

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПАСИВНОГО ФІЛЬТРА НИЖНІХ ЧАСТОТ З ВИКОРИСТАННЯМ РЕГУЛЯРНОЇ ЛІНІЇ ПЕРЕДАЧІ

В статті наведено математичну модель пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі та представлені аналітичні вирази для визначення елементів вдосконаленої еквівалентної схеми заміщення пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі. Отримано операторну функцію опору еквівалентної схеми заміщення пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі у вигляді неперервного дробу та дробово-раціональної функції. Запропоновані аналітичні вирази для визначення нулів та полюсів операторної функції опору у вигляді дробово-раціональної функції пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі.

Ключові слова: математична модель, пасивний фільтр нижніх частот, регулярна лінія передачі, моделювання, еквівалентна схема заміщення.

D.A. MAKARYSHKIN, N.M. SAMARUK
Khmelnytsky National University

MATHEMATICAL MODEL OF THE PASSIVE LOW-PASS FILTER USING REGULAR TRANSMISSION LINE

The paper presents the mathematical model of the passive low-pass filter using regular transmission line. Developed improved equivalent circuit and modified nonlinear equivalent circuit of the passive low-pass filter using regular transmission line in a continuous fractional scheme, which is synthesized by a second form of Kauer. Presented analytical expressions for the determination of elements of the modified equivalent circuit and elements improved equivalent circuit of the passive low-pass filter using regular transmission line. The obtained the operator-valued impedance functions of the passive low-pass filter using regular transmission line in the form of a continued fraction and fractional-rational function, for which the positive real coefficients polynomials of the numerator and denominator are functions of the regular transmission line parameters. The proposed analytical expressions for the determination zeros and poles of the operator-valued impedance functions in the form of a fractional-rational function of the passive low-pass filter using regular transmission line.

Keywords: mathematical model, passive low-pass filter, regular transmission line, modelling, equivalent circuit.

Постановка проблеми. Пасивні прилади є важливою складовою частиною компонентної бази сучасної радіоелектронної апаратури. Вони виконують різні функції по обробці сигналів: ділення, додавання, фазовий зсув, узгодження та задане розузгодження, трансформацію хвильових опорів, фільтрацію та інші функції. Оптимізація амплітудно-частотних фазо-частотних характеристик функціональних приладів в максимально можливому широкому робочому діапазоні не втрачає своєї актуальності. Найбільш перспективними для досягнення максимально можливої широкої робочої смуги частот є базові елементи, які створюють структури пасивних функціональних приладів. До них відносяться відрізки одиночних та зв'язаних регулярних ліній передачі з Т – хвилями. Особливий інтерес представляє синтез та моделювання пасивних фільтрів низької частоти з використанням регулярної лінії передачі [1].

В [1] встановлено, що моделювання пасивних фільтрів нижньої частоти з використанням регулярної лінії передачі здійснюються на моделях з зосередженими параметрами, користуючись еквівалентною схемою заміщення чотириполюсника Т-подібною або П-подібною. Також моделювання пасивних фільтрів нижньої частоти з використанням регулярних ліній передачі здійснюється ланковою схемою, яка представляє собою каскадне включення декількох симетричних однакових чотириполюсників [1].

Недоліком Т-подібної або П-подібної еквівалентної схеми пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі є те, що параметри такого чотириполюсника можуть бути розраховані тільки на фіксованій частоті та їхній розрахунок обмежений граничною довжиною [1].

Недоліком використання ланкової моделі для моделювання пасивних фільтрів нижньої частоти з використанням регулярної лінії передачі є обмежений частотний діапазон. В ланковому еквіваленті спостерігається експоненціальне зменшення амплітуди сигналу від каскаду до каскаду, яке пов'язано не з ефектом омичних втрат, а з виникненням розузгодження окремих елементарних каскадів пасивного чотириполюсника [1].

Тому розробка математичної моделі пасивних фільтрів низької частоти з використанням регулярної лінії передачі є актуальною науковою задачею і має важливе значення для підвищення ефективності проектування та

