УДК 517.91:532.26

Г.І. Міхалевська, В.Ц. Міхалевський

# Гібридне інтегральне перетворення Ейлера - Лежандра - (Конторовича- Лєбєдєва) на сегменті $[0, R_3]$ полярної осі

(м.Хмельницький)

*Запроваджено методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) гібридне інтегральне перетворення, породжене на сегменті $[0, R_3]$ полярної осі з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором Ейлера - Лежандра - (Конторовича- Лебедева).*

*Введено методом дельта-образной последовательности (ядро Дирихле) гибридное интегральное преобразование, порожденное на сегменте $[0, R_3]$ полярной оси с двумя точками сопряжения гибридным диференциальным оператором Эйлера-Лежандра- (Конторовича- Лебедева).*

Бібліогр.: 8 назв.

Запровадимо інтегральне перетворення, породжене на множині $I_2 = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_3 < \infty\}$ гібридним диференціальним оператором (ГДО).

$$M_{(\alpha)}^{(\mu)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)B_{\alpha_1}^{*} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\Lambda_{(\mu)} + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)B_{\alpha_2} \quad (1)$$

У рівності (1) беруть участь: одинична функція Гевісайда [1]; диференціальний оператор Ейлера $B_{\alpha_1}^{*} = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_1 + 1)rd/dr + \alpha_1^2$[2]; диференціальний оператор Лежандра $\Lambda_{(\mu)} = d^2/dr^2 + cthrd/dr + 1/4 + 1/2(\frac{\mu_1^2}{1-chr} + \frac{\mu_2^2}{1+chr})$[3] та диференціальний оператор (Конторовича- Лєбєдєва) $B_{\alpha_2} = r^2 d^2/dr^2 + (2\alpha_2 + 1)rd/dr +$
$+\alpha_2^2 - \lambda^2 r^2$[4]; $2\alpha_j + 1 > 0, \mu_1 \geq \mu_2 \geq 0, (\mu) = (\mu_1, \mu_2), (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2), \lambda \in (0, \infty)$.

Означення. За область задання ГДО $M_{(\alpha)}^{(\mu)}$ приймемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями : 1) вектор-функція $f(r) = \{B_{\alpha_1}^{*}[g_1(r)]; \Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]; B_{\alpha_2}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині $I_2$; 2) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$[(\alpha_{j1}^k d/dr + \beta_{j1}^k)g_k(r) - (\alpha_{j2}^k d/dr + \beta_{j2}^k)g_{k+1}(r)] \mid_{r=R_k} = 0; j, k = 1, 2 \quad (2)$$

3)функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\lim_{r \to 0}[r^{\gamma} g_1(r)] = 0, [(\alpha_{22}^3 d/dr + \beta_{22}^3)g_3(r)] \mid_{r=R_3} = 0 \quad (3)$$

Припускаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha_{jm}^k \geq 0, \beta_{jm}^k \geq 0, c_{1k} \cdot c_{2k} > 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k; \alpha_{22}^3 \geq 0, \beta_{22}^3 \geq 0, \alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \neq 0$.

Із умов спряження для $u(r) \in G$ та $v(r) \in G$ випливає базова тотожність:

$$[u_k'(r)v_k(r) - u_k(r)v_k'(r)] \mid_{r=R_k} = \frac{c_{2k}}{c_{1k}}[u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r) - u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r)] \mid_{r=R_k} \quad (4)$$

Визначимо числа

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = \frac{c_{21}}{c_{11}} \frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{shR_1}, \sigma_3 = \frac{c_{21}c_{22}}{c_{11}c_{12}} \frac{shR_2}{shR_1} \frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_1^{2\alpha_2+1}},$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \Theta(r)\Theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1} + \Theta(r-R_1)\Theta(R_2-r)\sigma_2 shr + \Theta(r-R_2)\Theta(R_3-r)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1} \quad (5)$$

та скалярний добуток

$$(u(r), v(r)) = \int_0^{R_3} u(r)v(r)\sigma(r)dr \equiv \int_0^{R_1} u_1(r)v_1(r)r^{2\alpha_1-1}dr +$$

$$+ \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 shrdr + \int_{R_2}^{R_3} u_3(r)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr \quad (6)$$

Методом інтегрування частинами (два рази) з врахуванням базової тотожності (4) (при к=1,2) та крайових умов (3) встановлюємо , що

$$(M_{(\alpha)}^{(\mu)}[u(r)], v(r)) = (u(r), M_{(\alpha)}^{(\mu)}[v(r)] \quad (7)$$

