

СКІНЧЕННІ ГІБРИДНІ ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ГАНКЕЛЯ 2-ГО РОДУ-ФУР'Є-БЕССЕЛЯ-...-ФУР'Є-БЕССЕЛЯ ІЗ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ

В роботі запроваджено скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені на сегменті $[R_0, R]$ з $2n$ точками спряження гібридним диференціальним оператором Бесселя-Фур'є-Бесселя - ...-Фур'є-Бесселя в припущенні, що спектральний параметр також бере участь в крайових умовах та умовах спряження.

In this work the finite hybrid integral transformations generated on a segment $[R_0, R]$ with $2n$ point of hybrid differential operator Bessel-Fourier-Bessel-...-Fourier-Bessel in supposition, that spectral takes parameters the participation in regional terms and in the conditions of interface.

Скінченні інтегральні перетворення, породжені на сегменті $(0, l)$ з n точками спряження диференціальним оператором Фур'є d^2/dr^2 , наведено в роботі [1]. Скінченні інтегральні перетворення, породжені на сегментах $(0, R)$ та (R_0, R) з n точками спряження диференціальним оператором Бесселя

$$B_{\nu_j, \alpha_j} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha_j + 1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\nu_j^2 - \alpha_j^2}{r^2},$$

$$\nu_j \geq \alpha_j \geq -\frac{1}{2}, \quad j = \overline{1, n+1},$$

наведено в роботі [2]. Скінченні інтегральні перетворення, породжені на сегменті $[R_0, R]$ з $2n$ точками спряження чергуванням операторів B_{ν_j, α_j} та d^2/dr^2 , починаючи з диференціального оператора Бесселя B_{ν_1, α_1} й завершуючи диференціальним оператором Бесселя $B_{\nu_{n+1}, \alpha_{n+1}}$ анонсовано в роботі [3]. Такі інтегральні перетворення успішно були застосовані для знаходження інтегрального зображення розв'язку відповідних задач статички, квазістатички та динаміки при умові, що крайові межі й межі спряження є жорсткими по відношенню до відбиття хвиль. В протилежному випадку в крайових операторах й операторах спряження з'являються оператор $\partial/\partial t$ в задачах квазістатички та оператор $\partial^2/\partial t^2$ в задачах динаміки. Для розв'язання таких задач, як правило, засто-

совувався метод інтегрального перетворення Лапласа. Це приводило до крайової задачі на кусково-однорідному сегменті для сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку з відповідними крайовими умовами та умовами спряження, залежними від комплексного параметру перетворення Лапласа. Маємо дві нелегкі задачі: розв'язання крайової задачі в зображеннях за Лапласом й знаходження оригіналу одержаного розв'язку. Виявляється, що можна отримати скінченні інтегральні перетворення із спектральним параметром, які спрацьовують для задач з м'якими межами за такою ж логічною схемою, як інтегральні перетворення без спектрального параметра в задачах з жорсткими межами. Побудові одного класу таких гібридних скінченних інтегральних перетворень присвячується дана робота.

Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$I_{2n} = \left\{ r : r \in \bigcup_{k=1}^{2n+1} (R_{k-1}, R_k); R_0 > 0, \right.$$

$$\left. R_{2n+1} \equiv R < \infty \right\}$$

ненульового розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Бессе-

ля та Фур'є

$$(B_{\nu_{k+1}, \alpha_{k+1}} + q_{2k+1}^2)u_{2k+1}(r) = 0, \\ r \in (R_{2k}, R_{2k+1}), k = \overline{0, n} \\ (d^2/dr^2 + q_{2k}^2)u_{2k}(r) = 0, r \in (R_{2k-1}, R_{2k}), \\ k = \overline{1, n} \quad (1)$$

за крайовими умовами

$$(\tilde{\alpha}_{11}^0 d/dr + \tilde{\beta}_{11}^0)u_1 \Big|_{r=R_0} = 0, \\ (\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1} d/dr + \tilde{\beta}_{22}^{2n+1})u_{2n+1} \Big|_{r=R_{2n+1}} = 0 \quad (2)$$

та умовами спряження

$$\left[(\tilde{\alpha}_{j1}^k d/dr + \tilde{\beta}_{j1}^k)u_k - (\tilde{\alpha}_{j2}^k d/dr + \tilde{\beta}_{j2}^k)u_{k+1} \right] \Big|_{r=R_k} = \\ = 0, \quad j = 1, 2; k = \overline{1, 2n}. \quad (3)$$

