площинкам зсуву в дограничному та граничному станах.

Фізичні рівняння моделі Ф.М. Шихієва сформульовані не в інваріантній формі, що суттєво ускладнює розв'язання граничної задачі. Система рівнянь рівноваги, геометричних та фізичних рівнянь зведена автором до нелінійного диференціального рівняння четвертого порядку, ефективних методів розв'язання якого не запропоновано.

Аналогічні моделі механіки ґрунтів пропонували Г.А. Генієв, Ю.К. Зарецький, В.Г. Столяров та багато інших дослідників.

Звертає на себе увагу, що фізичні співвідношення моделей механіки ґрунтів зв'язують між собою не напруження з деформаціями, а відношення дотичних і нормальних напружень до деформацій по площинкам зсуву, що відображає вплив внутрішнього кулонового тертя не тільки в граничній, але й у дограничній стадії деформування. Моделі не описують ефект дилатансії.

Частково прояв дилатансії, але тільки в умовах плоскої задачі, описує модель, запропонована

О.В. Багрій та В.В. Ковтуном [8]. Фізичні співвідношення моделі пов'язують закони деформування об'єму і форми дискретних матеріалів, а для практичних розрахунків з використанням моделі запропоновані лабораторні прилади, які дозволяють визначити необхідні для розрахунків параметри моделі.

Отже, моделі механіки ґрунтів деформаційного типу можуть відтворити вплив внутрішнього тертя на деформування дискретного матеріалу, але не враховують прояв дилатансії. Тому вони не в повній мірі відображають специфічні особливості деформування дискретних матеріалів. Крім того, деформаційні моделі не відтворюють послідовність навантаження – можливу появу залишкових деформацій.

#### Моделі механіки ґрунтів пластичного плину

В теорії пластичності крім моделей деформаційного типу існує клас моделей пластичного плину, фізичні співвідношення яких формулюються як залежності між напруженнями і швидкостями деформацій, а не між напруженнями і досягнутими деформаціями. Аналогічні моделі запропоновані в механіці ґрунтів. Ці моделі принципово спроможні врахувати усі особливості деформування дискретного середовища. Вплив внутрішнього тертя на деформування дискретних матеріалів в моделях механіки ґрунтів на відміну від класичних моделей теорії пластичності відображається тим, що їх фізичні співвідношення записуються у формі залежностей між відношенням напружень  $\tau/\sigma$  і швидкостей деформацій  $\{d\varepsilon\}$ , а не просто між дотичними напруженнями  $\tau$  і деформаціями зсуву  $\gamma$ .

Для визначення швидкостей приросту пластичних деформацій  $\{d\varepsilon\}$  в теорії пластичності використовують потенціальну функцію  $\Phi(\{\sigma\})$  [9]

$$d\{\varepsilon\} = d\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}},$$

де  $d\lambda$  – множник Лагранжа.

Якщо за потенціальну функцію приймається умова настання граничного стану  $f(\{\sigma\})$ , одержані визначальні співвідношення будуть відповідати асоційованому закону пластичного плину, усі інші – неасоційованим законам.

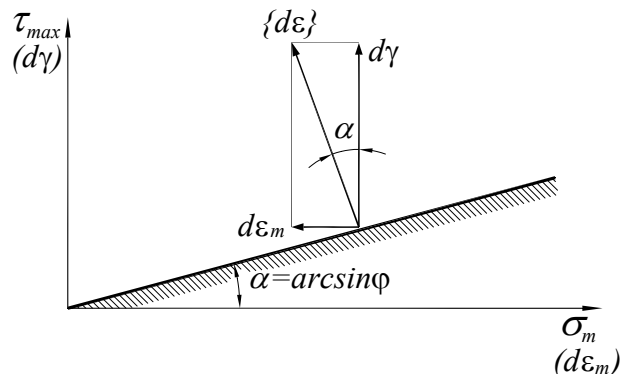


Рис. 2. Граничне співвідношення максимального дотичного напруження  $\tau_{\max}$  до середнього нормального напруження  $\sigma_m$

Першу модель, асоційовану з умовою Мора-Кулона, запропонували Друккер та Прагер [10].

За потенціальну функцію  $\Phi(\{\sigma\})$  в моделі прийняте граничне співвідношення максимального дотичного напруження  $\tau_{\max}$  до середнього нормального напруження  $\sigma_m$ , яке в площині інваріантів напружень  $\tau_{\max} - \sigma_m$  зображується прямою (рис. 2).

Враховуючи, що вектор швидкостей деформацій  $\{d\varepsilon\}$  є перпендикулярним граничній поверхні Кулона, автори моделі встановили зв'язок між відношенням швидкостей об'ємної деформації  $d\varepsilon_m$  та деформації зсувів  $d\gamma$  і відношенням відповідних напружень

$$\lambda = \frac{d\varepsilon_m}{d\gamma} = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_m} = \sin \varphi. \quad (3)$$

Відношення (3) одержало назву швидкість дилатансії і повністю відображає дві особливості деформування дискретних матеріалів: вплив кулонового тертя та прояв дилатансії.

Однак, експериментальна перевірка моделі виявила, що теоретична величина швидкості дилатансії  $\lambda$  значно перевищує визначену експериментально. В дослідях А.С. Строганова швидкість дилатансії щільного піску була  $\lambda = 0,239$  ( $\sin 14^\circ$ ), в дослідях Р. Роскоє і С. Фрідмана величина  $\lambda$  змінювалась від

$\lambda = 0,1$  до  $\lambda = 0,35$ .