Рівність (7) показує, що ГДО $M_{(\alpha)}^{(\mu)}$ - самоспряжений оператор. Отже, його спектр дійсний. Оскільки ГДО $M_{(\alpha)}^{(\mu)}$ має на множині $I_2$ одну особливу точку $r = 0$ [5] ,то його спектр неперервний. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0, \infty)$. Йому відповідає спектральна вектор-функція

$$V_{(\alpha)}^{(\mu)}(r, \beta) = \sum_{k=1}^{3} \Theta(r - R_{k-1})\Theta(R_k - r)V_{(\alpha);1}^{(\mu)}(r, \beta), R_0 = 0 \quad (8)$$

При цьому функції $V_{(\alpha);1}^{(\mu)}(r, \beta)$ повинні задовільняти відповідно диференціальні рівняння

$$(B_{\alpha_1}^* + b_1^2)V_{(\alpha);1}^{(\mu)}(r, \beta) = 0, r \in (0, R_1),$$

$$(\Lambda_{(\mu)} + b_2^2)V_{(\alpha);2}^{(\mu)}(r, \beta) = 0, r \in (R_1, R_2), \quad (9)$$

$$(B_{\alpha_2} + b_3^2)V_{(\alpha);3}^{(\mu)}(r, \beta) = 0, r \in (R_2, R_3),$$

умови спряження (2) та крайові умови (3); $b_j^2 = \beta^2 + k_j^2, k_j^2 \geq 0, j = \overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_{\alpha_1}^* + b_1^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha_1}\cos(b_1 \ln r)$ та $v_2 = r^{-\alpha_1}\sin(b_1 \ln r)$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра

$(\Lambda_{(\mu)} + b_2^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = A^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chr)$ та $v_2 = B^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chr)$[3]; $\nu_2^* = -1/2 + ib_2$; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння $(B_{\alpha_2} + b_2^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = C_{\alpha_2}(\lambda r, b_3)$ та $v_2 = D_{\alpha_2}(\lambda r, b_3)$ [4].

Якщо покласти

$$V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(r,\beta) = A_1 r^{-\alpha_1}\cos(b_1\ln r) + B_1 r^{-\alpha_1}\sin(b_1 \ln r), r \in (0, R_1)$$

$$V^{(\mu)}_{(\alpha);2}(r,\beta) = A_2 A^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chr) + B_2 B^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chr), r \in (R_1, R_2) \tag{10}$$

$$V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(r,\beta) = A_3 C_{\alpha_2}(\lambda r, b_3) + B_3 D_{\alpha_2}(\lambda r, b_3), r \in (R_2, R_3)$$

то умови спряження (2) й крайова умова в точці $r = R_3$ для визначення величин $A_j, B_j (j = \overline{1,3})$ дають однорідну алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$Y^{11}_{\alpha_1;j1}(b_1, R_1)A_1 + Y^{12}_{\alpha_1;j1}(b_1, R_1)B_1 - Y^{(\mu),11}_{\nu_2^*;j2}(chR_1)A_2 - Y^{(\mu),12}_{\nu_2^*;j2}(chR_1)B_2 = 0, j = 1,2$$

$$Y^{(\mu),21}_{\nu_2^*;j1}(chR_2)A_2 + Y^{(\mu),22}_{\nu_2^*;j1}(chR_2)B_2 - X^{21}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2, b_3)A_3 - X^{22}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2, b_3)B_3 = 0 \tag{11}$$

$$X^{31}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3, b_3)A_3 + X^{32}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3, b_3)B_3 = 0$$

Функції, що беруть участь в системі (11), загальноприйняті [5].

Сумісну алгебраїчну систему (11) розв'яжемо стандартним методом [6]. Візьмемо $A_3 = -A_0 X^{32}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3, b_3), B_3 = A_0 X^{31}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3, b_3)$ , де $A_0 \neq 0$ підлягає визначенню . Останнє рівняння стає тотожністю .