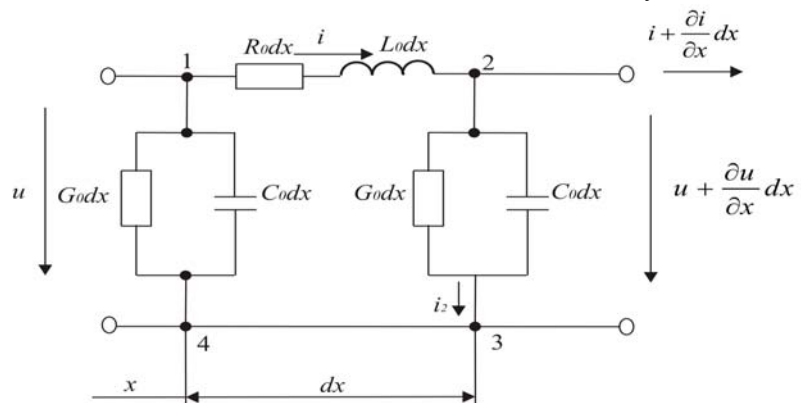


Рис. 1. Схема заміщення регулярної лінії передачі довжиною dx

покращення характеристик цього класу пристроїв.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Регулярну лінію передачі можна представити у вигляді множини послідовно з'єднаних нескінчених елементів довжиною dx , кожен з яких має активний опір $R_0 dx$ та індуктивність $L_0 dx$, активну провідність $G_0 dx$ та ємність $C_0 dx$ (рис. 1) [1–3].

Опір $R_0 dx$ та індуктивність $L_0 dx$ будемо рахувати включеними в один провід. Позначимо через x відстань від початку лінії до поточного елементу її довжини. Для елемента лінії довжиною dx складемо рівняння по першому закону Кіргофа для вузла 2 і по другому закону Кіргофа для контура 12341 (рис. 1).

Отримаємо рівняння регулярної лінії, які в літературі часто називають телеграфними [1–3]

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases} \quad (1)$$

Розв'язок отриманої системи рівнянь в часткових похідних при визначених початкових та граничних умовах дає можливість визначити струм і напругу, як функцію двох незалежних змінних: просторової координати x , яка визначає відстань від початку лінії, і часу t . Ці рівняння є справедливими при будь-якій зміні струму та напруги у часі.

При встановлених режимах струми і напруги змінюється у часі по періодичному закону. Представив періодичні функції часу у вигляді ряду Фур'є, можна провести розрахунок окремо для кожної синусоїдальної складової цього ряду і внаслідок лінійності кола отримати результуючий процес, користуючись методом накладання. Тому достатньо провести аналіз процесів в лінії при синусоїдальних струмах та напругах.

Нехай струм і напруга в лінії змінюються у часі по синусоїдальному закону з кутовою швидкістю ω . Користуючись комплексним методом, представимо рівняння лінії для комплексних діючих напруг \dot{U} та \dot{I} [1–3]:

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{U}}{dx} = (R_0 + j\omega L_0)\dot{I}, \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} = (G_0 + j\omega C_0)\dot{U}. \end{cases} \quad (2)$$

Комплексні \dot{U} та \dot{I} є функціями тільки x , і, відповідно, рівняння в часткових похідних для миттєвих u та i перейшли в звичайні диференціальні рівняння для \dot{U} та \dot{I} .

Виразимо комплексну амплітуду струму \dot{I} у першому рівнянні через комплексну амплітуду напруги \dot{U} із другого рівняння, а комплексну амплітуду напруги \dot{U} у другому рівнянні через комплексну амплітуду струму \dot{I} із першого рівняння. Отримаємо систему регулярних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку (3) для елементарної ділянки dx [1–3].

$$\begin{cases} \frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = \gamma^2 \dot{U}, \\ \frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = \gamma^2 \dot{I}. \end{cases} \quad (3)$$

де $\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta$ – коефіцієнт розповсюдження лінії, α – коефіцієнт затухання, β – коефіцієнт фази.

Загальний розв'язок першого однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку із системи (3) шукають для \dot{U} елементарної ділянки dx у вигляді (4) [1–3].

$$\dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}. \quad (4)$$

де A_1 та A_2 – константи інтегрування.

Якщо підставити вираз комплексної напруги \dot{U} (4) у перше рівняння системи (2), то можна отримати вираз для комплексної амплітуди струму \dot{I} елементарної ділянки регулярної лінії передачі dx (5) [1–3].

$$\dot{I} = \frac{1}{Z} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) \quad (5)$$

де $Z = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$ – хвильовий або характеристичний опір лінії.

В подальшому будемо позначати струм та напругу на початку лінії ($x=0$) індексом 1 (\dot{I}_1, \dot{U}_1) та в кінці лінії ($x=l$, l – довжина лінії) – індексом 2 (\dot{I}_2, \dot{U}_2).

Для визначення постійних інтегрування A_1 та A_2 достатньо знати дві з цих чотирьох величин.