У рівностях (1) – (3) $q_k^2 = a_k^{-1}(\lambda^2 + \gamma_k^2)$, $a_k > 0$, $\gamma_k \geq 0$, $\lambda \in (0, \infty)$, $\tilde{\alpha}_{mj}^k = \alpha_{mj}^k - \delta_{mj}^k(\lambda^2 + \gamma^2)$, $\tilde{\beta}_{mj}^k = \beta_{mj}^k - \gamma_{mj}^k(\lambda^2 + \gamma^2)$, $\gamma^2 \geq 0$, $c_{11,k} \cdot c_{21,k} > 0$, $c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$, $c_{j2,k} = \delta_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k \gamma_{2j}^k = 0$. При цьому ми припускаємо, що $|\tilde{\alpha}_{11}^0| + |\tilde{\beta}_{11}^0| \neq 0$, $|\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1}| + |\tilde{\beta}_{22}^{2n+1}| \neq 0$, $C_{21,22}^{21,k} = C_{21,22}^{12,k}$, $C_{11,12}^{21,k} = C_{11,12}^{12,k}$, де $C_{ij,mn}^{i_1 j_1, k}$ – визначники 2-го порядку, перший стовпець яких є i_1 стовпець матриці $A_{ij,k}$, а другий стовпець є j_1 стовпець матриці $A_{mn,k}$:

$$A_{j1,k} = \begin{bmatrix} \alpha_{1j}^k & \beta_{1j}^k \\ \alpha_{2j}^k & \beta_{2j}^k \end{bmatrix}, A_{j2,k} = \begin{bmatrix} \delta_{1j}^k & \gamma_{1j}^k \\ \delta_{2j}^k & \gamma_{2j}^k \end{bmatrix}.$$

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння $(d^2/dr^2 + q^2)v = 0$ утворюють функції $\cos qr$ та $\sin qr$ [4], а фундаментальну систему розв'язків для рівняння $(B_{\nu,\alpha} + q^2)v = 0$ утворюють функції $J_{\nu,\alpha}(qr) = (qr)^{-\alpha} J_{\nu}(qr)$ та $N_{\nu,\alpha}(qr) = (qr)^{-\alpha} N_{\nu}(qr)$, $J_{\nu}(x)$ та $N_{\nu}(x)$ – функції Бесселя відповідно першого та другого роду порядку ν [5].

Визначимо величини та функції:

$$\sigma_{2k} = \frac{1}{a_{2k}^2} \prod_{s=2k}^{2n} \frac{c_{11,s}}{c_{21,s}} \prod_{s=k}^{n-1} \left(\frac{R_{2s}}{R_{2s+1}} \right)^{2\alpha_{s+1}+1} \times \\ \times (R_{2n})^{2\alpha_{n+1}+1}; \quad k = \overline{1, n}, \sigma_{2n+1} = \frac{1}{a_{2n+1}^2},$$

$$\sigma_{2k+1} = \frac{1}{a_{2k+1}^2} \prod_{s=2k+1}^{2n} \frac{c_{11,s}}{c_{21,s}} R_{2k+1}^{-(2\alpha_{k+1}+1)} \times \\ \times \prod_{s=k+1}^{n-1} \left(\frac{R_{2s}}{R_{2s+1}} \right)^{2\alpha_{s+1}+1} R_{2n}^{2\alpha_{n+1}+1}; \quad k = \overline{0, n-1} \\ v_{ij}^{k1}(q_s R_k) = -\tilde{\alpha}_{ij}^k q_s \sin q_s R_k + \tilde{\beta}_{ij}^k \cos q_s R_k, \\ v_{ij}^{k2}(q_s R_k) = \tilde{\alpha}_{ij}^k q_s \cos q_s R_k + \tilde{\beta}_{ij}^k \sin q_s R_k, \\ \varphi_{km}^j(q_s R_j, q_s x) = v_{km}^{j2}(q_s R_j) \cos q_s x - \\ - v_{km}^{j1}(q_s R_j) \sin q_s x; \\ u_{\nu,\alpha;ij}^{k1}(q_s R_k) = \left(\tilde{\alpha}_{ij}^k \frac{\nu - \alpha}{R_k} + \tilde{\beta}_{ij}^k \right) J_{\nu,\alpha}(q_s R_k) - \\ - \tilde{\alpha}_{ij}^k q_s^2 R_k J_{\nu+1,\alpha+1}(q_s R_k), \\ u_{\nu,\alpha;ij}^{k2}(q_s R_k) = \left(\tilde{\alpha}_{ij}^k \frac{\nu - \alpha}{R_k} + \tilde{\beta}_{ij}^k \right) N_{\nu,\alpha}(q_s R_k) - \\ - \tilde{\alpha}_{ij}^k q_s^2 R_k N_{\nu+1,\alpha+1}(q_s R_k), \\ \Psi_{\nu,\alpha;km}^j(q_s R_j, q_s x) = u_{\nu,\alpha;km}^{j1}(q_s R_j) N_{\nu,\alpha}(q_s x) - \\ - u_{\nu,\alpha;km}^{j2}(q_s R_j) J_{\nu,\alpha}(q_s x).$$