Розглянемо алгебраїчну систему стосовно $A_2, B_2$ :

$$Y^{(\mu),21}_{\nu_2^*;j1}(chR_2)A_2 + Y^{(\mu),22}_{\nu_2^*;j1}(chR_2)B_2 = -A_0[X^{21}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2, b_3)X^{32}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3, b_3) - \\ -X^{22}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2, b_3)X^{31}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3, b_3)] \equiv -A_0\delta_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2, \lambda R_3, b_3); j = 1,2 \tag{12}$$

Визначник алгебраїчної системи (12)

$$q_{(\mu)}(\beta) \equiv Y^{(\mu),21}_{\nu_2^*;11}(chR_2)Y^{(\mu),22}_{\nu_2^*;21}(chR_2) - Y^{(\mu),21}_{\nu_2^*;21}(chR_2)Y^{(\mu),22}_{\nu_2^*;11}(chR_2) = \frac{c_{12}}{S_{(\mu)}(b_2)shR_2} \neq 0,$$

$$S_{(\mu)}(b_2) = \frac{2^{\mu_1-\mu_2}\pi^3\gamma_{(\mu)}(b_2)}{sh(2\pi b_2)\mid\Gamma(1/2 + ib_2 + \nu^+_{12})\mid^2\mid\Gamma(1/2 + ib_2 + \nu^-_{12})\mid^2}, \nu^{\pm}_{12} = 1/2(\mu_1 \pm \mu_2),$$

$$\gamma_{(\mu)}(b_2) = \cos\mu_1\pi sh(2\pi b_2)\cdot(\cos\mu_2\pi + \cos\mu_1\pi ch(2\pi b_2))^{-1}.$$

Алгебраїчна система (12) має єдиний розв'язок [6]:

$$A_2 = -\frac{A_0}{q_{(\mu)}(\beta)}[\delta_{\alpha_2;12}(\lambda R_2, \lambda R_3, b_3)Y^{(\mu),22}_{\nu_2^*;21}(chR_2) - \delta_{\alpha_2;22}(\lambda R_2, \lambda R_3, b_3)Y^{(\mu),22}_{\nu_2^*;11}(chR_2)],$$

$$B_2 = \frac{A_0}{q_{(\mu)}(\beta)}[\delta_{\alpha_2;12}(\lambda R_2, \lambda R_3, b_3)Y^{(\mu),21}_{\nu_2^*;21}(chR_2) - \delta_{\alpha_2;22}(\lambda R_2, \lambda R_3, b_3)Y^{(\mu),21}_{\nu_2^*;11}(chR_2)]. \tag{13}$$

Розглянемо тепер систему стосовно $A_1, B_1$ :

$$Y^{11}_{\alpha_1;j1}(b_1, R_1)A_1 + Y^{12}_{\alpha_1;j1}(b_1, R_1)B_1 = \frac{A_0}{q_{(\mu)}(\beta)}[\delta_{\alpha_2;22}(\lambda R_2, \lambda R_3, b_3)\delta^{(\mu),21}_{\nu_2^*;j1}(chR_1, chR_2) -$$

$$-\delta_{\alpha_2;12}(\lambda R_2, \lambda R_3, b_3)\delta^{(\mu),21}_{\nu_2^*;j2}(chR_1, chR_2)] \equiv \frac{A_0}{q_{(\mu)}(\beta)} \cdot b^{(\mu)}_{\alpha_2,j}(\beta), j = 1, 2 \quad (14)$$

$$\delta^{(\mu)}_{\nu_2^*;jk}(chR_1, chR_2) = Y^{(\mu),11}_{\nu_2^*;j2}(chR_1)Y^{(\mu),22}_{\nu_2^*;k1}(chR_2) - Y^{(\mu),12}_{\nu_2^*;j2}(chR_1)Y^{(\mu),21}_{\nu_2^*;k1}(chR_2); j, k = 1, 2.$$

Визначник алгебраїчної системи (14)

$$q_{\alpha_1}(\beta) \equiv Y^{11}_{\alpha_1;11}(b_1, R_1)Y^{12}_{\alpha_1;21}(b_1, R_1) - Y^{11}_{\alpha_1;21}(b_1, R_1)Y^{12}_{\alpha_1;11}(b_1, R_1) = c_{11}b_1R_1^{-(2\alpha_1+1)} \neq 0$$

Алгебраїчна система (14) має единий розв'язок [6]:

$$A_0 = q_{(\mu)}(\beta)q_{\alpha_1}(\beta) \neq 0, A_1 = \omega^{(\mu)}_{(\alpha),2}(\beta), B_1 = -\omega^{(\mu)}_{(\alpha),1}(\beta), \quad (15)$$

$$\omega^{(\mu)}_{(\alpha),j}(\beta) = b^{(\mu)}_{\alpha_2;1}(\beta)Y^{1j}_{\alpha_1;21}(b_1, R_1) - b^{(\mu)}_{\alpha_2;2}(\beta)Y^{1j}_{\alpha_1;11}(b_1, R_1), j = 1, 2.$$

