МЕТОД ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ, ПОДЧИНЯЮЩИХСЯ МНОГОМОДАЛЬНЫМ ЗАКОНАМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Горошко А.В. [1], *Ройзман В.П.* [2]
Хмельницкий национальный университет, Украина
[1]*E-mail: iftomm@ukr.net*, [2]*E-mail: royzman_V@mail.ru*

Введение. В силу объективных и субъективных причин измерительные на реальном объекте параметры, характеризующие качество работы приборов, аппаратуры, свойства материалов, как правило, имеют разброс значений, т.е. могут приобретать произвольные значения в некоторых числовых интервалах. Это обстоятельство позволяет принимать их за случайные величины, подчиняющиеся некоторым законам распределения. Имея данные о реализации этих случайных величин, можно более или менее точно оценить их истинные значения, например методом доверительных интервалов.

Так, проблему исследования законов распределения приходится решать при идентификации технологических процессов [1], разработке нормативной документации, контроле качества выпускаемой продукции [2, 3], прогнозировании ресурса изделий, и в ряде других задач обеспечения качества изделий, где значения контролируемых величин определяют, испытывая опытные образцы с последующей обработкой экспериментальных материалов методами математической статистики [4].

Наиболее общей задачей математической статистики является выбор статистической модели распределения исследуемых признаков, содержащей оценку неизвестных законов распределения и их параметров, проверку статистических гипотез и т.д. Целью построения статистической модели является представление данных наблюдений путем подбора аппроксимирующего распределения. Исторически сложилось так, что нормальное распределение считался почти всеобъемлющей статистической моделью из-за достаточно общих условий его появления [5]. Поэтому подавляющее большинство статистических критериев, методов и оценок разработаны именно для этого случая.

Между тем, такое положение вещей не всегда соответствует действительности. Так, например, в [6] указывается, что нормальный закон распределения погрешностей на самом деле может быть получен только при выполнении большого количества условий: в выборке представлена одна партия изделий, нет доминирующих причин возникновения погрешностей, количество случайных факторов, которые обусловливают возникновение погрешностей, неизменно во времени, все случайные факторы являются взаимонезависимыми и т.д.

Анализ ситуаций, возникающих, например, при изучении механических причин поврежденности материалов, а также других параметров, которые характеризуют функционирование или свойства достаточно большого количества однотипных изделий, показывает, что плотность вероятности хорошо приближается к одновершинной кривой только лишь при условии изготовления и сборки, а также эксплуатации в идентичных условиях. Если же разброс значений этих параметров вызван разнообразными производственными или эксплуатационными причинами, то имеют место четко выраженные многовершинные гистограммы. Следовательно, далеко не всегда распределения таких случайных величин близки к модификациям нормального закона, для которого могут быть применены известные методы обработки статистических данных.

Проведенные авторами изучения гистограмм, построенных по результатам измерений разрушающего усилия некоторого достаточно большого количества однотипных резисторов, показало, что закон распределения не одномодальный и имеет четко выраженную многовершинную гистограмму (рис.1). Только изучив процесс производства этих резисторов, стало возможным объяснить причины появления багатомодальности [7]. Оказалось, что резисторы одного и того же типа изготавливаются на заводе нескольких однотипных линиях, каждая из которых имеет специфические погрешности изготовления. Выработанные на всех линиях детали сортируют по радиотехническими признакам. При этом в одну партию резисторов, отобранных по одинаковой радиотехнической надежности, попадают детали, изготовленные на различных линиях, и они при механических испытаниях образуют столько однотипных по механическим свойствам групп, сколько разнообразных линий участвовали в их изготовлении. Исследование резисторов из одной партии показали четко выраженное одномодальное распределение.