Обмежений на множині I_{2n} розв'язок крайової задачі (1) – (3) шукаємо за правилами [4]

$$u_{2k+1} = A_{2k+1} J_{\nu_{k+1}, \alpha_{k+1}}(q_{2k+1} r) + \\ + B_{2k+1} N_{\nu_{k+1}, \alpha_{k+1}}(q_{2k+1} r), \quad k = \overline{0, n}, \quad (4) \\ u_{2k} = A_{2k} \cos q_{2k} r + B_{2k} \sin q_{2k} r, \quad k = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Крайові умови (2) та умови спряження (3) для визначення величин A_i та B_i ($i = \overline{1, 2n+1}$) дають алгебраїчну систему з $(4n+2)$ -ох рівнянь:

$$u_{\nu_1, \alpha_1; 11}^{01}(q_1 R_0) A_1 + u_{\nu_1, \alpha_1; 11}^{02}(q_1 R_0) B_1 = 0, \\ u_{\nu_k, \alpha_k; j1}^{2k-1,1}(q_{2k-1} R_{2k-1}) A_{2k-1} + \\ + u_{\nu_k, \alpha_k; j1}^{2k-1,2}(q_{2k-1} R_{2k-1}) B_{2k-1} - \\ - v_{j2}^{2k-1,1}(q_{2k} R_{2k-1}) A_{2k} - v_{j2}^{2k-1,2}(q_{2k} R_{2k-1}) B_{2k} = \\ = 0; \quad j = 1, 2; k = \overline{1, n}, \quad (6) \\ v_{j1}^{2k,1}(q_{2k} R_{2k}) A_{2k} + v_{j1}^{2k,2}(q_{2k} R_{2k}) B_{2k} -$$

$$\begin{aligned}
& -u_{\nu_{k+1}, \alpha_{k+1}; j2}^{2k,1} (q_{2k+1} R_{2k}) A_{2k+1} - \\
& -u_{\nu_{k+1}, \alpha_{k+1}; j2}^{2k,2} (q_{2k+1} R_{2k}) B_{2k+1} = \\
& = 0; j = 1, 2; k = \overline{1, n},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u_{\nu_{n+1}, \alpha_{n+1}; 22}^{2n+1,1} (q_{2n+1} R_{2n+1}) A_{2n+1} + \\
& + u_{\nu_{n+1}, \alpha_{n+1}; 22}^{2n+1,2} (q_{2n+1} R_{2n+1}) B_{2n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Позначимо через $\Delta_{(\nu, \alpha)}(\lambda)$ визначник алгебраїчної системи (6). Для того, щоб алгебраїчна система (6) мала нульовий розв'язок, необхідно й досить, щоб

$$\Delta_{(\nu, \alpha)}(\lambda) = 0, \quad (7)$$

$$(\nu, \alpha) = (\nu_1 \alpha_1; \nu_2 \alpha_2; \dots; \nu_{n+1} \alpha_{n+1}).$$

Підставимо корінь $\lambda = \lambda_n$ в систему (6) й відкинемо останнє рівняння в силу лінійної залежності. Можна покласти $A_1 = -u_{\nu_1, \alpha_1; 11}^{02} (q_{1n} R_0) A_0$, $B_1 = u_{\nu_1, \alpha_1; 11}^{01} (q_{1n} R_0) A_0$, де $q_{jn} = (\lambda_n^2 + \gamma^2)^{1/2} a_j^{-1}$. Тоді перша компонента власної функції буде визначена з точністю до сталої:

$$\begin{aligned}
V_{(\nu, \alpha); 1}(r, \lambda_n) = & A_0 [u_{\nu_1, \alpha_1; 11}^{01} (q_{1n} R_0) N_{\nu_1, \alpha_1} (q_{1n} r) - \\
& - u_{\nu_1, \alpha_1; 11}^{02} (q_{1n} R_0) J_{\nu_1, \alpha_1} (q_{1n} r)].
\end{aligned}$$

Решта рівнянь, розпавшись на групи, дають можливість отримати рекурентні співвідношення для визначення величин A_j та B_j . В результаті підстановки отриманих значень A_j та B_j в формули (4), (5) маємо структуру елементів $V_{(\nu, \alpha); j}(r, \lambda_n)$ вектор-функції $V_{(\nu, \alpha)}(r, \lambda_n) = \{V_{(\nu, \alpha); 1}(r, \lambda_n); V_{(\nu, \alpha); 2}(r, \lambda_n); \dots; V_{(\nu, \alpha); 2n}(r, \lambda_n); V_{(\nu, \alpha); 2n+1}(r, \lambda_n)\}$:

$$\begin{aligned}
V_{(\nu, \alpha); 1}(r, \lambda_n) = & \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \prod_{s=1}^{2n} c_{21, s} \prod_{s=2}^{2n+1} q_{sn} \times \\
& \times \prod_{s=1}^n (q_{2s+1, n} R_{2s})^{-(2\alpha_{s+1}+1)} \Psi_{\nu_1, \alpha_1; 11}^0 (q_{1n} R_0, q_{1n} r), \\
V_{(\nu, \alpha); 2k}(r, \lambda_n) = & \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-k+1} \prod_{s=2k}^{2n} c_{21, s} \prod_{s=2k+1}^{2n+1} q_{sn} \times \\
& \times \prod_{s=k}^n (q_{2s+1, n} R_{2s})^{-(2\alpha_{s+1}+1)} [B_{(\overline{1, 4k-2}); (\overline{1, 4k-2})} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \varphi_{22}^{2k-1} (q_{2k, n} R_{2k-1}, q_{2k, n} r) - \\
& - B_{(\overline{1, 4k-3}); (4k-1); (\overline{1, 4k-2})} \times \\
& \times \varphi_{12}^{2k-1} (q_{2k, n} R_{2k-1}, q_{2k, n} r)], \quad k = \overline{1, n}; \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{(\nu, \alpha); 2k+1}(r, \lambda_n) = & \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-k} \prod_{s=2k+1}^{2n} c_{21, s} \prod_{s=2k+2}^{2n+1} q_{sn} \times \\
& \times \prod_{s=k+1}^n (q_{2s+1, n} R_{2s})^{-(2\alpha_{s+1}+1)} [B_{(\overline{1, 4k-1}); (4k+1); (\overline{1, 4k})} \times \\
& \times \Psi_{\nu_{k+1}, \alpha_{k+1}; 12}^{2k} (q_{2k+1, n} R_{2k}, q_{2k+1, n} r) - \\
& - B_{(\overline{1, 4k}); (\overline{1, 4k})} \times \\
& \times \Psi_{\nu_{k+1}, \alpha_{k+1}; 22}^{2k} (q_{2k+1, n} R_{2k}, q_{2k+1, n} r)].
\end{aligned}$$

У формулах (8) беруть участь визначники $B_{(\overline{1, j}); (\overline{1, j})}$ та $B_{(\overline{1, j-1}); (j+1); (\overline{1, j})}$ квадратної матриці розміру $(4n+2) \times (4n+2)$ алгебраїчної системи (6), тобто матриці A_{4n+2}^{4n+2} , елементи якої є коефіцієнтами невідомих A_j та B_j в системі (6). При цьому індекс $(\overline{1, j}); (\overline{1, j})$ вказує, що в утворенні даного визначника беруть участь рядки з номерами від 1 до j та стовпці з номерами від 1 до j , а індекс $(\overline{1, j-1}); (j+1); (\overline{1, j})$ вказує, що j -ий рядок замінюється $(j+1)$ -им, а стовпці беруться з номерами від 1 до j .

За допомогою одиничної функції Гевісайда $\theta(r)$ побудуємо вагову функцію

$$\begin{aligned}
\sigma(r) = & \sum_{k=0}^n r^{2\alpha_{k+1}+1} \sigma_{2k+1} \theta(R_{2k+1} - r) \theta(r - R_{2k}) + \\
& + \sum_{k=1}^n \sigma_{2k} \theta(R_{2k} - r) \theta(r - R_{2k-1}) \quad (9)
\end{aligned}$$

та спектральну функцію

$$\begin{aligned}
V_{(\nu, \alpha)}(r, \beta_n) = & \sum_{j=1}^{2n+1} V_{(\nu, \alpha); j}(r, \lambda_n) \theta(R_j - r) \times \\
& \times \theta(r - R_{j-1}). \quad (10)
\end{aligned}$$

Згідно з роботою [6] маємо твердження.

Теорема 1 (про дискретний спектр). Корені λ_n трансцендентного рівняння (7) складають дискретний спектр: дійсні, різні (за винятком, можливо, нуля), симетричні відносно точки $\lambda = 0$, на додатний

піввісі $\lambda > 0$ утворюють монотонно зростаючу послідовність з єдиною точкою згущення $\lambda = \infty$.

Теорема 2 (про дискретну функцію). Система власних вектор-функцій $\{V_{(\nu,\alpha)}(r, \lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна з ваговою функцією $\sigma(r)$, повна та замкнута на множині I_{2n} .

Теорема 3 (типу теореми Стеклова). Якщо вектор-функція $f(r) = \{f_1(r); f_2(r); \dots; f_{2n}(r); f_{2n+1}(r)\}$ неперервна разом з похідними до 3-го порядку включно, а функції $f_j(r)$ задовольняють крайові умови (2) та умови спряження (3), то ряд Фур'є

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_0}^R f(\rho) V_{(\nu,\alpha)}(\rho, \lambda_n) \sigma(\rho) d\rho \times \frac{V_{(\nu,\alpha)}(r, \lambda_n)}{\|V_{(\nu,\alpha)}(r, \lambda_n)\|_1^2} \quad (11)$$

за системою власних вектор-функцій $\{V_{(\nu,\alpha)}(r, \lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ збігається на множині I_{2n} абсолютно й рівномірно.

У рівності (11) $\|V_{(\nu,\alpha)}(r, \lambda_n)\|_1$ – узагальнена норма власної функції [6], а

$$\int_{R_0}^R f(r) V_{(\nu,\alpha)}(r, \lambda_n) \sigma(r) dr = \sum_{k=0}^n \int_{R_{2k}}^{R_{2k+1}} f_{2k+1}(r) V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r, \lambda_n) r^{2\alpha_{k+1}+1} \times \sigma_{2k+1} dr + \sum_{k=1}^n \int_{R_{2k-1}}^{R_{2k}} f_{2k}(r) V_{(\nu,\alpha);2k}(r, \lambda_n) \sigma_{2k} dr. \quad (12)$$

