УДК 517.443

Г. І. Міхалевська

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЛЕЖАНДРА – (КОНТОРОВИЧА – ЛЄБЄДЄВА) – ЕЙЛЕРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ $r \geq R_0 > 0$

(м. Хмельницький)

Методом порівняння розв'язку крайової задачі на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з двома точками спряження для сепараторної системи диференціальних рівнянь Лежандра, Конторовича – Лєбєдєва та Ейлера, побудованого, з одного боку, методом функцій Коші, а з другого боку, методом відповідного гібридного інтегрального перетворення, обчислено поліпараметричну сім'ю невласних інтегралів за власними елементами гібридного диференціального оператора Лежандра – (Конторовича – Лєбєдєва) – Ейлера.

Методом сравнения решения краевой задачи на полярной оси $r \geq R_0 > 0$ с двумя точками сопряжения для сепараторной системы дифференциальных уравнений Лежандра, Конторовича – Лебедева и Эйлера, построенного, с одной стороны, методом функций Коши, а с другой стороны, методом соответствующего гибридного интегрального преобразования, вичислена полипараметрическая семья несобственных интегралов по собственным элементам гибридного дифференциального оператора Лежандра – (Конторовича – Лебедева) – Эйлера.

Бібліогр.: 7 назв.

Побудуємо обмежений на множині $I_2^+ = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty); R_0 > 0\}$ розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь Лежандра, Конторовича – Лєбєдєва та Ейлера для модифікованих функцій

$$(\Lambda_{(\mu)} - q_1^2)u_1(r) = -g_1(r), r \in (R_0, R_1),$$
$$(B_{\alpha_1} - q_2^2)u_2(r) = -g_2(r), r \in (R_1, R_2), \quad (1)$$
$$(B^*_{\alpha_2} - q_3^2)u_3(r) = -g_3(r), r \in (R_2, \infty)$$

за крайовими умовами

$$(\alpha_{11}^0 d/dr + \beta_{11}^0)u_1(r)|_{r=R_0} = g_0, \lim_{r\to\infty}[r^\gamma u_3(r)] = 0 \quad (2)$$

та стандартними умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \, d\big/_{dr} + \beta_{j1}^k\right)u_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \, d\big/_{dr} + \beta_{j2}^k\right)u_{k+1}(r)\right]_{r=R_k} = \omega_{jk}; j,k = 1,2 \quad (3)$$

У рівності (1) беруть участь: узагальнений диференціальний оператор Лежандра [1] $\Lambda_{(\mu)} = d^2\big/_{dr^2} + cthr \, d\big/_{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\frac{\mu_1^2}{1-chr} + \frac{\mu_2^2}{1+chr})$, диференціальний оператор (Конторовича – Лєбєдєва) [2] $B_{\alpha_1} = r^2 d^2\big/_{dr^2} + (2\alpha_1+1)r \, d\big/_{dr} + \alpha_1^2 - \lambda^2 r^2$ та диференціальний оператор Ейлера [3] $B^*_{\alpha_2} = r^2 d^2\big/_{dr^2} + (2\alpha_2+1)r \, d\big/_{dr} + \alpha_2^2$; $2\alpha_j + 1 \geq 0$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$, $(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$.

Умови та коефіцієнти: $q_1 > 0, q_2 > 0, q_3 > 0, \alpha_{11}^0 \le 0, \beta_{11}^0 \ge 0, |\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \ne 0$, $\alpha_{jk}^m \ge 0, \beta_{jk}^m \ge 0, c_{1k} \cdot c_{2k} > 0, c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)} - q_1^2)v = 0$ складають узагальнені приєднані функції Лежандра першого роду $P_{\nu_1}^{(\mu)}(chr)$ та другого роду $L_{\nu_1}^{(\mu)}(chr)$ [1], $\nu_1 = -1/2 + q_1$; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Конторовича – Лєбєдєва $(B_{\alpha_1} - q_2^2)v = 0$ складають модифіковані функції Бесселя $v_1 = I_{q_2,\alpha_1}(\lambda r)$ та $v_2 = K_{q_2,\alpha_1}(\lambda r)$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера складають функції $v_1 = r^{-\alpha_2 - q_3}$ та $v_2 = r^{-\alpha_2 + q_3}$ [3].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє будувати розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом функцій Коші [3, 4]:

$$u_1(r) = A_1 P_{\nu_1}^{(\mu)}(chr) + B_1 L_{\nu_1}^{(\mu)}(chr) + \int_{R_0}^{R_1} E_1(r,\rho) g_1(\rho) sh\rho d\rho,$$

$$u_2(r) = A_2 I_{q_2,\alpha_1}(\lambda r) + B_2 K_{q_2,\alpha_1}(\lambda r) + \int_{R_1}^{R_2} E_2(r,\rho) g_2(\rho) \rho^{2\alpha_1 - 1} d\rho, \tag{4}$$

$$u_3(r) = A_3 r^{-\alpha_2 - q_3} + \int_{R_2}^{\infty} E_3(r,\rho) g_3(\rho) \rho^{2\alpha_1 - 3} d\rho.$$

У рівностях (4) $E_j(r,\rho)$ - функції Коші:

$$E_j(r,\rho)|_{r=\rho+0} - E_j(r,\rho)|_{r=\rho-0} = 0,$$

$$\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}|_{r=\rho+0} - \frac{dE_j}{dr}|_{r=\rho-0} = -\frac{1}{\varphi_j(\rho)}, \tag{5}$$

де $\varphi_1(r) = shr, \varphi_2(r) = \varphi_3(r) \equiv r^{2\alpha_j + 1}, 2\alpha_j + 1 > 0$.