Виразимо ці постійні через напругу \dot{U}_1 та струм \dot{I}_1 на початку лінії при $x=0$

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_1 + A_2 \text{ та } \dot{I}_1 = \frac{1}{Z}(A_1 + A_2); \\ A_1 &= \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z) \text{ та } A_2 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x}; \\ \dot{I} = \frac{1}{Z}[\frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x} - \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x}]. \end{cases} \quad (6)$$

Ці вирази для напруги \dot{U} і струму \dot{I} в будь-якій точці регулярної лінії передачі можна записати також в іншій формі, використовуючи співвідношення:

$$\frac{1}{2}(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) = ch\gamma x \text{ та } \frac{1}{2}(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) = sh\gamma x.$$

Отримаємо

$$\dot{U} = \dot{U}_1 ch\gamma x - \dot{I}_1 Z sh\gamma x; \quad \dot{I} = \dot{I}_1 ch\gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z} sh\gamma x.$$

Значення напруги та струму в кінці лінії отримують, якщо прийняти $x=l$:

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 ch\gamma l - \dot{I}_1 Z sh\gamma l; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_1 ch\gamma l - \frac{\dot{U}_1}{Z} sh\gamma l.$$

З цих рівнянь можна визначити \dot{I}_1, \dot{U}_1 через \dot{I}_2, \dot{U}_2 . Маємо

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 ch\gamma l + \dot{I}_2 Z sh\gamma l, \\ \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z} sh\gamma l + \dot{I}_2 ch\gamma l. \end{cases} \quad (7)$$

Порівнюючи рівняння регулярної лінії передачі (7) з рівняннями чотириполюсника в А-параметрах (7) [4, 5]

$$\begin{cases} U_1 = AU_2 + BI_2, \\ I_1 = CU_2 + DI_2. \end{cases} \quad (8)$$

можна зробити висновок, що регулярна лінія передачі – це симетричний чотириполюсник, коефіцієнти якого

$$A = D = ch\gamma l, \quad (9)$$

$$B = Z sh\gamma l, \quad (10)$$

$$C = \frac{sh\gamma l}{Z}. \quad (11)$$

Для симетричного пасивного чотириполюсника рівняння зв'язку коефіцієнтів системи рівнянь в А-формі

$$AD - BC = ch^2\gamma l - sh^2\gamma l = 1. \quad (12)$$

Як і будь-який чотириполюсник, пасивний фільтр низької частоти з використанням регулярної лінії передачі може бути замінений Т- або П-подібною, в даному випадку еквівалентною схемою. Параметри еквівалентних схем обчислюються через постійні A, B, C та D [5, 6].

Метою статті є розробка математичної моделі пасивних фільтрів низької частоти з використанням регулярної лінії передачі.

Виклад основного матеріалу дослідження. Для підвищення точності математичного опису параметрів і характеристик пасивних фільтрів нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі автори пропонують використовувати наступний підхід [1]:

1. Враховуючи, що $x'=l-x$ (x' – відстань від кінця регулярної лінії передачі) представити систему рівнянь (7) у наступному вигляді

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \frac{\dot{U}_{вих} + Z\dot{I}_{вих}}{2} e^{\gamma(l-x)} + \frac{\dot{U}_{вих} - Z\dot{I}_{вих}}{2} e^{-\gamma(l-x)}, \\ \dot{I}_1 = \frac{1}{Z} \left(\frac{\dot{U}_{вих} + Z\dot{I}_{вих}}{2} e^{\gamma(l-x)} - \frac{\dot{U}_{вих} - Z\dot{I}_{вих}}{2} e^{-\gamma(l-x)} \right). \end{cases} \quad (13)$$

2. Враховуючи, що вихідний опір регулярної лінії передачі

$$Z_{вих} = \frac{\dot{U}_{вих}}{\dot{I}_{вих}}. \quad (14)$$

після математичних перетворень отримаємо систему виразів (15) для комплексної амплітуди напруги \dot{U} та струму \dot{I} у будь-якій точці регулярної лінії передачі.

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \frac{\dot{U}_{вих} + Z\dot{I}_{вих}}{2} \left(e^{\gamma x'} + \frac{Z_{вих} - Z}{Z_{вих} + Z} e^{-\gamma x'} \right), \\ \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{вих} + Z\dot{I}_{вих}}{2Z} \left(e^{\gamma x'} - \frac{Z_{вих} - Z}{Z_{вих} + Z} e^{-\gamma x'} \right). \end{cases} \quad (15)$$

3. Визначити комплексний вхідний опір $Z_{вх}$ регулярної лінії передачі у будь-якій довільній точці на відстані x' від кінця регулярної лінії передачі

$$Z_{вх}(j\omega) = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z \frac{e^{\gamma x'} + \frac{Z_{вих} - Z}{Z_{вих} + Z} e^{-\gamma x'}}{e^{\gamma x'} - \frac{Z_{вих} - Z}{Z_{вих} + Z} e^{-\gamma x'}}. \quad (16)$$