Підставивши визначені згідно формул (13) та (15) величини $A_j, B_j$ у рівності (16), маємо функції :

$$V^{(\mu)}_{(\alpha),1}(r, \beta) = \omega^{(\mu)}_{(\alpha),2}(\beta)r^{-\alpha_1}\cos(b_1 \ln r) - \omega^{(\mu)}_{(\alpha),1}(\beta)r^{-\alpha_1}\sin(b_1 \ln r),$$

$$V^{(\mu)}_{(\alpha),2}(r, \beta) = q_{\alpha_1}(\beta)[\delta_{\alpha_2;12}(\lambda R_2, \lambda R_3, b_3)f^{(\mu),2}_{\nu_2^*;21}(chR_2, chr) -$$

$$-\delta_{\alpha_2;22}(\lambda R_2, \lambda R_3, b_3)f^{(\mu),2}_{\nu_2^*;11}(chR_2, chr)], \quad (16)$$

$$f^{(\mu),2}_{\nu_2^*;j1}(chR_2, chr) = Y^{(\mu),21}_{\nu_2^*;j1}(chR_2)B^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chr) - Y^{(\mu),22}_{\nu_2^*;j1}(chR_2)A^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chr); j = 1, 2$$

$$V^{(\mu)}_{(\alpha),3}(r, \beta) = q_{(\mu)}(\beta)q_{\alpha_1}(\beta)[X^{31}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3, b_3)D_{\alpha_2}(\lambda r, b_3) - X^{32}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3, b_3)C_{\alpha_2}(\lambda r, b_3)].$$

Згідно рівності (8) спектральна вектор-функція визначена .

Наявність вагової функції $\sigma(r)$ , спектральної функції $V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r, \beta)$ та спектральної щільності

$$\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta) = \beta[b_1(\beta)]^{-1}([\omega^{(\mu)}_{(\alpha);1}(\beta)]^2 + [\omega^{(\mu)}_{(\alpha);2}(\beta)]^2)^{-1} \quad (17)$$

дає можливість визначити гібридне інтегральне перетворення (ГІП) , породжене на множині $I_2$ ГДО $M^{(\mu)}_{(\alpha)}$[7]:

$$H^{(\mu)}_{(\alpha)}[g(r)] = \int_0^{R_3} g(r)V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r, \beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta) \quad (18)$$

$$H^{(\mu)}_{(\alpha)}[g(r)] = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \tilde{g}(\beta)V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta \equiv g(r) \qquad (19).$$

Математичним обгрунтуванням формул (18),(19) є твердження.

Теорема 1 (про інтегральне зображення). Якщо вектор -функція

$$f(r) = [\Theta(r)\Theta(R_1-r)r^{\alpha_1-1/2}+\Theta(r-R_1)\Theta(R_2-r)\sqrt{shr}+\Theta(r-R_2)\Theta(R_3-r)r^{\alpha_2-1/2}]g(r)$$

неперервна , абсолютно сумовна з обмеженою варіацією на множині $(0,R_3)$, то для будь-якого $r \in I_2$ справджується інтегральне зображення функції $g(r) \in G$:

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\beta)\int_0^{R_3} g(\rho)V^{(\mu)}_{(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta \qquad (20)$$

Доведення . В основі доведення знаходиться подвійний невласний інтеграл

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{R_3}\int\limits_0^\infty \psi(\lambda)V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\lambda)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\lambda)d\lambda V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr = \psi(\beta), \qquad (21)$$

якщо $\lambda = \beta \in (0,\infty)$, і дорівнює нулю , якщо $\lambda = \beta \overline{\in} (0,\infty)$. Функція $\psi(\lambda)$ неперервна , абсолютно сумовна з обмеженою варіацією на $(0,\infty)$.

Припустимо, що функція

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \psi(\beta)V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta \qquad (22)$$

Помножимо рівність (22) на $V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr$ й проінтегруємо по r від r=0 до $r = R_3$. В силу рівності (21) одержимо, що

$$\int\limits_0^{R_3} g(r)V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr = \psi(\lambda) \qquad (23)$$

Підставивши у рівність (22) згідно рівності (23) функцію

$$\psi(\beta) = \int\limits_0^{R_3} g(\rho)V^{(\mu)}_{(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho,$$

отримуємо інтегральне зображення (20).

Застосування запровадженого формулами (18),(19) ГІП базується на основній тотожності інтегрального перетворення ГДО $M^{(\mu)}_{(\alpha)}$.