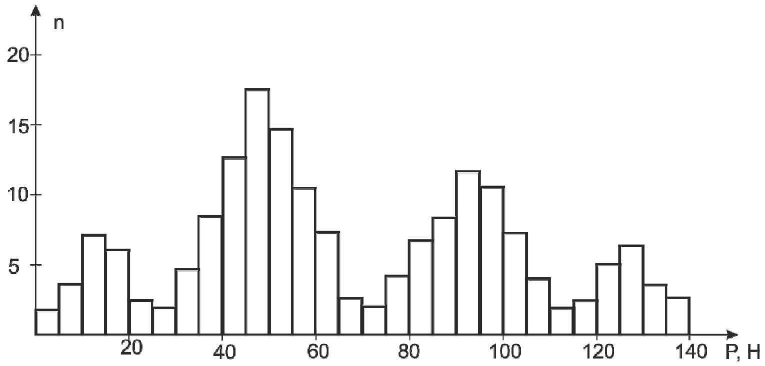

Рис.1. Гистограмма разрушающих усилий керамики резисторов ОМЛТ

Заметим, что далеко не всегда причины, вызывающие разброс значений исследуемого параметра, очевидны и могут быть найдены. Поэтому возникает проблема поиска методов обработки таких многомодальных эмпирических законов распределения.

Математически многомодальные законы распределения, которые называют смесями функций распределения, можно описать следующим образом [7, 8]. Пусть в приведенном выше примере распределения разрушающих усилий резисторов количество технологических линий, формирующих доминирующие причины появления подвыборок, равно n, вероятность того, что резистор изготавливался на i-ой линии равно ρ_i ($i = 1, 2, ..., n$; $\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 1$), разрушающая нагрузка есть случайная величина з плотностью $f_i(x, \mu_i, S_i)$, $x \in \mathbb{R}$, де μ_i і S_i - математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение i-ой подвыборки. Имеем случайную величину X; про условия эксперимента, в результате которого она принимает определенные значения, можно составить n взаимоисключающих гипотез: $H_1, H_2, ..., H_n$. Вероятности гипотез известны:

$$P(H_i) = \rho_i \quad (i = 1, 2, ..., n;\ \sum_{i=1}^{n} \rho_i = 1). \tag{1}$$

Если имеет место гипотеза H_i, функция распределения X равняется $F_i(x)$. Найдем полную («усредненную») функцию распределения $F(x)$ случайной величины X с учетом случайности ее закона распределения.

По определению

$$F(x) = P\{X < x\}. \tag{2}$$

Найдем эту вероятность по формуле полной вероятности с гипотезами $H_1, H_2, ..., H_n$:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) F_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i F_i(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где функции распределения $F_i(x)$ называют компонентами смеси, а ρ_i - весами соответствующих компонент.

Дискретной смеси распределений $F(x)$ соответствует дискретная плотность распределения

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i f_i(x, \mu_i, S_i), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

В работах [6,9-14] представлены виды многомодальных распределений и решается задача определения вида и параметров результирующей кривой по заданным видам и параметрам составляющих законов распределения. Однако при построении статистических моделей распределения более важной есть обратная задача - операция разделения (расщепления) смесей, поскольку структура полученных при выборочных наблюдениях данных, как правило, неизвестна. Это задача определения количества, доли и параметров каждой из подвыборок в общей выборке (смешанном распределении). Проделанный авторами [7] обзор известных подходов к решению таких задач показал их недостатки и, несмотря на высокую теоретические ценность, при решении практических задач они трудно применены, поскольку смеси плотностей вероятностей, как правило, задаются не графиками, а некоторыми конечными выборками реализаций случайной величины, которые подаются в удобном для обработки виде, например, в виде гистограммы.

Сама по себе гистограмма дает возможность прогнозировать величину исследуемого параметра только на ограниченном интервале. Для построения статистической модели распределения и обоснованного прогнозирования в области малых вероятностей необходимо приблизить ее некоторой аналитической функции с продолжением последней на числовую ось. Итак, выбор статистической модели распределения определяется видом гистограммы, который, в свою очередь, зависит от способа ее построения, и, особенно, от выбранного шага интервала значений.

Рекомендации по выбору шага разбиения интервала значений исследуемой случайной величины, которые есть в литературе по теории вероятностей и математической статистике, носят чисто эмпирический характер [8].

Проведенный авторами анализ показал, что существующие подходы и методы решения задачи обработки статистических данных, подчиняющихся многомодальным законам распределения, имеют существенные недостатки, что ограничивает их применение в задачах обработки эмпирических данных. В связи с этим требуют разработки методы обработки таких данных. Наряду с решением проблемы разделения смесей распределений случайных величин требуют решения и другие задачи, в частности обеспечение устойчивости решений, создание методов построения гистограмм.