В режимі холостого ходу, коли $Z_{вих} = \infty$, рівняння (16) можна записати у вигляді (17).

$$Z_{вх} = Z \operatorname{cth} \gamma x'. \quad (17)$$

Зробимо заміну Z та γ їх виразами. В результаті отримаємо вираз (18), який відповідає еквівалентній схемі заміщення регулярної лінії передачі

$$Z_{вх}(j\omega) = \frac{\sqrt{Z_0}}{\sqrt{Y_0}} \operatorname{cth}(\sqrt{Z_0 Y_0} x') = \frac{\sqrt{R_0 + j\omega L_0}}{\sqrt{G_0 + j\omega C_0}} \operatorname{cth}(\sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} x'). \quad (18)$$

У виразі комплексного вхідного опору (18) гіперболічний котангенс представити у вигляді неперервного дробу використовуючи наступне співвідношення

$$\operatorname{cthx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{3}{x} + \frac{1}{\frac{5}{x} + \frac{1}{\frac{7}{x} + \frac{1}{\frac{9}{x} + \frac{1}{\frac{11}{x} + \frac{1}{\frac{13}{x} + \frac{1}{\frac{15}{x} + \dots}}}}}}}}}. \quad (19)$$

Тоді

$$Z_{вх}(j\omega) = \frac{\sqrt{Z_0}}{\sqrt{Y_0}} \left(\frac{1}{\sqrt{Z_0 Y_0} x'} + \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{Z_0 Y_0} x'} + \frac{1}{\frac{5}{\sqrt{Z_0 Y_0} x'} + \frac{1}{\frac{7}{\sqrt{Z_0 Y_0} x'} + \frac{1}{\frac{9}{\sqrt{Z_0 Y_0} x'} + \frac{1}{\frac{11}{\sqrt{Z_0 Y_0} x'} + \frac{1}{\frac{13}{\sqrt{Z_0 Y_0} x'} + \frac{1}{\sqrt{Z_0 Y_0} x'} + \dots}}}}}}}} \right), \quad (20)$$

після математичних перетворень отримаємо

$$Z_{ex}(j\omega) = \frac{1}{Y_0x'} + \frac{1}{\frac{3}{Z_0x'} + \frac{5}{Y_0x'} + \frac{7}{Z_0x'} + \frac{9}{Y_0x'} + \frac{11}{Z_0x'} + \frac{13}{Y_0x'} + \frac{15}{Z_0x'} + \dots} \quad (21)$$

Вираз (21) представимо у вигляді співвідношення (22)

$$Z_{ex}(j\omega) = \frac{1}{Y_0x'} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{3}{Z_0x'} + \frac{5}{Y_0x'} + \frac{7}{Z_0x'} + \frac{9}{Y_0x'} + \frac{11}{Z_0x'} + \frac{13}{Y_0x'} + \frac{15}{Z_0x'} + \dots}} \quad (22)$$

5. Використовуючи вираз комплексного опору Z_{ex} у вигляді неперервного дроби (22) побудувати еквівалентну схему заміщення, яка відповідає неперервній дробовій схемі по другій формі Кауера (рис. 2) [6].

Аналізуючи вдосконалену еквівалентну схему заміщення регулярної лінії передачі, можна записати вирази для визначення елементів цієї схеми через її погонні параметри Z_0 та Y_0

$$Y_n = \frac{Y_0x'}{n}, \quad n=1, 5, 9, 13, 17, 21, \dots \quad (23)$$

для повздовжніх елементів

$$Z_n = \frac{Z_0x'}{m}, \quad m=3, 7, 11, 15, 19, 23, \dots \quad (24)$$

для поперечних елементів

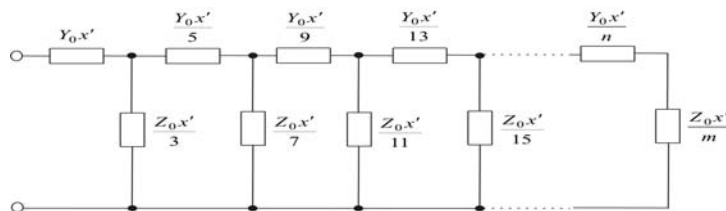


Рис. 2. Модифікована еквівалентна схема заміщення регулярної лінії передачі у вигляді неперервної дробової схеми, яка синтезована по другій формі Кауера