Визначимо величини та функції:

$$d_1 = \sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} : c_{11}, d_2 = \sigma_2 sh R_2 : c_{12}; \tilde{g}_1(\beta) = \int\limits_0^{R_1} g_1(r) V_{(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1} dr,$$

$$\tilde{g}_2(\beta) = \int\limits_{R_1}^{R_2} g_2(r) V_{(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta) shr \sigma_2 dr, \tilde{g}_3(\beta) = \int\limits_{R_2}^{R_3} g_3(r) V_{(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1} dr,$$

$$Z_{(\alpha);i2}^{(\mu),k}(\beta) = (\alpha_{i2}^k d/dr + \beta_{i2}^k) V_{(\alpha);k+1}^{(\mu)}(r,\beta)\mid_{r=R_k}; i,k = 1,2.$$

Теорема 2. (про основну тотожність.) Якщо вектор-функція $f(r) = \{B_{\alpha_1}^*[g_1(r)]; \Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]; B_{\alpha_2}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині $I_2$ , а функції $g_j(r)$ задовільняють крайові умови

$$\lim_{r\to 0}[r^{2\alpha_1+1}(\frac{dg_1}{dr} V_{(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta) - g_1(r)\frac{dV_{(\alpha);1}^{(\mu)}}{dr})] = 0, [(\alpha_{22}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^3) g_3(r)]\mid_{r=R_3} = g_R \quad (24)$$

та умови спряження

$$[(\alpha_{j1}^k d/dr + \beta_{j1}^k) g_k(r) - (\alpha_{j2}^k d/dr + \beta_{j2}^k) g_{k+1}(r)]\mid_{r=R_k} = \omega_{jk}; j,k = 1,2 \quad (25)$$

то має місце основна тотожність ГІП ГДО $M_{(\alpha)}^{(\mu)}$ :

$$H_{(\alpha)}^{(\mu)}[M_{(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)]] = -\beta^2 \tilde{g}(\beta) - \sum_{i=1}^{3} k_i^2 \tilde{g}_i(\beta) + (\alpha_{22}^3)^{-1} V_{(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3,\beta)\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1} g_R +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2} d_k [Z_{(\alpha);12}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{2k} - Z_{(\alpha);22}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{1k}] \quad (26)$$

Доведення: Згідно правила (18)

$$J \equiv H_{(\alpha)}^{(\mu)}[M_{(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)]] = \int\limits_0^{R_3} M_{(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)] V_{(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma(r) dr = \int\limits_0^{R_1} B_{\alpha_1}^*[g_1(r)] \times$$

$$\times V_{(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1} dr + \int\limits_{R_1}^{R_2} \Lambda_{(\mu)}[g_2(r)] V_{(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_2 shr dr +$$

$$+ \int\limits_{R_2}^{R_3} B_{\alpha_2}[g_3(r)] V_{(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1} dr \quad (27)$$

Проінтегруємо в (27) під знаком інтегралів два рази частинами :

$$J=[\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}(\frac{dg_1}{dr}V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(r,\beta)-g_1(r)\frac{dV^{(\mu)}_{(\alpha);1}}{dr})]\,|_0^{R_1}+\int\limits_0^{R_1}g_1(r)(B^*_{\alpha_1}[V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(r,\beta)])\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr+$$

$$+[\sigma_2 shr(\frac{dg_2}{dr}V^{(\mu)}_{(\alpha);2}(r,\beta)-g_2(r)\frac{dV^{(\mu)}_{(\alpha);2}}{dr})]\,|_{R_1}^{R_2}+\int\limits_{R_1}^{R_2}g_2(r)(\Lambda_{(\mu)}[V^{(\mu)}_{(\alpha);2}(r,\beta)])\sigma_2 shr\,dr+$$

$$+[\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}(\frac{dg_3}{dr}V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(r,\beta)-g_3(r)\frac{dV^{(\mu)}_{(\alpha);3}}{dr})]\,|_{R_2}^{R_3}+\int\limits_{R_2}^{R_3}g_3(r)(B_{\alpha_2}[V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(r,\beta)])\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr \tag{28}$$

В точці $r=0$ позаінтегральний член перетворюється в нуль внаслідок умови обмеження із (24).