Результаты исследований

Суть предложенного авторами вероятностного метода обработки экспериментальных данных, подчиняющихся многомодальным законам распределения, заключается в следующем. Пусть некоторый параметр объекта рассматривается как случайная величина X, каждая выборка реализаций которой может быть представлена в виде объединения n подвыборок. При этом каждая подвыборка есть виборкой x_i из генеральной совокупности реализаций случайной величины с плотностью вероятностей $f_i(x, \mu_i, S_i)$, где μ_i і S_i - математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение i-ой подвыборки.

Если вероятность того, что X принимает значения, принадлежащие x_i, равняется ρ_i, то для последующей обработки статистических данных предлагается плотность вероятности X представлять линейной комбинацией вида (4), в которой плотности вероятностей f_i - одномодальные, а $\rho_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$ і связаны условием $\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 1$. Следовательно, гистограмма приближается линейной комбинацией Гауссовых функций плотности вероятностей с весовыми коэффициентами ρ_i вида

$$f(x, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_N; S_1, S_2, ..., S_N; \rho_1, \rho_2, ..., \rho_N) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i}{S_i\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_i)^2}{2S_i^2}\right). \tag{5}$$

Для дальнейшей обработки результатов эксперимента, прежде всего, необходимо определить неизвестные параметры, применив, например, интерполяцию на некотором точечном множестве, согласно которой неизвестные параметры необходимо искать из условия совпадения значений функции (5) в некоторых точках (например вершинах и впадинах) со значениями приближая функции, график которой плавной кривой огибает построенную гистограмму. Ясно, что для однозначного определения $3n$ неизвестных параметров количество точек в множестве должна бать не меньше чем $3n-1$ (поскольку коэффициенты ρ_i всегда связаны уравнением $\sum_{i=1}^{n}\rho_i = 1$). Таким образом, для нахождения неизвестных μ_i, S_i и ρ_i необходимо составить и решить систему уравнений вида

$$\begin{cases} F(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(x_j, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_n; S_1, S_2, ..., S_n; \rho_1, \rho_2, ..., \rho_n\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\rho_i}{S_i\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left(-\dfrac{\left(x_j-\mu_i\right)^2}{2S_i^2}\right)dx, \\ j = 1, 2, ..., 3n-1, \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\rho_i = 1. \end{cases}, \quad (6)$$

где μ_i, S_i, ρ_i - постоянные, но неизвестные параметры распределения i-ой подвыборки и ее весовой коэффициент. Очевидно, что решение системы (6) после подстановки в функцию (5) тем точнее будет приближать реальность, чем меньшие участки разбиения при построении гистограммы, т.е. чем точнее гистограмма и огибающая ее плавная кривая.

Поиск описанных параметров можно осуществить и способом наименьших квадратов [15], записав функцию (7) и приравняв к нулю ее частные производные по каждому из параметров, где $g\left(x_j\right)$ - значения огибающей функции в выбранных точках.

$$V = \sum_{j=1}^{3n-1}\left[g\left(x_j\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\rho_i}{S_i\sqrt{2\pi}}\left\{\exp\left(-\frac{\left(x_j-\mu_i\right)^2}{2S_j^2}\right)\right\}\right]^2. \quad (7)$$

При решении аналогичной задачи можно использовать и метод моментов, но поскольку подсчет эмпирических моментов высоких порядков приводит к значительным погрешностям, то такой способ предлагается применять для предварительных оценок искомых величин. Уточнение этих оценок следует осуществлять, максимизируя функцию максимального правдоподобия [15].

$$W = \prod_{j=1}^{3n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\rho_i}{S_i\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(x_j-\mu_i\right)^2}{2S_i^2}\right), \quad (8)$$

приравнивая к нулю ее частные производные по искомым параметрам В любом случае задача сводится к решению системы трансцендентных уравнений, которое должно выполняться на ЭВМ.