Вирази (23) та (24) можна представити у вигляді загальних співвідношень (25) та (26) відповідно

$$Y_n = \frac{Y_0x'}{4n-3} \quad \text{при } n \geq 2 \quad (25)$$

$$Z_n = \frac{Z_0x'}{4n-5} \quad \text{при } n \geq 2 \quad (26)$$

З урахуванням, того що $Z_0 = R_0 + j\omega L_0$ та $Y_0 = G_0 + j\omega C_0$ формули (25) та (26) отримують наступний вигляд

$$Y_n = \frac{Y_0x'}{4n-3} = \frac{(G_0 + j\omega C_0)x'}{4n-3} = \frac{G_0x' + j\omega C_0x'}{4n-3} = \frac{G_0x'}{4n-3} + j\omega \frac{C_0x'}{4n-3} \quad \text{при } n \geq 2 \quad (27)$$

$$Z_n = \frac{Z_0x'}{4n-5} = \frac{(R_0 + j\omega L_0)x'}{4n-5} = \frac{R_0x' + j\omega L_0x'}{4n-5} = \frac{R_0x'}{4n-5} + j\omega \frac{L_0x'}{4n-5} \quad \text{при } n \geq 2 \quad (28)$$

Звідки можна визначити параметри запропонованої еквівалентної схеми заміщення регулярної лінії передачі через її первинні параметри

$$\frac{1}{1 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \dots + \alpha_n p^n} = 1 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots + c_m p^m \dots, \tag{37}$$

$$\frac{1}{1 + \beta_1 p + \beta_2 p^2 + \dots + \beta_k p^k} = 1 + d_1 p + d_2 p^2 + \dots + d_l p^l \dots \tag{38}$$

Коефіцієнти α_n в (35) та (37), а також β_k в (36) та (38) співпадають. Коефіцієнти c_m та d_l послідовностей (37) і (38) можуть бути знайдені із лінійного рекурентного рівняння

$$c_m = -(\alpha_1 c_{m-1} + \alpha_2 c_{m-2} + \dots + \alpha_n c_{m-n}), \quad c_0 = 1, \quad c_1 = -\alpha_1, \tag{39}$$

$$d_l = -(\beta_1 d_{l-1} + \beta_2 d_{l-2} + \dots + \beta_k d_{l-k}), \quad d_0 = 1, \quad d_1 = -\beta_1. \tag{40}$$

Визначаючи нулі та полюса дробово-раціональної функції (34), необхідно знайти корні алгебраїчних рівнянь (41) та (42) відповідно

$$p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} p + \alpha_n = 0, \tag{41}$$

$$p^k + \beta_1 p^{k-1} + \dots + \beta_{k-1} p + \beta_k = 0. \tag{42}$$

Для цього автори пропонують використати формули Ейткена [7–9]:

а) вирази (43)–(46) для знаходження нулів поліному чисельника дробово-раціональної функції (34)

$$p_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_{m+1}}{c_m}, \tag{43}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+2} & c_{m+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} \end{vmatrix}} \cdot \frac{c_{m+1}}{c_m} \right) = \frac{p_1 p_2}{p_1} = p_2, \tag{44}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & c_{m+3} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+4} \\ c_{m+3} & c_{m+4} & c_{m+5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & c_{m+3} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+4} \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+2} & c_{m+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} \end{vmatrix}} \right) = \frac{p_1 p_2 p_3}{p_1 p_2} = p_3, \tag{45}$$

$$p_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+n} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & \dots & c_{m+n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m+n} & c_{m+n+1} & \dots & c_{m+2n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \dots & c_{m+n-1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m+n-1} & c_{m+n} & \dots & c_{m+2n-2} \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+n-1} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & \dots & c_{m+n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m+n-1} & c_{m+n} & \dots & c_{m+2n-3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \dots & c_{m+n-2} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m+n-2} & c_{m+n-1} & \dots & c_{m+2n-4} \end{vmatrix}} \right). \tag{46}$$