Якщо $\alpha^3_{22}\neq 0$, то

$$[\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}(\frac{dg_3}{dr}V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(r,\beta)-g_3(r)\frac{dV^{(\mu)}_{(\alpha);3}}{dr})]\,|_{r=R_3}=\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}[(\alpha^3_{22}\frac{dg_3}{dr}+\beta^3_{22}g_3(r))]\,|_{r=R_3}\times$$

$$\times(\alpha^3_{22})^{-1}V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(R_3,\beta)-\frac{\beta^3_{22}}{\alpha^3_{22}}g_3(R_3)V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(R_3,\beta)-g_3(R_3)\frac{dV^{(\mu)}_{(\alpha);3}}{dr}(R_3,\beta)]=$$

$$=(\alpha^3_{22})^{-1}V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(R_3,\beta)\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}g_R-(\alpha^3_{22})^{-1}g_3(R_3)[\alpha^3_{22}d/dr+\beta^3_{22})V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(r,\beta)]\,|_{r=R_3}=$$

$$=(\alpha^3_{22})^{-1}V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(R_3,\beta)\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}g_R-(\alpha^3_{22})^{-1}g_3(R_3)\cdot 0=$$

$$=(\alpha^{+3}_{22})^{-1}V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(R_3,\beta)\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}g_R \tag{29}$$

Нагадаємо, що базова тотожність (4) для випадку , коли умови спряження неоднорідні , набуває вигляду:

$$[u'_k(r)v_k(r)-u_k(r)v'_k(r)]\,|_{r=R_k}=\frac{c_{2k}}{c_{1k}}[u'_{k+1}(r)v_{k+1}(r)-u_{k+1}(r)v'_{k+1}(r)]\,|_{r=R_k}+$$

$$+\frac{1}{c_{1k}}[Z^{(\mu),k}_{(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k}-Z^{(\mu),k}_{(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}] \tag{30}$$

Внаслідок базової тотожності (30) та структури $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ одержуємо :

$$1)\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}(\frac{dg_1}{dr}V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(r,\beta)-g_1(r)\frac{dV^{(\mu)}_{(\alpha);1}}{dr})\,|_{r=R_1}-\sigma_2 shR_1(\frac{dg_2}{dr}V^{(\mu)}_{(\alpha);2}(r,\beta)-$$

$$-g_2(r)\frac{dV^{(\mu)}_{(\alpha);2}}{dr})\,|_{r=R_1}=(\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\cdot\frac{c_{21}}{c_{11}}-\sigma_2 shR_1)(\frac{dg_2}{dr}V^{(\mu)}_{(\alpha);2}(r,\beta)-$$

$$-g_2(r)\frac{dV^{(\mu)}_{(\alpha);2}}{dr})\mid_{r=R_1} + d_1(Z^{(\mu),1}_{(\alpha);12}(\beta)\omega_{21} - Z^{(\mu),1}_{(\alpha);22}(\beta)\omega_{11}) =$$

$$= 0\cdot(\frac{dg_2}{dr}V^{(\mu)}_{(\alpha);2}(r,\beta) - g_2(r)\frac{dV^{(\mu)}_{(\alpha);2}}{dr})\mid_{r=R_1} + d_1(Z^{(\mu),1}_{(\alpha);12}(\beta)\omega_{21} - Z^{(\mu),1}_{(\alpha);22}(\beta)\omega_{11}) =$$

$$= d_1(Z^{(\mu),1}_{(\alpha);12}(\beta)\omega_{21} - Z^{(\mu),1}_{(\alpha);22}(\beta)\omega_{11}); \quad (31)$$

$$2)(\sigma_2 shR_2\frac{c_{22}}{c_{12}} - \sigma_3 R_2^{2\alpha_2+1})(\frac{dg_3}{dr}V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(r,\beta) - g_3(r)\frac{dV^{(\mu)}_{(\alpha);3}}{dr})\mid_{r=R_2} +$$

$$+d_2(Z^{(\mu),2}_{(\alpha);12}(\beta)\omega_{22} - Z^{(\mu),2}_{(\alpha);22}(\beta)\omega_{12}) = d_2(Z^{(\mu),2}_{(\alpha);12}(\beta)\omega_{22} - Z^{(\mu),2}_{(\alpha);22}(\beta)\omega_{12}) \quad (32)$$

Із диференціальних тотожностей

$$[B^*_{\alpha_1} + (\beta^2 + k_1^2)]V^{(\mu)}_{(\alpha);1} \equiv 0, [\Lambda_{(\mu)} + (\beta^2 + k_2^2)]V^{(\mu)}_{(\alpha);2} \equiv 0, [B_{\alpha_2} + (\beta^2 + k_3^2)]V^{(\mu)}_{(\alpha);3} \equiv 0$$

знаходимо:

$$B^*_{\alpha_1}[V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(r,\beta)] = -(\beta^2 + k_1^2)V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(r,\beta)\Lambda_{(\mu)}[V^{(\mu)}_{(\alpha);2}(r,\beta)] = -(\beta^2 + k_2^2)V^{(\mu)}_{(\alpha);2}(r,\beta),$$

$$B_{\alpha_2}[V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(r,\beta)] = -(\beta^2 + k_3^2)V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(r,\beta) \quad (33).$$

Якщо тепер в (28) підставити одержані рівності (29), (31), (32) та (33) й роз'єднати інтеграли на два доданки , то отримаємо базову тотожність (26).