Безпосередньо перевіряється, що за функції Коші можуть служити функції:

$$E_1(r,\rho) = -\frac{B_{(\mu)}(q_1)}{\Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)}(chR_0, chR_1)} \begin{cases} F_{\nu_1;11}^{(\mu),0}(chR_0, chr) F_{\nu_1;11}^{(\mu),1}(chR_1, ch\rho), & R_0 < r < \rho < R_1, \\ F_{\nu_1;11}^{(\mu),0}(chR_0, ch\rho) F_{\nu_1;11}^{(\mu),1}(chR_1, chr), & R_0 < \rho < r < R_1, \end{cases} \tag{6}$$

$$E_2(r,\rho) = \frac{\lambda^{2\alpha_1}}{\Delta_{q_2,\alpha_1;11}(\lambda R_1, \lambda R_2)} \begin{cases} \psi_{q_2,\alpha_1;12}^{1*}(\lambda R_1, \lambda r) \psi_{q_2,\alpha_1;11}^{2*}(\lambda R_2, \lambda \rho), & R_1 < r < \rho < R_2, \\ \psi_{q_2,\alpha_1;12}^{1*}(\lambda R_1, \lambda \rho) \psi_{q_2,\alpha_1;11}^{2*}(\lambda R_2, \lambda r), & R_1 < \rho < r < R_2, \end{cases} \tag{7}$$

$$E_3(r,\rho) = -\frac{1}{2q_3 Z_{\alpha_1;12}^{21}(q_3, R_2)} \begin{cases} \rho^{-\alpha_2 - q_3} \psi_{\alpha_2;12}^{2*}(q_3, r), & R_2 < r < \rho < \infty \\ r^{-\alpha_2 - q_3} \psi_{\alpha_2;12}^{2*}(q_3, \rho), & R_2 < \rho < r < \infty; \end{cases} \tag{8}$$

У рівностях (6)-(8) беруть участь функції:

$$Z_{\alpha_1;12}^{21}(q_3, R_2) = [\beta_{12}^2 - (\alpha_2 + q_3) R_2^{-1} \alpha_{12}^2] R_2^{-\alpha_2 - q_3},$$

$$Z_{\alpha_1;12}^{22}(q_3, R_2) = [\beta_{12}^2 - (\alpha_2 - q_3) R_2^{-1} \alpha_{12}^2] R_2^{-\alpha_2 + q_3},$$

$$\psi_{\alpha_1,j2}^{m*}(q_3, r) \equiv Z_{\alpha_1,j2}^{m2}(q_3, R_m) r^{-\alpha_2 - q_3} - Z_{\alpha_1,j2}^{m1}(q_2, R_m) r^{-\alpha_2 + q_3};$$

$$\Delta_{q_2,\alpha_1;jk}(\lambda R_1, \lambda R_2) = U_{q_2,\alpha_1;j2}^{11}(\lambda R_1) U_{q_2,\alpha_1;k1}^{22}(\lambda R_2) - U_{q_2,\alpha_1;j2}^{12}(\lambda R_1) U_{q_2,\alpha_1;k1}^{21}(\lambda R_2);$$

$$U^{m1}_{q_2,\alpha_1;jk}(\lambda R_m)=(\alpha^m_{jk}\frac{q_2-\alpha_1}{R_m}+\beta^m_{jk})I_{q_2,\alpha_1}(\lambda R_m)+\alpha^m_{jk}R_m\lambda^2 I_{q_2+1,\alpha_1+1}(\lambda R_m),$$

$$U^{m2}_{q_2,\alpha_1;jk}(\lambda R_m)=(\alpha^m_{jk}\frac{q_2-\alpha_1}{R_m}+\beta^m_{jk})K_{q_2,\alpha_1}(\lambda R_m)-\alpha^m_{jk}R_m\lambda^2 K_{q_2+1,\alpha_1+1}(\lambda R_m),$$

$$\psi^{m*}_{q_2,\alpha_2;jk}(\lambda R_m,\lambda r)=U^{m1}_{q_2,\alpha_1;jk}(\lambda R_m)K_{q_2,\alpha_1}(\lambda r)-U^{m2}_{q_2,\alpha_1;jk}(\lambda R_m)I_{q_2,\alpha_1}(\lambda r);$$

$$Z^{(\mu),m1}_{\nu_1;jk}(chR_m)=(\alpha^m_{jk}d/dr+\beta^m_{jk})P^{(\mu)}_{\nu_1}(chr)|_{r=R_m},$$

$$Z^{(\mu),m2}_{\nu_1;jk}(chR_m)=(\alpha^m_{jk}d/dr+\beta^m_{jk})L^{(\mu)}_{\nu_1}(chr)|_{r=R_m},$$

$$F^{(\mu),m}_{\nu_1;jk}(chR_m,chr)=Z^{(\mu),m1}_{\nu_1;jk}(chR_m)L^{(\mu)}_{\nu_1}(chr)-Z^{(\mu),m2}_{\nu_1;jk}(chR_m)P^{(\mu)}_{\nu_1}(chr),$$

$$B_{(\mu)}(q_1)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(1/2+q_1-\nu^{+})\Gamma(1/2+q_1-\nu^{-})2^{\mu_1}}{\Gamma(1/2+q_1+\nu^{+})\Gamma(1/2+q_3+\nu^{-})2^{\mu_2}},\nu^{\pm}=1/2(\mu_1\pm\mu_2).$$

Крайова умова в точці $r=R_0$ та умови спряження (3) для визначення величин $A_j(j=\overline{1,3})$ і $B_k(k=1,2)$ дають алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$\begin{aligned}&Z^{(\mu),01}_{\nu_1;11}(chR_0)A_1+Z^{(\mu),02}_{\nu_1;11}(chR_0)B_1=g_0\\ &Z^{(\mu),11}_{\nu_1;j1}(chR_1)A_1+Z^{(\mu),12}_{\nu_1;j1}(chR_1)B_1-U^{11}_{q_2,\alpha_1;j2}(\lambda R_1)A_2-U^{12}_{q_2,\alpha_1;j2}(\lambda R_1)B_2=\\ &=\omega_{j1}+\delta_{j2}G_{12},\ j=1,2\\ &U^{21}_{q_2,\alpha_1;j1}(\lambda R_2)A_2+U^{22}_{q_2,\alpha_1;j1}(\lambda R_2)B_2-Z^{21}_{\alpha_2;j2}(q_3,R_2)A_3=\omega_{j2}+\delta_{j2}G_{23}.\end{aligned}\tag{9}$$