б) вирази (47)–(50) для знаходження полюсів поліному знаменника дробово-раціональної функції (34)

$$p_1 = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{d_{l+1}}{d_l}, \tag{47}$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{\begin{vmatrix} d_{l+1} & d_{l+2} \\ d_{l+2} & d_{l+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_l & d_{l+1} \\ d_{l+1} & d_{l+2} \end{vmatrix}} \cdot \frac{d_{l+1}}{d_l} \right) = \frac{p_1 p_2}{p_1} = p_2, \tag{48}$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{\begin{vmatrix} d_{l+1} & d_{l+2} & d_{l+3} \\ d_{l+2} & d_{l+3} & d_{l+4} \\ d_{l+3} & d_{l+4} & d_{l+5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_l & d_{l+1} & d_{l+2} \\ d_{l+1} & d_{l+2} & d_{l+3} \\ d_{l+2} & d_{l+3} & d_{l+4} \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} d_{l+1} & d_{l+2} \\ d_{l+2} & d_{l+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_l & d_{l+1} \\ d_{l+1} & d_{l+2} \end{vmatrix}} \right) = \frac{p_1 p_2 p_3}{p_1 p_2} = p_3, \quad (49)$$

$$p_k = \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{\begin{vmatrix} d_{l+1} & d_{l+2} & \dots & d_{l+k} \\ c_{l+2} & c_{l+3} & \dots & c_{l+k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{l+k} & d_{l+k+1} & \dots & d_{l+2k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_l & d_{l+1} & \dots & d_{l+k-1} \\ d_{l+1} & d_{l+2} & \dots & d_{l+k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{l+k-1} & d_{l+k} & \dots & d_{l+2k-2} \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} d_{l+1} & d_{l+2} & \dots & d_{l+k-1} \\ d_{l+2} & d_{l+3} & \dots & d_{l+k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{l+k-1} & d_{l+k} & \dots & d_{l+2k-3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_l & d_{l+1} & \dots & d_{l+k-2} \\ d_{l+1} & d_{l+2} & \dots & d_{l+k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{l+k-2} & d_{l+k-1} & \dots & d_{l+2k-4} \end{vmatrix}} \right). \quad (50)$$

Тут $|p_1| \geq |p_2| \geq |p_3| \geq \dots \geq |p_n|$ для нулів та $|p_1| \geq |p_2| \geq |p_3| \geq \dots \geq |p_k|$ для полюсів дробово-раціональної функції пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі (34). Однак, недолік формул Ейткена, полягає, у тому що, використовуючи їх можна знаходити тільки дійсні нулі та полюса дробово-раціональної функції пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі (34). Спосіб знаходження старших за модулем дійсних нулів та полюсів дробово-раціональної функції (34), які описуються виразами (43) та (47), як відомо, належать Д. Бернуллі.

Застосуємо запропонований у [7, 8] r/φ – алгоритм сумування розбіжних неперервних дробів до визначення комплексних нулів та полюсів дробово-раціональної функції пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі (34).

Запишемо вирази (43)–(46) для знаходження нулів поліному чисельника та вирази (47)–(50) для знаходження полюсів поліному знаменника дробово-раціональної функції пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі (34) у розгорнутому вигляді. У результаті нескладних перетворень отримаємо конструкції із співвідношень визначників матриць Теплиця, діагональними елементами яких є коефіцієнти вихідних рівнянь (41) та (42) [7, 8].

Вираз (43) можна представити співвідношенням визначників (51):

$$p_1 = - \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}, \quad (51)$$

Наступні нулі поліному чисельника дробово-раціональної функції (34) записуються наступним чином:

$$p_2 = - \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}, \quad (52)$$

$$p_3 = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & -\alpha_7 & \dots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}, \quad (53)$$

$$p_n = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_n & -\alpha_{n+1} & -\alpha_{n+2} & -\alpha_{n+3} & \dots \\ -\alpha_{n-1} & -\alpha_n & -\alpha_{n+1} & -\alpha_{n+2} & \dots \\ -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n & -\alpha_{n+1} & \dots \\ -\alpha_{n-3} & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_{n-1} & -\alpha_n & -\alpha_{n+1} & -\alpha_{n+2} & \dots \\ -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n & -\alpha_{n+1} & \dots \\ -\alpha_{n-3} & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n & \dots \\ -\alpha_{n-4} & -\alpha_{n-3} & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}. \quad (54)$$

Вираз (47) можна представити співвідношенням визначників (55):

$$p_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & -\beta_4 & \dots \\ -1 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\beta_1 & -\beta_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\beta_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\beta_1 & -\beta_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\beta_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}, \quad (55)$$