Правила (18), (19) та (26) складають математичний апарат для розв'язання відповідних задач математичної фізики неоднорідних структур .

Логічну схему застосування запровадженого ГІП покажемо на одній із типових задач.

Задача теплопровідності . Побудувати обмежений в області $D_2 = \{(t,r) : t \in (0,\infty); r \in I_2\}$ розв'язок системи рівнянь теплопровідності параболічного типу [8]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - B^*_{\alpha_1}[u_1] = f_1(t,r), r \in (0,R_1)\\
&\frac{\partial u_2}{\partial t} - \gamma_2^2 u_2 - \Lambda_{(\mu)}[u_2] = f_2(t,r), r \in (R_1,R_2)\\
&\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - B_{\alpha_2}[u_3] = f_3(t,r), r \in (R_2,R_3)
\end{aligned} \quad (34)$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)\mid_{t=0} = g_j(r), r \in (R_{j-1},R_j), j = \bar{1,3}, R_0 = 0 \quad (35)$$

крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0}[r^\gamma u_1(t,r)] = 0, [(\alpha_{22}^3\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^3)u_3(t,r)]\mid_{r=R_3} = g_R(t) \quad (36)$$

та умовами спряження

$$[(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^k)u_k(t,r)-(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^k)u_{k+1}(t,r)]\,|_{r=R_k}=\omega_{jk}(t);j,k=1,2 \qquad (37).$$

Розв'язання. Запишемо систему (34) та початкові умови (35) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix}(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_1^2-B_{\alpha_1}^*)u_1(t,r)\\(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_2^2-\Lambda_{(\mu)})u_2(t,r)\\(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_3^2-B_{\alpha_2})u_3(t,r)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(t,r)\\f_2(t,r)\\f_3(t,r)\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}u_1(t,r)\\u_2(t,r)\\u_3(t,r)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}g_1(r)\\g_2(r)\\g_3(r)\end{bmatrix} \qquad (38)$$

Інтегральний оператор $H_{(\alpha)}^{(\mu)}$ згідно правила (18) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{(\alpha)}^{(\mu)}[...]=[\int_0^{R_1}...V_{(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr\int_{R_1}^{R_2}...V_{(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_2 shr dr$$

$$\int_{R_2}^{R_3}...V_{(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr] \qquad (39)$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (39) до задачі (38)за правилом множення матриць . Внаслідок основної тотожності (26) одержуємо задачу Коші :

$$(\frac{d}{dt}+\omega^2)\tilde{u}(t,\beta)=F(t,\beta),\tilde{u}(t,\beta)\,|_{t=0}=\tilde{g}(\beta),\omega^2=\beta^2+\gamma^2 \qquad (40)$$

У рівностях (40) $\gamma^2=max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\};\tilde{g}(\beta)=\sum_{i=1}^{3}\tilde{g}_i(\beta),\tilde{u}(\beta)=\sum_{i=1}^{3}\tilde{u}_i(t,\beta);$

$$F(t,\beta)=\tilde{f}(t,\beta)+\sum_{k=1}^{2}d_k[Z_{(\alpha);12}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{2k}(t)-Z_{(\alpha);22}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{1k}(t)]+$$

$$+(\alpha_{22}^3)^{-1}V_{(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3,\beta)\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}g_R(t).$$

Розвязком задачі Коші (44) є функція

$$\tilde{u}(t,\beta)=e^{-\omega^2 t}\tilde{g}(\beta)+\int_0^t e^{-\omega(t-\tau)}F(\tau,\beta)d\tau \qquad (41)$$