У системі (9) беруть участь функції

$$G_{12}=\frac{c_{11}}{shR_1}\int_{R_0}^{R_1}\frac{F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(chR_0,ch\rho)}{\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;11}(chR_0,chR_1)}g_1(\rho)sh\rho d\rho-\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\psi^{2*}_{q_2,\alpha_1;11}(\lambda R_2,\lambda\rho)}{\Delta_{q_2,\alpha_1;11}(\lambda R_1,\lambda R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho,$$

$$G_{23}=\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{1*}_{q_2,\alpha_1;12}(\lambda R_1,\lambda\rho)}{\Delta_{q_2,\alpha_1;11}(\lambda R_1,\lambda R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int_{R_2}^{\infty}\frac{\rho^{-\alpha_2-q_3}}{Z^{21}_{\alpha_2;12}(q_3,R_2)}g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho$$

та символ Кронекера $\delta_{j2}(\delta_{12}=0,\delta_{22}=1)$ [5].

Введемо до розгляду функції:

$$A^{(\mu)}_{\alpha_1;j}(q)=\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;11}(chR_0,chR_1)\Delta_{q_2,\alpha_1,2j}(\lambda R_1,\lambda R_2)-\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;21}(chR_0,chR_1)\Delta_{q_2,\alpha_1,1j}(\lambda R_1,\lambda R_2),$$

$$B_{(\alpha);j}(q)=Z^{21}_{\alpha_2;22}(q_3,R_2)\Delta_{q_2,\alpha_1;j1}(\lambda R_1,\lambda R_2)-Z^{21}_{\alpha_2;12}(q_3,R_2)\Delta_{q_2,\alpha_1;j2}(\lambda R_1,\lambda R_2),(\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\theta^{(\mu)}_{\alpha_1;1}(r,q)=\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;21}(chR_0,chR_1)\psi^{1*}_{q_2,\alpha_1;12}(\lambda R_1,\lambda r)-\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;11}(chR_0,chR_1)\psi^{1*}_{q_2,\alpha_1;22}(\lambda R_1,\lambda r),$$

$$\theta_{(\alpha);2}(r,q)=Z^{21}_{\alpha_2;12}(q_3,R_2)\psi^{2*}_{q_2,\alpha_1;21}(\lambda R_2,\lambda r)-Z^{21}_{\alpha_2;22}(q_3,R_2)\psi^{2*}_{q_2,\alpha_1;11}(\lambda R_2,\lambda r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1) – (3): визначник алгебраїчної системи (9) відмінний від нуля для будь-якого вектора $\vec{q}=\{q_1;q_2;q_3\}\neq\vec{0}$:

$$\begin{aligned}\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)&\equiv Z^{21}_{\alpha_2;22}(q_3,R_2)A^{(\mu)}_{\alpha_1;1}(q)-Z^{21}_{\alpha_2,12}(q_3,R_2)A^{(\mu)}_{\alpha_1,2}(q)=\\ &=\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;11}(chR_0,chR_1)B_{(\alpha);2}(q)-\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;21}(chR_0,chR_1)B_{(\alpha);1}(q)\neq 0\end{aligned}\tag{10}$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1)-(3):

1) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W^{(\mu)}_{(\alpha);11}(r,q)=\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)}[B_{(\alpha);1}(q)F^{(\mu),1}_{\nu_1;21}(chR_1,chr)-B_{(\alpha);2}(q)F^{(\mu),1}_{\nu_1;11}(chR_1,chr)],$$

$$W^{(\mu)}_{(\alpha);12}(r,q)=\frac{c_{11}}{B_{(\mu)}(q_1)shR_1}\cdot\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)}\cdot\theta_{(\alpha);2}(r,q),$$

$$W^{(\mu)}_{(\alpha);13}(r,q)=\frac{c_{11}}{B_{(\mu)}(q_1)shR_1}\cdot\frac{c_{12}}{\lambda^{2\alpha_1}R_2^{2\alpha_1+1}}\cdot\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)}r^{-\alpha_2-q_3}; \qquad (11)$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}^{(\mu),1}_{(\alpha);11}(r,q)=\frac{B_{(\alpha),2}(q)}{\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)}F^{(\mu),o}_{\nu_1,11}(chR_0,chr),\ \mathcal{R}^{(\mu),1}_{(\alpha);21}(r,q)=-\frac{B_{(\alpha),1}(q)}{\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)}F^{(\mu),o}_{\nu_1,11}(chR_0,chr),$$

$$\mathcal{R}^{(\mu),1}_{(\alpha);12}(r,q)=\frac{c_{21}Z^{21}_{\alpha_2,22}(q_3,R_2)}{\lambda^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)}F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(chR_0,chr),$$

$$\mathcal{R}^{(\mu),1}_{(\alpha);22}(r,q)=-\frac{c_{21}}{\lambda^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{Z^{(\mu)21}_{\alpha_2;12}(q_3,R_2)}{\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)}F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(chR_0,chr);$$

$$\mathcal{R}^{(\mu),2}_{(\alpha);11}(r,q)=\frac{\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;21}}{\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)}\theta_{(\alpha);2}(r,q),\ \mathcal{R}^{(\mu),2}_{(\alpha);21}(r,q)=-\frac{\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;11}(q)}{\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)}\theta_{(\alpha);2}(r,q), \qquad (12)$$