Наступні полюса поліному знаменника дробово-раціональної функції (34) записуються наступним чином:

$$p_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\beta_2 & -\beta_3 & -\beta_4 & -\beta_5 & \dots \\ -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & -\beta_4 & \dots \\ -1 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\beta_1 & -\beta_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & -\beta_4 & \dots \\ -1 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\beta_1 & -\beta_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\beta_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}, \quad (56)$$

$$P_3 = \frac{\begin{vmatrix} -\beta_3 & -\beta_4 & -\beta_5 & -\beta_6 & -\beta_7 & \dots \\ -\beta_2 & -\beta_3 & -\beta_4 & -\beta_5 & -\beta_6 & \dots \\ -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & -\beta_4 & -\beta_5 & \dots \\ -1 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & -\beta_4 & \dots \\ 0 & -1 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\beta_2 & -\beta_3 & -\beta_4 & -\beta_5 & -\beta_6 & \dots \\ -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & -\beta_4 & -\beta_5 & \dots \\ -1 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & -\beta_4 & \dots \\ 0 & -1 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\beta_1 & -\beta_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}, \quad (57)$$

$$P_k = \frac{\begin{vmatrix} -\beta_k & -\beta_{k+1} & -\beta_{k+2} & -\beta_{k+3} & \dots \\ -\beta_{k-1} & -\beta_k & -\beta_{k+1} & -\beta_{k+2} & \dots \\ -\beta_{k-2} & -\beta_{k-1} & -\beta_k & -\beta_{k+1} & \dots \\ -\beta_{k-3} & -\beta_{k-2} & -\beta_{k-1} & -\beta_k & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\beta_{k-1} & -\beta_k & -\beta_{k+1} & -\beta_{k+2} & \dots \\ -\beta_{k-2} & -\beta_{k-1} & -\beta_k & -\beta_{k+1} & \dots \\ -\beta_{k-3} & -\beta_{k-2} & -\beta_{k-1} & -\beta_k & \dots \\ -\beta_{k-4} & -\beta_{k-3} & -\beta_{k-2} & -\beta_{k-1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} -\beta_k & -\beta_{k+1} & -\beta_{k+2} & \dots \\ -\beta_{k-1} & -\beta_k & -\beta_{k+1} & \dots \\ -\beta_{k-2} & -\beta_{k-1} & -\beta_k & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\beta_{k-1} & -\beta_k & -\beta_{k+1} & \dots \\ -\beta_{k-2} & -\beta_{k-1} & -\beta_k & \dots \\ -\beta_{k-3} & -\beta_{k-2} & -\beta_{k-1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}. \quad (58)$$

Відношення визначників (51)–(58) виражають нулі та полюса дробово-раціональної функції пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі (34) через коефіцієнти алгебраїчних рівнянь (41) та (42). Ці коефіцієнти, які є функціями погонних параметрів регулярної лінії передачі називають функціями $P_i^{(n)}$ нулів та $P_i^{(k)}$ полюсів дробово-раціональної функції пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі і позначають наступним чином

$$P_i^{(n)} = P_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad (59)$$

$$P_i^{(k)} = P_i(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k). \quad (60)$$

Нескладно по виразах (51)–(58) записати аналітичні вирази для представлення корнів алгебраїчних рівнянь (41) та (42) шостої, сьомої, і, в загальності, довільної степені n поліному чисельника та довільної степені k поліному знаменника дробово-раціональної функції пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі через коефіцієнти вихідного рівняння (41) та (42) [7].

Для комплексних нулів та полюсів дробово-раціональної функції пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі, які визначаються по виразах (51)–(58), безпосередньо обчислити їх значення неможливо. В цьому випадку необхідно додатково використати r/φ - алгоритм. Модуль шуканих комплексних нулів та полюсів дробово-раціональної функції пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі визначаються за виразами (61) та (62) відповідно [7]:

$$r_i = \lim_{z \rightarrow \infty} z \sqrt{\prod_{m=1}^z |P_{im}^n|}, \quad (61)$$

$$r_j = \lim_{z \rightarrow \infty} z \sqrt{\prod_{m=1}^z |P_{im}^k|}. \quad (62)$$

де P_{im}^n – m -й відповідний дріб виразів (51)–(54), P_{im}^k – m -й відповідний дріб виразів (55)–(58).

Аргумент шуканих комплексних нулів та полюсів дробово-раціональної функції пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі визначаються за виразами (63) та (64) відповідно [7]:

$$|\varphi_i| = \pi \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{K_{zn}}{z}, \quad (63)$$

$$|\varphi_j| = \pi \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{K_{zk}}{z}. \quad (64)$$

де K_{zn} – число від'ємних відповідних дробів із z відповідних дробів P_{iz}^n , K_{zk} – число від'ємних

відповідних дробів із z відповідних дробів P_{iz}^k .

Висновки. Вибрано адекватну математичну модель пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі, яка складається із еквівалентної схеми заміщення та функції комплексного опору. Функцію комплексного опору еквівалентної схеми заміщення пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі можна записати у вигляді неперервного дробу. Побудовано модифіковану еквівалентну схему заміщення пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі у вигляді неперервної дробової схеми, яка синтезована по другій формі Кауера.