При обработке результатов эксперимента возникают определенные трудности. Прежде всего, перед исследователями постает вопрос, каким должен быть шаг разбиения при построении гистограмм. Для выбора оптимального шага авторами предложены следующие рекомендации. Шаг должен быть минимальным, но не меньше, чем точность измерения параметра, а число n в (4) должно равняться количеству полученных при построении вершин. Далее одним из предложенных ранее методов необходимо определить неизвестные параметры μ_i, S_i і ρ_i. Если в результате расчетов один или несколько весовых коэффициентов ρ_i окажутся меньше некоторой наперед заданной величины β, то соответствующими членами в линейной комбинации (5) можно пренебречь. Действительно, интегральная функция распределения с плотностью (5) имеет вид

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{x}\frac{\rho_i}{S_i\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu_i)^2}{2S_i^2}\right)dx .$$

Пусть, например, $\rho_i<\beta$. Тогда после отбрасывания первого слагаемого в линейной комбинации (5) новая интегральная функция распределения может быть записана в виде

$$\bar{F}(x)=\sum_{i=2}^{n}\int_{-\infty}^{x}\frac{\rho_i}{S_i\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu_i)^2}{2S_i^2}\right)dx .$$

Оценим разницу

$$\left|F(x)-\bar{F}(x)\right|=\int_{-\infty}^{x}\frac{\rho_1}{S_1\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2S_1^2}\right)dx\le\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho_1}{S_1\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2S_1^2}\right)dx\le\beta .$$

Причем, полученная оценка верна для любого x.

Например, если функция распределения вероятностей должна измеряться с точностью до 0,01, то значение β достаточно взять 0,005. Далее шаг гистограммы можно увеличивать до тех пор, пока количество вершин не станет равным количеству членов в линейной комбинации (2) после отбрасывания ее малых членов. Снова применяя тот же метод решения, но уже для меньшего количества неизвестных, можно определить их уточненное значение и отбросить малые члены. Такой процесс следует продолжать до тех пор, пока все ρ_i не станут сравнимы с выбранной точностью β. Полученный при этом шаг может быть принят за оптимальный.

Физически этот процесс означает, что подвыборки с малым ρ_i вносят весьма незначительный вклад в общую выборку и поэтому их можно объединить с одной из подвыборок изделий с близкими величинами изучаемого параметра.

Следующая сложность, возникающая при решении подобных задач, носит чисто вычислительный характер. Дело в том, что сходимость решения системы трансцендентных уравнений на ЭВМ любым итерационным методом требует знания достаточно «хороших» начальных приближений, а они в большинстве случаев неизвестны. Применение метода моментов само по себе связано с вычислительными трудностями. Поэтому как один из путей решения такой задачи может быть предложен следующий. На начальном этапе решения следует применять градиентный метод [16], который при относительно невысокой точности может применяться при «грубых» начальных приближениях. Полученное этим методом решение может быть принято за начальное приближение для применения более точного метода, например, метода Ньютона [16].

Получение закона распределения вероятности исследуемого параметра в виде (5) позволяет перейти к решению одной из важных практических задач - назначения допустимого значения этого параметра с определенной надежностью. Как известно, допустимое значение параметра, который характеризует свойства или качество работы новых изделий и материалов, которые не имеют изученных аналогов, устанавливается путем испытаний одной партии. При этом для изделий (материалов) создаются критические, наиболее неблагоприятные для их работы ситуации, при которых эти изделия (материалы) еще способны выполнять возложенные на них функции, и определяют значение исследуемого параметра. Например, при исследовании механической прочности резисторов их подвергают испытаниям путем приложения различного вида нагрузок, например, деформации растяжения или изгиба, и измеряют величины тех нагрузок, которые приводят к разрушению тела резисторов.

Как известно, рассеяние значений исследуемого параметра зависит от принятого способа изготовления изделия. Границы интервалов рассеивания определяются законами распределения параметра, который рассматривается как случайная величина, представляющая собой сумму случайных величин, каждая из которых вызывается одним из непреодолимых факторов. Если количество слагаемых в сумме достаточно велико, то может возникнуть два варианта при назначении функции распределения параметра.

В случае, когда величина каждой из составляющих в описанной ранее сумме мала по сравнению с ее величиной, по центральной предельной теореме [15] распределение суммы близко к нормальному. Физически это условие малости каждого слагаемого означает, что ни один из факторов, обусловивших появление соответствующей случайной величины, не имеет преобладающего значения.

Если же среди указанных факторов появляются один или несколько доминирующих, то соответствующие слагаемые имеют преобладающее значение в сумме и закон распределения суммы становится многомодальным.

В случае нормального закона распределения параметра, его допустимое значение устанавливается на основе полученных его реализаций из следующих соображений.