$$\mathcal{R}^{(\mu),2}_{(\alpha);12}(r,q)=-\frac{Z^{21}_{\alpha_2,22}}{\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)}\theta^{(\mu)}_{(\alpha);1}(r,q),\ \mathcal{R}^{(\mu),2}_{(\alpha);22}(r,q)=\frac{Z^{21}_{\alpha_2;12}}{\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)}\theta^{(\mu)}_{(\alpha);1}(r,q);$$

$$\mathcal{R}^{(\mu),3}_{(\alpha);11}(r,q)=\frac{\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;21}(chR_0,chR_1)}{\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)}\frac{c_{12}}{\lambda^{2\alpha_1}R_2^{2\alpha_1+1}}r^{-\alpha_2-q_3},$$

$$\mathcal{R}^{(\mu),3}_{(\alpha);21}(r,q)=-\frac{\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;11}(chR_0,chR_1)}{\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)}\frac{c_{12}}{\lambda^{2\alpha_1}R_2^{2\alpha_1+1}}r^{-\alpha_2-q_3},$$

$$\mathcal{R}^{(\mu),3}_{(\alpha);12}(r,q)=\frac{A^{(\mu)}_{\alpha_1;2}(q)}{\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)}r^{-\alpha_2-q_3},\ \mathcal{R}^{(\mu),3}_{(\alpha);22}(r,q)=-\frac{A^{(\mu)}_{\alpha_1;1}(q)}{\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)}r^{-\alpha_2-q_3};$$

3) породжені неоднорідністю системи функцій впливу

$$\mathcal{H}^{(\mu)}_{(\alpha),11}(r,\rho,q)=-B_{(\mu)}(q_1)\begin{cases}F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(chR_0,chr)W^{(\mu)}_{(\alpha);11}(\rho,q), R_0<r<\rho<R_1\\ F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(chR_0,ch\rho)W^{(\mu)}_{(\alpha);11}(r,q), R_0<\rho<r<R_1\end{cases};$$

$$\mathcal{H}^{(\mu)}_{(\alpha);12}(r,\rho,q)=-\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)}F^{(\mu)}_{\nu_1;11}(chR_0,chr)\theta_{(\alpha);2}(\rho,q),$$

$$\mathcal{H}^{(\mu)}_{(\alpha);13}(r,\rho,q)=-\frac{c_{21}c_{22}}{\lambda^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)}F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(chR_0,chr)\rho^{-\alpha_2-q_3},$$

$$\mathcal{H}^{(\mu)}_{(\alpha);21}(r,\rho,q)=-\frac{c_{11}}{shR_1}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)}F^{(\mu)0}_{\nu_1;11}(chR_0,ch\rho)\theta_{(\alpha);2}(r,q),$$

$$\mathcal{H}^{(\mu)}_{(\alpha);22}(r,\rho,q)=\frac{\lambda^{2\alpha_1}}{\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)}\begin{cases}\theta^{(\mu)}_{\alpha_1;1}(r,q)\theta_{(\alpha);2}(\rho,q), R_1<r<\rho<R_2\\ \theta^{(\mu)}_{\alpha_1;1}(\rho,q)\theta_{(\alpha);2}(r,q), R_1<\rho<r<R_2\end{cases},$$

$$\mathcal{H}^{(\mu)}_{(\alpha);23}(r,\rho,q)=\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)}\theta^{(\mu)}_{\alpha_1;1}(r,q)\rho^{-\alpha_2-q_3}, \qquad (13)$$

$$\mathcal{H}^{(\mu)}_{(\alpha);31}(r,\rho,q)=-\frac{c_{11}}{shR_1}\frac{c_{12}}{\lambda^{2\alpha_1}R_2^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{(\alpha)}(q)}F^{(\mu),0}_{\nu_1;11}(chR_0,ch\rho)r^{-\alpha_2-q_3},$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);32}^{(\mu)}(r,\rho,q) = \frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}} \frac{1}{\Delta_{(\alpha)}^{(\mu)}(q)} \theta_{\alpha_1;1}^{(\mu)}(\rho,q) r^{-\alpha_2-q_3},$$

$$\mathcal{H}_{\alpha;33}^{(\mu)}(r,\rho,q) = \frac{1}{2q_3\Delta_{(\alpha)}^{(\mu)}(q)} \begin{cases} \rho^{-\alpha_2-q_3}[A_{\alpha_1;2}^{(\mu)}(q)\psi_{\alpha_2;12}^{2*}(q_3,r) - \\ r^{-\alpha_2-q_3}[A_{\alpha_1;2}^{(\mu)}(q)\psi_{\alpha_2;12}^{2*}(q_3,\rho) - \end{cases}$$

$$- A_{\alpha_1;1}^{(\mu)}(q)\psi_{\alpha_2;22}^{2*}(q_3,r)],\ R_2 < r < \rho < \infty$$

$$- A_{\alpha_1;1}^{(\mu)}(q)\psi_{\alpha_2;22}^{2*}(q_3,\rho)],\ R_2 < \rho < r < \infty.$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (9) та підстановки обчислених значень A_j та B_k у рівності (4) маємо єдиний розв'язок крайової задачі(1) – (3):

$$u_j(r) = W_{\alpha_1;1j}^{(\mu)}(r,q)g_0 + \sum_{m,k=1}^{2} R_{(\alpha);mk}^{(\mu),j}(r,q)\omega_{mk} + \int_{R_0}^{R_1} \mathcal{H}_{(\alpha);j1}^{(\mu)}(r,\rho,q)g_1(\rho)sh\rho d\rho +$$

$$+ \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{H}_{(\alpha);j2}^{(\mu)}(r,\rho,q)g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho + \int_{R_2}^{\infty} \mathcal{H}_{(\alpha);j3}^{(\mu)}(r,\rho,q)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho,\ j=\overline{1,3}$$

(14)

Побудуємо тепер розв'язок крайової задачі (1) – (3) методом інтегрального перетворення, породженого на множині I_2^+ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{(\alpha)}^{(\mu)} = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\Lambda_{(\mu)} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)B_{\alpha_1} + \theta(r-R_2)B_{\alpha_2}^{*}, \tag{15}$$

$\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [4], $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2)$.