Розроблена вдосконалена еквівалентна схема пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі.

Отримано аналітичні вирази для визначення елементів модифікованої і еквівалентної схеми заміщення пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі у вигляді неперервної дробової схеми, яка синтезована по другій формі Кауера та елементів вдосконаленої еквівалентної схеми заміщення пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі.

Отримано операторну функцію опору еквівалентної схеми заміщення пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі у вигляді неперервного дробу та дробово-раціональної функції, для якої позитивні дійсні коефіцієнти поліномів чисельника і знаменника є функціями погонних параметрів регулярної лінії передачі.

Встановлено, що реалізація операторної функції опору у вигляді дробово-раціональної функції пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі заснована на її розкладанні чи на прості дробі (метод Фостера), чи у неперервні дробі (метод Кауера).

Запропоновані аналітичні вирази для визначення нулів та полюсів операторної функції опору у вигляді дробово-раціональної функції пасивного фільтра нижніх частот з використанням регулярної лінії передачі.

Література

1. Макаришкін Д.А. Моделирование пассивного фильтра нижних частот с использованием регулярной линии передачи / Д.А. Макаришкін, В.В. Мартинюк, Ю.М. Бойко, О.М. Бриндак // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2013. – № 2. – С. 188–195.
2. Атабеков Г.И. Основы теории цепей / Атабеков Г.И. – М.: Энергия, 1969. – 427 с.
3. Попов В.П. Основы теории цепей / Попов В.П. – М.: Высшая школа, 1985. – 496 с.
4. Песков С.Н. Основы теории линий передачи на высоких частотах. Часть 1: Режимы работы длинной линии / С.Н. Песков // Телеспутник. – 2009. – № 5. – С. 74–78.
5. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи с распределенными параметрами / Баскаков С.И. – М.: Высшая школа, 1982. – 152 с.
6. Улахович Д.А. Основы теории линейных электрических цепей / Улахович Д.А. – СПб.: БХВ – Петербург, 2009. – 816 с.
7. Шмойлов В.И. Решение алгебраических уравнений непрерывными дробями / В.И. Шмойлов, В.Б. Коваленко // Искусственный интеллект. – 2011. – № 1. – С. 260–270.
8. Aitken A. On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations / A. Aitken // Proc. Roy. Soc, Edinburgh, Ser. A, 46 (1925/26). – P. 289–305.
9. Шмойлов В.И. Непрерывные дроби: [в 3 т. Т.1] / Шмойлов В.И. – Львов: Меркатор, 2004. – 645 с.

References

1. Makaryshkin D.A. Modeliuvannia pasyvnoho filtra nyzhnykh chastot z vykorystanniam rehuliamoi linii peredachi / D.A. Makaryshkin, V.V. Martyniuk, Yu.M. Boiko, O.M. Bryndak // Herald of Khmelnytskyi National University. Technical sciences. – 2013. – # 2. – S. 188–195.
2. Atabekov H.Y. Osnovy teoryy tsepei / Atabekov H.Y. – M.: Enerhyia, 1969. – 427 s.
3. Popov V.P. Osnovy teoryy tsepei / Popov V.P. – M.: Vysshiaia shkola, 1985. – 496 s.
4. Peskov S.N. Osnovy teoryy lynyi peredachy na vysokykh chastotakh. Chast 1: Rezhymy raboty dlyynoi lynyy / S.N. Peskov // Telesputnyk. – 2009. – # 5. – S. 74–78.
5. Baskakov S.Y. Radyotekhnicheskye tsepy s raspredelennymy parametramy / Baskakov S.Y. – M.: Vysshiaia shkola, 1982. – 152 s.
6. Ulakhovich D.A. Osnovy teoryy lyneinykh elektrycheskykh tsepei / Ulakhovich D.A. – SPb.: BKhV – Peterburh, 2009. – 816 s.
7. Shmoilov V.Y. Reshenye alhebraycheskykh uravneniy nepreryvnymy drobiamy / V.Y. Shmoilov, V.B. Kovalenko // Yskusstvennyi yntellekt. – 2011. – # 1. – S. 260–270.
8. Aitken A. On Bernoullis numerical solution of algebraic equations / A. Aitken // Proc. Roy. Soc, Edinburgh, Ser. A, 46 (1925/26). – P. 289–305.
9. Shmoilov V.Y. Nепreryvnye droby: [v 3 t. T.1] / Shmoilov V.Y. – Lvov: Merkator, 2004. – 645 s.

Отримана/Received : 16.4.2017 р. Надрукована/Printed : 14.9.2017 р.

Рецензент: д.т.н., проф. Мартинюк В.В.