Известно, что для вероятности P существует соотношение

$$P\left\{\left|x-x_{cp}\right|\le t_{\gamma}\frac{S}{\sqrt{n}}\right\}=\gamma , \tag{9}$$

где

$$x_{cp}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j , \tag{10}$$

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_{cp}-x_j)^2} \tag{11}$$

x - истинное значение случайной величины;

t_{γ} - коэффициент Стьюдента, взятый из таблицы для заданной доверительной вероятности γ и числа степеней свободы $n-1$.

Тогда с доверительной вероятностью γ можно утверждать, что допустимое значение параметра находится в пределах

$$x_{cp}-t_{\gamma}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\le x\le x_{cp}+t_{\gamma}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} \tag{12}$$

За допустимое значение параметра целесообразно взять левый конец доверительного интервала (12), то есть

$$\left[X\right]=x_{cp}-t_{\gamma}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} \tag{14}$$

В случае, если полученная гистограмма описывается многомодальным законом распределения, дальнейшие действия по назначению допустимого значения исследуемого параметра могут осуществляться двумя путями.

1. Рассматривается подвыборка с минимальным значением μ_i. Очевидно, что допустимое значение параметра изделий этой подгруппы минимально, т.е. эти изделия скорее других будут выходить из строя в эксплуатационных условиях. Назначенное допустимое значение параметра для таких изделий может быть принято и для всей партии. В этом случае дальнейшая обработка экстремальных данных может происходить только для указанной нормально распределенной подвыборки значений с параметрами распределения μ_i, S_i, как описано выше.

Если есть возможность разделить исходную выборку изделий на подвыборки, объединенные одной из доминирующих причин появления разброса значений, то аналогичные операции по обработке экспериментальных данных следует проводить для каждой подвыборки.

2. Определенные параметры позволяют записать интегральную функцию распределения $F^x(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f\left(x,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n;S_1,S_2,...,S_n;\rho_1,\rho_2,...,\rho_N\right)dx=\sum_{i=1}^{n}\frac{\rho_i}{S_i\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{\left(x-\mu_i\right)^2}{2S_i^2}\right)dx$,

которую, как и Гауссову случайную величину, с помощью ЭВМ можно задать таблично следующим образом. Для каждого значения величины X, которое изменяется с определенным числовым интервалом, например, 0,1, по таблице функции распределения нормированного нормального распределения $\Phi^x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$ можно определить вероятности $\gamma_i=\frac{1}{S_i\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{\left(x-M_i\right)^2}{2S_i^2}\right)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{(x-M_i)/S_i}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$ для всех $i=1,2,...,n$ и далее значения интегральной функции $F^x(x)=\sum_{i=1}^{n}\rho_i\gamma_i$.

Это означает, что функция $F^x(x)$ будет задана таблично. Полученная таблица позволяет не только по значениям x определять величину функции $F^x(x)$, но и наоборот – по заданным значениям функции определять величину аргумента. Таким образом, для заданной доверительной вероятности можно определить искомое допустимое значение параметра $\left[X\right]$ из соотношения вида $\gamma=P\left\{X<\left[X\right]\right\}=F^x(\left[X\right])=\sum_{i=1}^{n}\frac{\rho_i}{S_i\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{[X]}\exp\left(-\frac{\left(x-M_i\right)^2}{2S_i^2}\right)dx$, составленного на основании определения интегральной функции распределения случайной величины параметра с плотностью распределения (5).

Необходимо отметить, что, во-первых, второй путь более точный, поскольку он учитывает функции распределения всех подвыборок, а во-вторых, более универсальный, ведь с его помощью можно решать поставленную задачу в случае произвольного распределения, если предварительно составить для него таблицу зависимости доверительной вероятности и аргумента интегральной функции распределения исследуемой величины.

Также необходимо отметить, что второй способ назначения допусков при многомодальном распределении параметра распространяется как на частный случай и на одномодальный закон.

Более того, назначение допуска с помощью интегральной функции распределения в этом частном случае может служить даже дополнением и уточнением способа решения аналогичной задачи при одномодальном законе распределения параметра, описанного ранее в допущении, что истинное значение измеряемой величины совпадает с ее математическим ожиданием.