Вказані неспівпадіння спонукали появу широкого класу моделей механіки ґрунтів пластичного плинину, визначальні співвідношення яких задаються довільно і не асоціюються з умовою граничного стану.

Такі моделі пропонували Ю.Н. Работнов, В.М. Ніколаєвський, А. Sawczuk, Р. Stytz, А.С. Строганов, М.В. Малишев, Ю.К. Зарецький та десятки інших науковців.

Вибір потенціальної функції  $\Phi(\{\sigma\})$  неасоційованих моделей без фундаментального обґрунтування іноді призводить до суттєвих розбіжностей теоретичних і експериментальних даних, що пояснюється порушенням принципу збереження енергії.

Частково вказані розбіжності ліквідуються шляхом введення досить складних співвідношень "комбінованих" моделей пластичного плинину, багатопверхневих або моделей критичного стану.

В інженерній механіці найбільш відомі моделі критичного стану (МКС), запропоновані групою науковців Кембриджського університету під керівництвом К. Roscoe [11].

Для описання поведінки дискретного матеріалу розроблена модель "Гранта-Гравел". Згідно з припущенням цієї моделі середовище деформується тільки після досягнення граничного стану. До цього моменту середовище не деформується. Тобто, модель описує граничний та позаграничний стани середовища, тому вона не може розглядатись як базова модель дискретного середовища.

Характерною особливістю усіх моделей механіки ґрунтів пластичного плинину є те, що їх потенціальні функції зв'язують відношення напружень з відношенням швидкостей об'ємних та зсувних деформацій. Це дозволяє відобразити вплив на деформування середовища як внутрішнього тертя, так і дилатансії.

### Висновки

Аналіз розглянутих у статті механічних моделей дозволяє стверджувати, що найбільш перспективним для описання поведінки дискретного середовища під дією зовнішнього навантаження є клас моделей механіки ґрунтів пластичного плинину. Визначальні співвідношення моделей цього класу здатні описати принципові відмінності деформування дискретних матеріалів від класичних – прояв внутрішнього тертя і дилатансії, а також враховувати "історію" навантаження непружного дискретного середовища.

### Література

1. Reynolds O. Experiments showing dilatancy, a property of granular material. Proc. Roy inst. 2, 1886, P. 354-363.
2. Кандауров И.И. Механика зернистых сред и её применение в строительстве / Кандауров И.И. –Л., М.: Стройиздат, 1966. – 319 с.
3. Клейн Г.К. Строительная механика сыпучих тел. – М.: Госстройиздат, 1956. – 256 с.
4. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды / Соколовский В.В. – М.: Наука, 1960. – 272 с.
5. Соколовский В.В. Теория пластичности / Соколовский В.В. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.
6. Боткин А.И. Исследование напряженного состояния в сыпучих и связных грунтах. – Известия ВНИИГ, т. 24. – Л. 1939, С. 215-225.
7. Шихиев В.М. Кинематическая теория давления грунтов на причальные сооружения и другие типы жестких и гибких ограждений. – Автореф. дис... д-ра техн. наук. – Одесса, 1965.
8. Багрій О.В. Плоска задача механіки дискретного середовища / О.В. Багрій, В.В. Ковтун // Вісник ХНУ. –Технічні науки. – 2012. – №3. С 24-29.
9. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т. 2. – М.: Наука, 1970. – 578 с.
10. Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design, – Quarterly of Applied Mathematics, 10, №2, P. 157-165 (1952).
11. Roscoe K.H. The influence of strains in soil mechanics. – Geotechnique, 1970, 20, №2, P. 129-170.

### References

1. Reynolds O. Experiments showing dilatancy, a property of granular material. Proc. Roy inst. 2, 1886, P. 354-363.
2. Kandaurov I.I. Mehanika zernistyih sred i eYo primeneniye v stroitelstve / Kandaurov I.I. – Leningrad, Moscow: Stroyizdat, 1966. – 319 p.
3. Kleyn G.K. Stroitel'naya mehanika syipuchih tel. – Moscow: Gosstroyizdat, 1956. – 256 p.
4. Sokolovskiy V.V. Statika syipuchey sredy / Sokolovskiy V.V. – Moscow: Nauka, 1960. – 272 p.
5. Sokolovskiy V.V. Teoriya plastichnosti / Sokolovskiy V.V. – Moscow: Vyisshaya shkola, 1969. – 608 p.
6. Botkin A.I. Issledovanie napryazhennogo sostoyaniya v syipuchih i svyaznyih gruntah. – Izvestiya VNIIG, t. 24. – Leningrad. 1939, 215-225 pp.
7. Shihiev V.M. Kinematicheskaya teoriya davleniya gruntov na prichalnyie sooruzheniya i drugie tipy zhestkih i gibkih ograzhdeniy. – Avtoref. dis... d-ra tehn. nauk. – Odessa, 1965.
8. Bagrly O.V. Ploska zadacha mehaniki diskretnogo seredovischa / O.V. Bagrly, V.V. Kovtun // VIsnik HNU. –TehnIchni nauki. – 2012. – No 3. 24-29 pp.
9. Sedov L.I. Mehanika sploshnoy sredy, t. 2. – Moscow: Nauka, 1970. – 578 pp.
10. Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design, – Quarterly of Applied Mathematics, 10, №2, P. 157-165 (1952).
11. Roscoe K.H. The influence of strains in soil mechanics. – Geotechnique, 1970, 20, №2, P. 129-170.