Ряд Фур'є (11) визначає пряме H_{2n} та обернене H_{2n}^{-1} скінченне гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_{2n} гібридним диференціальним оператором

$$\mathcal{L}_{(\nu,\alpha)} = \sum_{k=0}^n \theta(r - R_{2k}) \theta(R_{2k+1} - r) a_{2k+1}^2 \times \times B_{\nu_{k+1}, \alpha_{k+1}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \theta(r - R_{2k-1}) \theta(R_{2k} - r) a_{2k}^2 d^2/dr^2 : \quad (13)$$

$$H_{2n}[f(r)] =$$

$$= \int_{R_0}^{R_{2n+1}} f(r) V_{(\nu,\alpha)}(r, \lambda_n) \sigma(r) dr \equiv \tilde{f}_n, \quad (14)$$

$$H_{2n}^{-1}[\tilde{f}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n V_{(\nu,\alpha)}(r, \lambda_n) \times \times (\|V_{(\nu,\alpha)}(r, \lambda_n)\|_1^2)^{-1} \equiv f(r). \quad (15)$$

В основі побудови алгебри гібридного диференціального оператора $\mathcal{L}_{(\nu,\alpha)}$ лежить основна тотожність.

Теорема 4 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція

$$g(r) = \{B_{\nu_1, \alpha_1}[f_1(r)]; f_2''(r); B_{\nu_2, \alpha_2}[f_3(r)]; f_4''(r); \dots; f_{2n}''(r); B_{\nu_{n+1}, \alpha_{n+1}}[f_{2n+1}(r)]\}$$

неперервна на множині I_{2n} , а функції $f_j(r)$ задовольняють крайові умови (2) та умови спряження (3), то справджується основна тотожність інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора $\mathcal{L}_{(\nu,\alpha)}$:

$$H_{2n}[\mathcal{L}_{(\nu,\alpha)}[f(r)]] = -\lambda_n^2 \tilde{f}_n - \sum_{k=0}^n \gamma_{2k+1}^2 \times \times \int_{R_{2k}}^{R_{2k+1}} f_{2k+1}(r) V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r, \lambda_n) r^{2\alpha_{k+1}+1} \sigma_{2k+1} dr - \sum_{k=1}^n \gamma_{2k}^2 \int_{R_{2k-1}}^{R_{2k}} f_{2k}(r) V_{(\nu,\alpha);2k}(r, \lambda_n) \sigma_{2k} dr - -(\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1} V_{(\nu,\alpha);1}(R_0, \lambda_n) a_1^2 \sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1} [(\tilde{\alpha}_{11}^0 d/dr + \tilde{\beta}_{11}^0) f_1(r)] \Big|_{r=R_0} + (\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1})^{-1} \times \times V_{(\nu,\alpha);2n+1}(R_{2n+1}, \lambda_n) a_{2n+1}^2 \sigma_{2n+1} R_{2n+1}^{2\alpha_{n+1}+1} \times \times [(\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1} d/dr + \tilde{\beta}_{22}^{2n+1}) f_{2n+1}(r)] \Big|_{r=R_{2n+1}}. \quad (16)$$

Доведення. За означенням згідно формул (13), (14) маємо:

$$H_{2n}[\mathcal{L}_{(\nu,\alpha)}[f(r)]] = \sum_{k=1}^n \int_{R_{2k-1}}^{R_{2k}} a_{2k}^2 \frac{d^2 f_k}{dr^2} \times \\ \times V_{(\nu,\alpha);2k}(r, \lambda_n) \sigma_{2k} dr + \sum_{k=0}^n \int_{R_{2k}}^{R_{2k+1}} a_{2k+1}^2 \times \\ \times B_{\nu_{k+1}, \alpha_{k+1}} [f_{2k+1}(r)] V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r, \lambda_n) \sigma_{2k+1} \times \\ \times r^{2\alpha_{k+1}+1} dr. \quad (17)$$

Проінтегруємо в (17) під знаком інтегралів частинами два рази:

$$H_{2n}[\mathcal{L}_{(\nu,\alpha)}[f(r)]] = \sum_{k=1}^n \left\{ a_{2k}^2 \sigma_{2k} \left(\frac{df_{2k}}{dr} \times \right. \right. \\ \times V_{(\nu,\alpha);2k}(r, \lambda_n) - f_{2k}(r) \frac{dV_{(\nu,\alpha);2k}(r, \lambda_n)}{dr} \Bigg|_{R_{2k-1}}^{R_{2k}} + \\ \left. \left. + \int_{R_{2k-1}}^{R_{2k}} f_{2k}(r) \left[a_{2k}^2 \frac{d^2}{dr^2} V_{(\nu,\alpha);2k}(r, \lambda_n) \right] \sigma_{2k} dr \right\} + \\ + \sum_{k=0}^n \left\{ a_{2k+1}^2 \sigma_{2k+1} \left[r^{2\alpha_{k+1}+1} \left(\frac{df_{2k+1}(r)}{dr} \times \right. \right. \right. \\ \times V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r, \lambda_n) - f_{2k+1}(r) \times \\ \times \frac{dV_{(\nu,\alpha);2k+1}(r, \lambda_n)}{dr} \Bigg|_{R_{2k}}^{R_{2k+1}} + \int_{R_{2k}}^{R_{2k+1}} f_{2k+1}(r) \times \\ \times \left(a_{2k+1}^2 B_{\nu_{k+1}, \alpha_{k+1}} [V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r, \lambda_n)] \right) \times \\ \left. \left. \left. \times \sigma_{2k+1} r^{2\alpha_{k+1}+1} dr \right\}. \quad (18)$$