За область визначення ГДО $M_{(\alpha)}^{(\mu)}$ приймемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями: 1) вектор-функція $f(r) = \{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)]; B_{\alpha_1}[g_2(r)]; B_{\alpha_2}^{*}[g_3(r)]\}$ неперервна на I_2^+; 2) функції $g_j(r)$ задовільняють однорідні крайові умови

$$(\alpha_{11}^0 d/dr + \beta_{11}^0)g_1(r)|_{r=R_0} = 0, \qquad \lim_{r\to R_0}[r^{\gamma} g_3(r)] = 0, \tag{16}$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють однорідні умови спряження

$$[(\alpha_{j1}^k d/dr + \beta_{j1}^k)g_k(r) - (\alpha_{j2}^k d/dr + \beta_{j2}^k)g_{k+1}(r)]|_{r=R_k} = 0;\ j,k = 1,2$$

(17)

Оскільки ГДО $M_{(\alpha)}^{(\mu)}$ самоспряжений і на множині I_2^+ має одну особливу точку $r = \infty$, то його спектр дійсний і неперервний. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0,\infty)$. Йому відповідає спектральна функція

$$V_{(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta) = \sum_{k=1}^{2} \theta(r-R_{k-1})\theta(R_k-r)V_{(\alpha);k}^{(\mu)}(r,\beta) + \theta(r-R_2)V_{(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta) \tag{18}$$

Функції $V_{(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)$ повинні задовільняти відповідно диференціальні рівняння

$$\begin{aligned} &(\Lambda_{(\mu)} + b_1^2)V_{(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, r \in (R_0, R_1), \\ &(B_{\alpha_1} + b_2^2)V_{(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, r \in (R_1, R_2), \\ &(B_{\alpha_2}^{*} + b_3^2)V_{(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, r \in (R_2, \infty), \end{aligned} \tag{19}$$

крайові умови (16) та умови спряження (17); $b_j = (\beta^2 + k_j^2)^{1/2}$, $k_j \ge 0, j = \overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння $(\Lambda_{(\mu)} + b_1^2)v = 0$ утворюють функції $A_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr)$ та $B_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr)$, $\nu_1^* = -1/2 + ib_1$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для рівняння $(B_{\alpha_1} + b_2^2)v = 0$ становлять функції $C_{\alpha_1}(\lambda r, b_2)$ та $D_{\alpha_1}(\lambda r, b_2)$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_{\alpha_1}^* + b_3^2)v = 0$ складають функції $v_1 = r^{-\alpha_2}\cos(b_3 \ln r)$ та $v_2 = r^{-\alpha_2}\sin(b_3 \ln r)$ [3].

Якщо тепер покласти [3]

$$V_{(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta) = A_1 A_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr) + B_1 B_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr),$$

$$V_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta) = A_2 C_{\alpha_1}(\lambda r, b_2) + B_2 D_{\alpha_1}(\lambda r, b_2), \tag{20}$$

$$V_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta) = A_3 r^{-\alpha_2}\cos(b_3 \ln r) + B_3 r^{-\alpha_2}\sin(b_3 \ln r),$$

то крайова умова в точці $r = R_0$ та умови спряження (17) для визначення шести величин $A_j, B_j (j = \overline{1,3})$ дають однорідну систему із п'яти рівнянь:

$$Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu),01}(chR_0)A_1 + Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu),02}(chR_0)B_1 = 0$$

$$Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu),11}(chR_1)A_1 + Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu),12}(chR_1)B_1 - X_{\alpha_1;j2}^{11}(\lambda R_1, b_2)A_2 - X_{\alpha_1;j2}^{12}(\lambda R_1, b_2)B_2 = 0,\ j = 1,2;$$

$$X_{\alpha_1,j1}^{21}(\lambda R_2, b_2)A_2 + X_{\alpha_1,j1}^{22}(\lambda R_2, b_2)B_2 - Y_{\alpha_2;j1}^{21}(b_3, R_2)A_3 - Y_{\alpha_2;j2}^{22}(b_3, R_2)B_3 = 0 \tag{21}$$

У системі (21) прийняті позначення:

$$Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu),m1}(chR_m) = [(\alpha_{j1}^m d/dr + \beta_{j1}^m)A_{\nu_1^*}^{\mu}(chr)]|_{r=Rm},$$

$$Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu),m2}(chR_m) = [(\alpha_{j1}^m d/dr + \beta_{j1}^m)B_{\nu_1^*}^{\mu}(chr)]|_{r=Rm},$$

$$X_{\alpha_1;jk}^{m1}(\lambda R_m, b_2) = [(\alpha_{jk}^m d/dr + \beta_{jk}^m)C_{\alpha_1}(\lambda r, b_2)]|_{r=Rm},$$

$$X_{\alpha_1;jk}^{m2}(\lambda R_m, b_2) = [(\alpha_{jk}^m d/dr + \beta_{jk}^m)D_{\alpha_1}(\lambda r, b_2)]|_{r=Rm},$$

$$Y_{\alpha_2;j2}^{21}(b_3, R_2) = [(\beta_{j2}^2 - \alpha_{j2}^2 R_2^{-1})\cos(b_3 \ln R_2) - b_3 R_2^{-1}\alpha_{j2}^2 \sin(b_3 \ln R_2)]R_2^{-\alpha_2},$$

$$Y_{\alpha_2;j2}^{22}(b_3, R_2) = [(\beta_{j2}^2 - \alpha_{j2}^2 R_2^{-1})\sin(b_3 \ln R_2) + b_3 R_2^{-1}\alpha_{j2}^2 \cos(b_3 \ln R_2)]R_2^{-\alpha_2}.$$