Інтегральний оператор $H_{(\alpha)}^{-(\mu)}$ згідно правила (19) як обернений до (39) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_{(\alpha)}^{-(\mu)}[...]=\begin{bmatrix}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty ...V_{(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta\\ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty ...V_{(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta\\ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty ...V_{(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta\end{bmatrix} \tag{42}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (42) за правилом множення матриць до матриці елемента $[\tilde{u}(t,\beta)]$, де функція $\tilde{u}(t,\beta)$ визначена формулою (41). У результаті низки елементарних перетворень одержуємо інтегральне зображення єдиного аналітичного розв'язку задачі теплопровідності (34)-(37):

$$u_j(t,r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \tilde{u}(t,\beta)V_{(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta=\int\limits_0^t\int\limits_0^{R_1}\mathcal{H}_{(\alpha);j1}^{(\mu)}(t-\tau,r,\rho)[f_1(\tau,\rho)+$$

$$+\delta_+(\tau)g_1(\rho)]\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}_{(\alpha);j2}^{(\mu)}(t-\tau,r,\rho)[f_2(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_2(\rho)]\sigma_2 sh\rho d\rho d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{R_2}^{R_3}\mathcal{H}_{(\alpha);j3}^{(\mu)}(t-\tau,r,\rho)[f_3(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_3(\rho)]\sigma_3\rho^{2\alpha_1-1}d\rho d\tau+\int\limits_0^t W_{(\alpha);3j}^{(\mu)}(t-\tau,r)g_R(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}d_k\int\limits_0^t[\mathcal{R}_{(\alpha);12}^{(\mu),kj}(t-\tau,r)\omega_{2k}(\tau)-\mathcal{R}_{(\alpha);22}^{(\mu),kj}(t-\tau,r)\omega_{1k}(\tau)]d\tau,\ j=\overline{1,3} \tag{43}$$

У рівностях (43) беруть участь: 1) породжені неоднорідністю системи (34) функції впливу

$$\mathcal{H}_{(\alpha);jk}^{(\mu)}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\omega^2 t}V_{(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)V_{(\alpha);k}^{(\mu)}(\rho,\beta)\Omega_{(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta;\ j,k=\overline{1,3} \tag{44}$$

2)породжені крайовою умовою в точці $r=R_3$ функції Гріна

$$W_{(\alpha);3j}^{(\mu)}(t,r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\omega^2 t}(\alpha_{22}^3)^{-1}V_{(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3,\beta)V_{(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta\sigma_3R_3^{2\alpha_2+1};\ j=\overline{1,3}; \tag{45}$$

3)породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}_{(\alpha);i2}^{(\mu),jk}(t,r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\omega^2 t} Z_{(\alpha);i2}^{(\mu),k}(\beta) V_{(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta; i,k = 1,2; j = \overline{1,3} \qquad (46)$$

Зауваження 1. Якщо $\gamma^2 = \gamma_1^2 > 0$, то $k_1^2 = 0, k_2^2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \geq 0, k_3^2 = \gamma_1^2 - \gamma_3^2 \geq 0$; якщо $\gamma^2 = \gamma_2^2 > 0$, то $k_1^2 = \gamma_2^2 - \gamma_1^2 \geq 0, k_2^2 = 0; k_3^2 = \gamma_2^2 - \gamma_3^2 \geq 0$; якщо $\gamma^2 = \gamma_3^2 > 0$, то $k_1^2 = \gamma_3^2 - \gamma_1^2 \geq 0, k_2^2 = \gamma_3^2 - \gamma_2^2 \geq 0, k_3^2 = 0$.

Зауваження 2. Інтегральне зображення даної задачі теплопровідності поліпараметричне . Структура головних розв'язків дозволяє безпосередньо вибором параметрів виділити будь-який практично важливий випадок (в рамках даної моделі ) .

Зауваження 3. Розв'язок (43) задачі теплопровідності (34) - (37) носить алгоритмічний характер . Це дає змогу застосувати його як в теоретичних дослідженнях , так і в числових розрахунках .

За наведеною логічною схемою можна одержати інтегральне зображення розв'язку відповідних стаціонарних та динамічних задач.

## Література

1. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. - М.: Наука, 1965. - 328с.

2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М .: Физматгиз. 1959. - 468с.

3. Конет І.М.,Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока.- Чернівці : Прут,2002.-248с.

4. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лебєдева.-Чернівці:Прут, 2002.-280с.

5. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя ,Лежандра). Частина 1 . - Тернопіль: Економ. думка,2004.-368с.

6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука. 1971. - 432с.

7. Ленюк М.П.,Ленюк О.М. Гібридне інтегральне перетворення Лежандра-Фур'є -Ейлера на полярній осі //Науковий вісник Чернівецького університету : Зб.наук.пр.Вип.528. Математика .-Чернівці : Чернівец. нац. ун-т, 2010.-С.80-87.

8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972. - 735с.