Із тотожностей

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\lambda_n^2 + \gamma_{2k}^2}{a_{2k}^2} \right) V_{(\nu,\alpha);2k}(r, \lambda_n) \equiv 0, \\ \left(B_{\nu_{k+1}, \alpha_{k+1}} + \frac{\lambda_n^2 + \gamma_{2k+1}^2}{a_{2k+1}^2} \right) V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r, \lambda_n) \equiv 0$$

$$a_{2k}^2 \frac{d^2}{dr^2} V_{(\nu,\alpha);2k}(r, \lambda_n) = \\ -(\lambda_n^2 + \gamma_{2k}^2) V_{(\nu,\alpha);2k}(r, \lambda_n), \\ a_{2k+1}^2 B_{\nu_{k+1}, \alpha_{k+1}} [V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r, \lambda_n)] = \\ -(\lambda_n^2 + \gamma_{2k+1}^2) V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r, \lambda_n). \quad (19)$$

Якщо $\tilde{\alpha}_{11}^0 \neq 0$, то в точці $r = R_0$ маємо:

$$\left(\frac{df_1}{dr} V_{(\nu,\alpha);1}(r, \lambda_n) - f_1(r) \frac{dV_{(\nu,\alpha);1}(r, \lambda_n)}{dr} \right) \Bigg|_{r=R_0} = \\ = \left(\tilde{\alpha}_{11}^0 \frac{df_1}{dr} + \tilde{\beta}_{11}^0 f_1 \right) \Bigg|_{r=R_0} \cdot (\alpha_{11}^0)^{-1} V_{(\nu,\alpha);1}(R_0, \lambda_n) - \\ - (\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1} f_1(R_0) \left[\left(\tilde{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{11}^0 \right) \times \right. \\ \left. \times V_{(\nu,\alpha);1}(r, \lambda_n) \right] \Bigg|_{r=R_0} = [0 \cdot V_{(\nu,\alpha);1}(R_0, \lambda_n) - \\ - 0 \cdot f_1(R_0)] (\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1} = 0.$$

Якщо $\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1} \neq 0$, то в точці $r = R_{2n+1}$ маємо:

$$\left(\frac{df_{2n+1}}{dr} V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r, \lambda_n) - f_{2n+1}(r) \times \right. \\ \times \frac{d}{dr} V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r, \lambda_n) \Bigg|_{r=R_{2n+1}} = \\ = \left(\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1} \frac{df_{2n+1}}{dr} + \tilde{\beta}_{22}^{2n+1} f_{2n+1}(r) \right) \Bigg|_{r=R_{2n+1}} \times \\ \times (\alpha_{22}^{2n+1})^{-1} V_{(\nu,\alpha);2n+1}(R_{2n+1}, \lambda_n) - \\ - (\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1})^{-1} f_{2n+1}(R_{2n+1}) \left[\left(\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1} \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{22}^{2n+1} \right) \times \right. \\ \left. \times V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r, \lambda_n) \right] \Bigg|_{r=R_{2n+1}} = \\ = [0 \cdot V_{(\nu,\alpha);2n+1}(R_{2n+1}, \lambda_n) - \\ - 0 \cdot f_{2n+1}(R_{2n+1})] (\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1})^{-1} = 0.$$

Позаінтегральні доданки, що залишилися в рівності (18) перепишемо в такому вигляді:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left[a_{2k}^2 \sigma_{2k} \left(\frac{df_{2k}}{dr} V_{(\nu, \alpha); 2k}(R_{2k}, \lambda_n) - f_{2k}(R_{2k}) \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. \frac{dV_{(\nu, \alpha); 2k}(R_{2k}, \lambda_n)}{dr} \right) - a_{2k+1}^2 \sigma_{2k+1} R_{2k}^{2\alpha_{k+1}+1} \times \right. \\ & \times \left. \left(\frac{df_{2k+1}}{dr} V_{(\nu, \alpha); 2k+1}(R_{2k}, \lambda_n) - f_{2k+1}(R_{2k}) \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. \frac{dV_{(\nu, \alpha); 2k+1}(R_{2k}, \lambda_n)}{dr} \right) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^n \left[a_{2k-1}^2 \sigma_{2k-1} R_{2k-1}^{2\alpha_{k-1}+1} \left(\frac{df_{2k-1}(r)}{dr} \times \right. \right. \\ & \times V_{(\nu, \alpha); 2k-1}(r, \lambda_n) - f_{2k-1}(r) \times \\ & \times \left. \left. \frac{dV_{(\nu, \alpha); 2k-1}(r, \lambda_n)}{dr} \right) \right]_{r=R_{2k-1}} - a_{2k}^2 \sigma_{2k} \times \\ & \times \left(\frac{df_{2k}}{dr} V_{(\nu, \alpha); 2k}(r, \lambda_n) - f_{2k}(r) \times \right. \\ & \times \left. \left. \frac{dV_{(\nu, \alpha); 2k}(r, \lambda_n)}{dr} \right) \right]_{r=R_{2k-1}} \equiv \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2. \end{aligned}$$