Покладемо $A_1 = -A_0 Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu),02}(chR_0)$, $B_1 = A_0 Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu),01}(chR_0)$, де A_0 підлягає визначенню і розглянемо відносно A_2, B_2 алгебраїчну систему:

$$X_{\alpha_1;j2}^{11}(\lambda R_1, b_2)A_2 + X_{\alpha_1;j2}^{12}(\lambda R_1, b_2)B_2 = A_0 \delta_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chR_0, chR_1);\ j = 1,2 \tag{22}$$

Визначник системи (22)

$$X_{\alpha_1;12}^{11} X_{\alpha_1;22}^{12} - X_{\alpha_1;22}^{11} X_{\alpha_1;12}^{12} = -\frac{c_{21} sh\pi b_2}{\pi\lambda^{2\alpha_1} R_1^{2\alpha_1+1}} \equiv -q_{\alpha_1}(\beta) \ne 0$$

Алгебраїчна система (22) має єдиний розв'язок [5]:

$$A_2 = -A_0[q_{\alpha_1}(\beta)]^{-1}[\delta_{\nu_1^*,11}^{(\mu)} X_{\alpha_1;22}^{12}(\lambda R_1, b_2) - \delta_{\nu_1^*,21}^{(\mu)} X_{\alpha_1;12}^{12}(\lambda R_1, b_2)], \tag{23}$$

$$B_2 = A_0[q_{\alpha_1}(\beta)]^{-1}[\delta_{\nu_1^*,11}^{(\mu)} X_{\alpha_1;22}^{11}(\lambda R_1, b_2) - \delta_{\nu_1^*,21}^{(\mu)} X_{\alpha_1;12}^{11}(\lambda R_1, b_2)].$$

При відомих A_2, B_2 розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_3, B_3:

$$Y_{\alpha_2,j2}^{21}(b_3, R_2)A_3 + Y_{\alpha_2,j2}^{22}(b_3, R_2)B_3 = A_0[q_{\alpha_1}(\beta)]^{-1} a_{\alpha_1;j}^{(\mu)}(\beta),\ j = 1,2 \tag{24}$$

У системі (24) беруть участь функції:

$$\alpha^{(\mu)}_{\alpha_1;j}(\beta) = \delta^{(\mu)}_{\nu_1^*,11}(chR_0, chR_1)\delta_{\alpha_1,2j}(\lambda R_1, \lambda R_2, b_2) - \delta^{(\mu)}_{\nu_1^*,21}(chR_0, chR_1)\delta_{\alpha_1,3j}(\lambda R_1, \lambda R_2, b_2),$$

$$\delta_{\alpha_1,jk}(\lambda R_1, \lambda R_2, b_2) = X^{11}_{\alpha_1,j2}(\lambda R_1, b_2)X^{22}_{\alpha_1,k1}(\lambda R_2, b_2) - X^{12}_{\alpha_1,j2}(\lambda R_1, b_2)X^{21}_{\alpha_1,k1}(\lambda R_2, b_2); j,k = 1,2.$$

Визначник алгебраїчної системи (24)

$$Y^{21}_{\alpha_2,12}Y^{22}_{\alpha_2,22} - Y^{21}_{\alpha_2,22}Y^{22}_{\alpha_2,12}(b_3, R_2) = c_{22}b_3R_2^{-(2\alpha_2+1)} \equiv q_{\alpha_2}(\beta) \neq 0$$

Алгебраїчна система (24) має єдиний розв'язок [5]:

$$A_3 = \omega^{(\mu)}_{(\alpha);2}(\beta),\ B_3 = -\omega^{(\mu)}_{(\alpha);1}(\beta),\ A_0 = q_{\alpha_1}(\beta)q_{\alpha_2}(\beta) > 0;, \tag{25}$$

$$\omega^{(\mu)}_{(\alpha);j}(\beta) = \alpha^{(\mu)}_{\alpha_1;1}(\beta)Y^{2j}_{\alpha_2;22}(b_3, R_2) - \alpha^{(\mu)}_{\alpha_1;2}(\beta)Y^{2j}_{\alpha_2;12}(b_3, R_2),\ j = 1,2.$$

Підставивши визначені згідно формул (23) та (25) величини A_j, B_j у рівності (20) маємо функції:

$$V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(r,\beta) = q_{\alpha_1}(\beta)q_{\alpha 2}(\beta)[Y^{(\mu),01}_{\nu_1^*;11}(chR_0)B^{(\mu)}_{\nu_1^*}(chr) - Y^{(\mu),02}_{\nu_1^*;11}(chR_0)A^{(\mu)}_{\nu_1^*}(chr)],$$

$$V^{(\mu)}_{(\alpha);2}(r,\beta) = q_{\alpha_2}(\beta)[\delta^{(\mu)}_{\nu_1^*;11}(chR_0, chR_1)\psi^{1}_{\alpha_1;22}(\lambda R_1, \lambda r, b_2) - \delta^{(\mu)}_{\nu_1^*;21}(chR_0, chR_1)\psi^{1}_{\alpha_1;12}(\lambda R_1, \lambda r, b_2)],$$

$$\psi^{1}_{\alpha_1;j2}(\lambda R_1, \lambda r, b_2) = X^{11}_{\alpha_1;j2}(\lambda R_1, b_2)D_{\alpha_1}(\lambda r, b_2) - X^{12}_{\alpha_1;j2}(\lambda R_1, b_2)C_{\alpha_1}(\lambda r, b_2); \tag{26}$$

$$V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(r,\beta) = \omega^{(\mu)}_{(\alpha);2}(\beta)r^{-\alpha_2}\cos(b_3 \ln r) - \omega^{(\mu)}_{(\alpha);1}(\beta)r^{-\alpha_2}\sin(b_3 \ln r).$$

Отже, спектральна функція $V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\beta)$ стає відомою.