Чтобы не требовать выполнения последнего условия и получать значение допустимой величины параметра меньшее и в этом смысле более надежное, чем рассчитанное с указанным предположением, следует принять левый конец доверительного интервала для S за среднеквадратическое отклонение и применить назначения допуска с помощью интегральной функции распределения для одномодального закона с полученным указанным ранее образом математическим ожиданием и дисперсией.

Выводы.

Таким образом, предложенный метод статистической обработки данных экспериментов с измеренными параметрами технических объектов, свойств и т.п. позволяет, во-первых, раскрыть внутреннюю структуру данных с учетом возможной многомодальности закона их распределения, и, во-вторых, дает правила работы с такими статистическими материалами, в частности, методы определения обоснованных допустимых значений исследуемых параметров.

Заметим, что исследуемое вопрос имеет и самостоятельное значение, поскольку статистические материалы необходимо обрабатывать и при изучении производственных погрешностей изготовления объектов, и при идентификации технологических процессов, и при составлении нормативной документации, а также в целом ряде других важных случаев в практике проектирования и производства технических объектов [1].

Література

1. V. Royzman, A. Goroshko. Multiple inverse problem. - JOURNAL OF VIBROENGINEERING. SEPTEMBER 2012. VOLUME 14, ISSUE 3. ISSN 1392-8716. С 1417-1424
2. Лопухин В.А. Обеспечение точности электронной аппаратуры: Конструкторско-технологические методы. Л.: Машиностроение. Ленинградское отд-ие, 1980. 269 с.
3. Кофанов Ю.Н., Ройзман В.П. Методы системного анализа вибрационной прочности изделий / Монография - Москва: изд. Радио и связь, 2007, 178 с.
4. Горошко А.В. Стан проблеми забезпечення якісного проектування структурно-складних технічних виробів та технологічних процесів їх виготовлення / А.В. Горошко, В.П. Ройзман // Вісник Хмельницького національного університету. -2012. №5. -С. 59-68.
5. Плескунин В.И., Воронина Е.Д. Теоретические основы организации и анализа выборочных данных в эксперименте / Под. ред. Башарина А.В., Л.: Изд-во ЛГУ, 1979. 232с.
6. Гусев В.П. и др. Расчет электрических допусков радиоэлектронной аппаратуры / Под ред. В.П. Гусева и А.В. Фомина. М.: Сов. Радио, 1963. 367с.
7. Горошко А.В., Ройзман В.П. Про задачу обробки статистичних матеріалів, що не підкоряються одномодальним законам розподілу. Современные достижения в науке и образовании : сб. тр. VII междунар. Науч. Конф., посвящ. 50-летию Хмельниц. Нац. Ун-та, 25 авг.-1 сент.2012 г., г. Опатия (Хорватия). - Хмельницкий : ХНУ; ФОП Сторожук О.В.-2012.-107 с. (укр., рус., анг.). ISBN 966-96180-35-43. С. 58-66.
8. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Учеб. пособие для втузов. – 2-е узд., стер.-М.: Высш шк., 2000.-480с.: ил.
9. Бородачев Н.А. Основные вопросы теории точности производства. М.: Изд-во АН СССР, 1950. 416 с.
10. Райнкше К. Модели надежности и чувствительности систем: Пер. с нем. М.: Мир, 1979. 452 с.
11. Иыуду К.А. Оптимизация устройств автоматики по критерию надежности / К.А. Иыуду. М.: Л. Энергия, 1966. - 194 с.
12. Методика расчета надежности изделий с учетом постепенных отказов / Гос.ком.стандартов Сов.Мин.СССР. М.: 1976. 33с.
13. Захарова Т.Н. К вопросу о статистической природе усталостной повреждаемости сталей и сплавов // Проблемы прочности. 1974, №4.
14. Королев В.Ю. Вероятностно-статистический анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовых моделей. Декомпозиция волатильности финансовых индексов и турбулентной плазмы. – М.: ИПИ РАН, 2007. – 363 с.
15. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576 с.
16. Бахвалов Н.С. Численные методы: Анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков - М.: Наука, 1973. - 631 с.

Информация об авторах.

Горошко Андрей Владимирович – к.т.н., доц., доцент кафедры радиотехники и связи Хмельницкого национального университета, Украина

Ройзман Вилен Петрович – д.т.н., проф., профессор кафедры инженерной механики и комп’ютерной графики Хмельницкого национального университета. Украина.