Скориставшись базовою тотожністю

$$\begin{aligned} & \left(\frac{df_j}{dr} V_{(\nu, \alpha); j}(r, \lambda_n) - f_j(r) \frac{dV_{(\nu, \alpha); j}(r, \lambda_n)}{dr} \right) \Big|_{r=R_j} = \\ & = \frac{c_{21, j}}{c_{11, j}} \left(\frac{df_{j+1}}{dr} V_{(\nu, \alpha); j+1}(r, \lambda_n) - \right. \\ & \left. - f_{j+1}(r) \frac{dV_{(\nu, \alpha); j+1}(r, \lambda_n)}{dr} \right) \Big|_{r=R_j} \end{aligned}$$

та визначенням σ_j , отримуємо:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 = & \prod_{s=2k}^{2n} \frac{c_{11, s}}{c_{21, s}} \prod_{s=k}^{n-1} \left(\frac{R_{2s}}{R_{2s+1}} \right)^{2\alpha_{s+1}+1} R_{2n}^{2\alpha_{n+1}+1} \times \\ & \times \left(\frac{c_{21, 2k}}{c_{11, 2k}} - \frac{c_{21, 2k}}{c_{11, 2k}} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 = & \prod_{s=2k-1}^{2n} \frac{c_{11, s}}{c_{21, s}} \prod_{s=1}^{n-1} \left(\frac{R_{2s}}{R_{2s+1}} \right)^{2\alpha_{s+1}+1} R_{2n}^{2\alpha_{n+1}+1} \times \\ & \times \left(\frac{c_{21, 2k-1}}{c_{11, 2k-1}} - \frac{c_{21, 2k-1}}{c_{11, 2k-1}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Рівність (18) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} H_{2n}[\mathcal{L}_{(\nu, \alpha)}[f(r)]] = & \sum_{k=1}^n \int_{R_{2k-1}}^{R_{2k}} f_{2k}(r) \times \\ & \times \left[a_{2k}^2 \frac{d^2}{dr^2} V_{(\nu, \alpha); 2k}(r, \lambda_n) \right] \sigma_{2k} dr + \\ & + \sum_{k=0}^n \int_{R_{2k}}^{R_{2k+1}} f_{2k+1}(r) \times \\ & \times \left[a_{2k+1}^2 B_{\nu_{k+1}, \alpha_{k+1}}(V_{(\nu, \alpha); 2k+1}(r, \lambda_n)) \right] \times \\ & \times \sigma_{2k+1} r^{2\alpha_{k+1}+1} dr. \end{aligned}$$

Якщо скористатися тотожностями (19) й роз'єднати інтеграли, то приходимо до тотожності (16).

Як приклад розглянемо задачу квазістатисти.

Задача про дифузію тепла. Знайти інтегральне зображення обмеженого на множині $D_n = \{(t, r) : t \in (0, \infty), r \in I_{2n}\}$ розв'язку сепаратної системи рівнянь теплопровідності параболічного типу

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_{2k+1}}{\partial t} - a_{2k+1}^2 B_{\nu_{k+1}, \alpha_{k+1}}[u_{2k+1}] = f_{2k+1}(t, r), \\ & r \in (R_{2k-1}, R_{2k}), k = \overline{1, n}, \\ & \frac{\partial u_{2k}}{\partial t} - a_{2k}^2 \frac{\partial^2 u_{2k}}{\partial r^2} = f_{2k}(t, r), \\ & r \in (R_{2k}, R_{2k+1}), k = \overline{0, n} \end{aligned} \quad (20)$$

за нульовими початковими умовами, крайовими умовами

$$\begin{aligned} & \left[\left(\alpha_{11}^0 + \delta_{11}^0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 + \right. \\ & \left. + \gamma_{11}^0 \frac{\partial}{\partial t} \right] u_1(t, r) \Big|_{r=R_0} = g_0(t), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\left[\left(\alpha_{22}^{2n+1} + \delta_{22}^{2n+1} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{2n+1} + \gamma_{22}^{2n+1} \frac{\partial}{\partial t} \right] u_{2n+1}(t, r) \Big|_{r=R_{2n+1}} = g_{2n+1}(t)$$

та умовами спряження

$$\left\{ \left[\left(\alpha_{j1}^k + \delta_{j1}^k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k + \gamma_{j1}^k \frac{\partial}{\partial t} \right] u_k(t, r) - \left[\left(\alpha_{j2}^k + \delta_{j2}^k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k + \gamma_{j2}^k \frac{\partial}{\partial t} \right] u_{k+1}(t, r) \right\} \Big|_{r=R_k} = 0; j = 1, 2; k = \overline{1, 2n}.$$