Визначимо числа

$$\sigma_1 = \frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{shR_1}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_1+1}},\ \sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_1+1}},\ \sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)\sigma_1 shr + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2 r^{2\alpha_1-1} + \theta(r - R_2)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}$$

та спектральну щільність

$$\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta) = \beta[b_3(\beta)]^{-1}([\omega^{(\mu)}_{(\alpha);1}(\beta)]^2 + [\omega^{(\mu)}_{(\alpha);2}(b_3)]^2)^{-1}.$$

Наявність спектральної функції $V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\beta)$, вагової функції $\sigma(r)$ та спектральної щільності $\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)$ дозволяє визначити пряме $H^{(\mu)}_{(\alpha)}$ і обернене $H^{-(\mu)}_{(\alpha)}$ гібридне інтегральне перетворення типу Лежандра – (Конторовича - Лєбєдєва) – Ейлера, породженого на множині I_2 ГДО $M^{(\mu)}_{(\alpha)}$ [6]:

$$H^{(\mu)}_{(\alpha)}[g(r)] = \int_{R_0}^{\infty} g(r)V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \widetilde{g}(\beta) \tag{27}$$

$$H^{-(\mu)}_{(\alpha)}[\widetilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \widetilde{g}(\beta)V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta \equiv g(r), \tag{28}$$

Введемо до розгляду величини та функції:

$$d_1 = \sigma_1 shR_1 : c_{11},\ d_2 = \sigma_2 R_2^{2\alpha_1+1} : c_{12},\ \widetilde{g}_1(\beta) = \int_{R_0}^{R_1} g_1(r)V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 shrdr,$$

$$\widetilde{g}_2(\beta) = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r)V^{(\mu)}_{(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_1-1}dr,\ \widetilde{g}_3(\beta) = \int_{R_2}^{\infty} g_3(r)V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr,$$

$$Z^{(\mu),k}_{(\alpha);i2}(\beta)=(\alpha^k_{i2}d/dr+\beta^k_{i2})V^{(\mu)}_{(\alpha);k+1}(r,\beta)|_{r=R_k};i,k=1,2.$$

Сформулюємо твердження про основну тотожність, яка лежить в основі застосування запровадженого формулами (27), (28) гібридного інтегрального перетворення (ГІП).

<u>Теорема</u> (про основну тотожність). Якщо вектор-функція

$$f(r)=\{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)];B_{\alpha_1}[g_2(r)];B^*_{\alpha_2}[g_3(r)]\}$$

неперервна на множині I_2^+, а функції $g_j(r)$ задовільняють крайові умови (2) та умови спряження (3), то має місце основна тотожність ГІП ГДО $M^{(\mu)}_{(\alpha)}$:

$$H^{(\mu)}_{(\alpha)}[M^{(\mu)}_{(\alpha)}[g(r)]]=-\beta^2\tilde{g}(\beta)-\sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde{g}_i(\beta)+(-\alpha^0_{11})^{-1}V^{(\mu)}_{(\alpha)}(R_0,\beta)\sigma_1 shR_0g_0+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}d_k[Z^{(\mu);k}_{(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k}-Z^{(\mu);k}_{(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}] \qquad (29)$$

Рівності (27)-(29) складають математичний апарат для побудови єдиного розв'язку крайової задачі (1)-(3) за відомою логічною схемою [7].

Запишемо систему (1) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix}(\Lambda_{(\mu)}-q_1^2)u_1(r)\\(B_{\alpha_1}-q_2^2)u_2(r)\\(B^*_{\alpha_2}-q_3^2)u_3(r)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}g_1(r)\\g_2(r)\\g_3(r)\end{bmatrix} \qquad (30)$$

Інтегральний оператор $H^{(\mu)}_{(\alpha)}$ згідно правила (27) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H^{(\mu)}_{(\alpha)}[...]=[\int_{R_0}^{R_1}...V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 shrdr\ \int_{R_1}^{R_2}...V^{(\mu)}_{(\alpha);2}(r,\beta)\ \sigma_2 r^{2\alpha_1-1}dr \qquad (31)$$

$$\int_{R_2}^{\infty}...V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr]$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (31) до системи (30) за правилом множення матриць. Внаслідок основної тотожності (29) отримуємо алгебраїчне рівняння:

$$\sum_{i=1}^{3}(\beta^2+q_i^2+k_i^2)\tilde{u}_i(\beta)=\tilde{g}(\beta)+(-\alpha^0_{11})^{-1}V^{(\mu)}_{(\alpha),1}(R_0,\beta)\sigma_1 shR_0g_0+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}d_k[Z^{(\mu),k}_{(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k}-Z^{(\mu),k}_{(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}] \qquad (32)$$

Припустимо, що $\max\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\}=q_3^2>0$. Покладемо всюди $k_1^2=q_3^2-q_1^2\geq 0, k_2^2=q_3^2-q_2^2\geq 0, k_3^2=0,\ \tilde{u}_1(\beta)+\tilde{u}_2(\beta)+\tilde{u}_3(\beta)=\tilde{u}(\beta)$.

З рівняння (32) знаходимо, що

$$\tilde{u}(\beta)=\frac{\tilde{g}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}+\frac{V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(R_0,\beta)}{(-\alpha^0_{11})(\beta^2+q_3^2)}\sigma_1 shR_0 g_0+ \\ +\sum_{k=1}^{2}d_k\Big[\frac{Z^{(\mu),k}_{(\alpha);12}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}\omega_{2k}-\frac{Z^{(\mu),k}_{(\alpha);22}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}\omega_{1k}\Big] \quad (33)$$

Інтегральний оператор $H^{-(\mu)}_{(\alpha)}$ згідно правила (28) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[...]=\begin{bmatrix} 2\pi^{-1}\int\limits_0^\infty ...V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta \\ 2\pi^{-1}\int\limits_0^\infty ...V^{(\mu)}_{(\alpha);2}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta \\ 2\pi^{-1}\int\limits_0^\infty ...V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta \end{bmatrix} \quad (34)$$

Застосуємо операторну матрицю-стовбець (34) за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}(\beta)]$, де функція $\tilde{u}(\beta)$ визначена за формулою (33). У результаті низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1) – (3):

$$u_j(r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{V^{(\mu)}_{(\alpha),1}(R_0,\beta)}{(-\alpha^0_{11})(\beta^2+q_3^2)}V^{(\mu)}_{(\alpha);j}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta\sigma_1 shR_0 g_0+ \\ +\int\limits_{R_0}^{R_1}\Big(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{V^{(\mu)}_{(\alpha),j}(r,\beta)}{(\beta^2+q_3^2)}V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(\rho,\beta)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta\Big)g_1(\rho)sh\rho\sigma_1 d\rho+ \\ +\int\limits_{R_1}^{R_2}\Big(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{V^{(\mu)}_{(\alpha),j}(r,\beta)}{\beta^2+q_3^2}V^{(\mu)}_{(\alpha);2}(\rho,\beta)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta\Big)g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}\sigma_2 d\rho+ \\ +\int\limits_{R_2}^{\infty}\Big(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{V^{(\mu)}_{(\alpha),j}(r,\beta)}{\beta^2+q_3^2}V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(\rho,\beta)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta\Big)g_3(\rho)\sigma_3\rho^{2\alpha_2-1}d\rho+\sum_{k=1}^{2}d_k\Big[\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\times \\ \times V^{(\mu)}_{(\alpha);j}(r,\beta)\frac{\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}d\beta\omega_{2k}-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)V^{(\mu)}_{(\alpha);j}(r,\beta)\frac{\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}d\beta\omega_{1k}\Big],\ j=\overline{1,3}; \quad (35)$$

Порівнюючи розв'язки (14) та (35) в силу єдиності, отримуємо наступні формули обчислення невласних інтегралів:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{V^{(\mu)}_{(\alpha),1}(R_0,\beta)}{(-\alpha^0_{11})(\beta^2+q_3^2)}V^{(\mu)}_{(\alpha);j}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta=(\sigma_1 shR_0)^{-1}W^{(\mu)}_{(\alpha);1j}(r,q);\ j=\overline{1,3} \quad (36)$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{V^{(\mu)}_{(\alpha),j}(r,\beta)}{\beta^2+q_3^2}V^{(\mu)}_{(\alpha);k}(\rho,\beta)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta=\sigma_k^{-1}\mathcal{H}^{(\mu)}_{(\alpha);jk}(r,\rho,q);\ j=\overline{1,3} \quad (37)$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty Z^{(\mu),k}_{(\alpha),12}(\beta)V^{(\mu)}_{(\alpha),j}(r,\beta)\frac{\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}d\beta=d_k^{-1}\mathcal{R}^{(\mu),j}_{(\alpha);2k}(r,q);k=1,2;\ j=\overline{1,3} \quad (38)$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty Z^{(\mu),k}_{(\alpha);22}(\beta)V^{(\mu)}_{(\alpha),j}(r,\beta)\frac{\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}d\beta=-d_k^{-1}\mathcal{R}^{(\mu);j}_{(\alpha);1k}(r,q);k=1,2;\ j=\overline{1,3} \quad (39)$$

Функції впливу $\mathcal{H}^{(\mu)}_{(\alpha);ik}(r,\rho,q)$ визначені формулами (13), функції Гріна умов спряження $\mathcal{R}^{(\mu);j}_{(\alpha);ik}(r,q)$ визначені формулами (12), а функції Гріна $W^{(\mu)}_{(\alpha);1j}(r,q)$ – формулами (11).

Зауваження 1: Якщо $\max\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\}=q_1^2>0$, то $k_1^2=0, k_2^2=q_1^2-q_2^2\geq 0$, $k_3^2=q_1^2-q_3^2\geq 0$ і замість $(\beta^2+q_3^2)$ стоятиме $(\beta^2+q_1^2)$; якщо $\max\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\}=q_2^2>0$, то $k_1^2=q_2^2-q_1^2\geq 0, k_2^2=0, k_3^2=q_2^2-q_3^2\geq 0$ і вираз $(\beta^2+q_3^2)$ заміниться виразом $(\beta^2+q_2^2)$.

Зауваження 2: Оскільки праві частини в рівностях (36) – (39) не залежать від нерівностей $(q_j^2-q_m^2)\geq 0$, то при необхідності можна покласти $q_1^2=q_2^2=q_3^2\equiv q_0^2>0$.

Підсумком виконаного в роботі дослідження є твердження.

Основна теорема. Якщо вектор-функція $g(r)$ задовільняє умови теореми про основну тотожність і виконується умова (10) однозначної розв'язності крайової задачі (1) – (3), то справджуються формули (36) – (39) обчислення поліпараметричним невласних інтегралів за власними елементами ГДО $M^{(\mu)}_{(\alpha)}$, визначеного рівністю (15).

Література:

1. Конет І.М., Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Мелера – Фока. – Чернівці: Прут, 2002. – 248с.
2. Ленюк М.П. Міхалевська Г.І. Інтегральні перетворення типу Конторовича – Лєбєдєва. – Чернівці: Прут, 2002. –280 с.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468с.
4. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс.- М.: Наука, 1965.-328с.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.- М.: Наука, 1971.-432с.
6. Ленюк .П. Гібридні інтегральні перетворення типу Ейлера – (Фурє, Бесселя). – Львів, 2009. – 76с. (Препринт/НАН України.Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача; 02.09). – Чернівці: Прут, 2009.
7. Ленюк М.П. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Том V. – Чернівці: Прут, 2005. – 368 с.