Застосуємо до даної задачі інтегральний оператор H_{2n} за відомою логічною схемою [3]. В силу тотожності (16) при $\gamma_j^2 = 0$ одержуємо задачу Коші [4]:

$$\frac{d\tilde{u}_n}{dt} + \lambda_n^2 \tilde{u}_n = \tilde{f}_n(t) + (\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1})^{-1} R_{2n+1}^{2\alpha_{n+1}+1} \times \\ \times V_{(\nu, \alpha); 2n+1}(R_{2n+1}, \lambda_n) g_{2n+1}(t) - a_1^2 \sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1} \times \\ \times (\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1} V_{(\nu, \alpha); 1}(R_0, \lambda_n) g_0(t) \equiv \tilde{F}_n(t), \\ \tilde{u}_n(t)|_{t=0} = 0. \quad (23)$$

Розв'язком задачі Коші (23) є функція

$$\tilde{u}_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \tilde{F}_n(\tau) d\tau. \quad (24)$$

В результаті застосування до функції $\tilde{u}_n(t)$ оператора H_{2n}^{-1} згідно правила (15) маємо єдиний розв'язок даної задачі (20) – (22):

$$u_j(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(t) V_{(\nu, \alpha); j}(r, \lambda_n) \times \\ \times (\|V_{(\nu, \alpha); j}(r, \lambda_n)\|_1^2)^{-1}, j = \overline{1, 2n+1}. \quad (25)$$

У результаті елементарних перетворень одержуємо шукане інтегральне зображення розв'язку даної параболічної задачі:

$$u_j(t, r) = \sum_{k=0}^n \int_0^t \int_{R_{2k}}^{R_{2k+1}} H_{(\nu, \alpha); j, 2k+1}(t - \tau, r, \rho) \times$$

$$\times f_{2k+1}(\tau, \rho) \rho^{2\alpha_{k+1}+1} \sigma_{2k+1} d\rho d\tau + \\ + \sum_{k=1}^n \int_0^t \int_{R_{2k-1}}^{R_{2k}} H_{(\nu, \alpha); j, 2k}(t - \tau, r, \rho) \times$$

$$\times f_{2k}(\tau, \rho) \sigma_{2k} d\rho d\tau + \int_0^t [W_{(\nu, \alpha); 1j}(t - \tau, r) g_0(\tau) + \\ + W_{(\nu, \alpha); 2n+1, j}(t - \tau, r) g_{2n+1}(\tau)] d\tau, j = \overline{1, 2n+1}. \quad (26)$$

У формулі (26) беруть участь породжені неоднорідністю системи (26) функції впливу

$$H_{(\nu, \alpha); jm}(t, r, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} \times \\ \times \frac{V_{(\nu, \alpha); j}(r, \lambda_n) V_{(\nu, \alpha); m}(\rho, \lambda_n)}{\|V_{(\nu, \alpha)}(r, \lambda_n)\|_1^2} \quad (27)$$

та функції Гріна

$$W_{(\nu, \alpha); 1j}(t, r) = - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} \times \\ \times \frac{V_{(\nu, \alpha); j}(r, \lambda_n) V_{(\nu, \alpha); 1}(R_0, \lambda_n)}{\tilde{\alpha}_{11}^0 \|V_{(\nu, \alpha)}(r, \lambda_n)\|_1^2} a_1^2 \sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}, \quad (28)$$

$$W_{(\nu, \alpha); 2n+1, j}(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} \times \\ \times \frac{V_{(\nu, \alpha); j}(r, \lambda_n) V_{(\nu, \alpha); 2n+1}(R_{2n+1}, \lambda_n)}{\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1} \|V_{(\nu, \alpha)}(r, \lambda_n)\|_1^2} R_{2n+1}^{2\alpha_{n+1}+1}, \quad (29)$$

породжені тепловим режимом на краях $r = R_0$ та $r = R_{2n+1}$ області D_n .

Зауваження 1. Якщо початкові умови неоднорідні, тобто

$$u_j(t, r)|_{t=0} = \omega_j(r),$$

то заміна функцій

$$u_j(t, r) = v_j(t, r) + \omega_j(r)$$

приводить для функцій $v_j(t, r)$ до нульових початкових умов.

Зауваження 2. Без залучення нових ідей отримуємо розв'язок задачі у випадку, коли умови спряження неоднорідні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ленюк М.П.* Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с.
2. *Блажесвський С.Г., Ленюк М.П.* Термопружний стан багатошарових симетричних тіл. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2000. – 130 с.
3. *Комаров Г.М., Ленюк М.П., Мороз В.В.* Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку. – Чернівці: Прут, 2001. – 228 с.
4. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М: Физматгиз, 1959. – 468 с.
5. *Ленюк М.П.* Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. – Киев, 1983. – 62 с. – (Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
6. *Ленюк М.П., Мороз В.В.* Побудова скінченного гібридного інтегрального перетворення при наявності спектрального параметру в крайових умовах та умовах спряження // Науковий вісник Чернівецького університету. Випуск 314 – 315. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 105 – 113.