Романюк В.В.
Хмельницький національний університет,
м. Хмельницький, Україна

РЕГУЛЯРНА ОПТИМАЛЬНА СТРАТЕГІЯ ПРОЕКТУВАЛЬНИКА У МОДЕЛІ ДІЇ НОРМОВАНОГО ОДИНИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА N-КОЛОННУ БУДІВЕЛЬНУ КОНСТРУКЦІЮ-ОПОРУ

Вступ і постановка проблеми дослідження

На сьогодні одна з фундаментальних моделей оптимального використання будівельних ресурсів в конструкціях-опорах як антагоністична модель дії нормованого одиничного навантаження (МДНОН) [1] на двоколонну будівельну конструкцію узагальнена для триколонної опори [2, 3]. У цих моделях мінімізується максимальний дисбаланс відношень стискаючих зусиль до квадратів площ поперечних перерізів. Розглянуті моделі можна узагальнити для N-колонної конструкції-опори, де $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Крім того, якщо брати відношення довільних степенів стискаючих зусиль і площ поперечних перерізів, то буде змодельовано узагальнену проблему усунення N часткових невизначеностей за допомогою мінімізації максимального дисбалансу.

Аналіз останніх досліджень й окреслення невирішеного питання

Узагальнена проблема усунення N часткових невизначеностей за допомогою мінімізації максимального дисбалансу, частинним випадком якої буде МДНОН на N-колонну конструкцію-опору, полягає у знаходженні оптимальної стратегії другого гравця (проектувальника) в антагоністичній грі з ядром як гіперповерхнею [4]

$$T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = T(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}; y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}) =$$

$$= \alpha \max\left\{ \frac{x_1^m}{y_1^n}, \frac{x_2^m}{y_2^n}, \ldots, \frac{x_{N-1}^m}{y_{N-1}^n}, \frac{\left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} x_k\right)^m}{\left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} y_k\right)^n} \right\} = \alpha \max\left\{ \left\{ \frac{x_j^m}{y_j^n} \right\}_{j=1}^{N-1}, \frac{\left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} x_k\right)^m}{\left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} y_k\right)^n} \right\} \tag{1}$$

з параметром $\alpha > 0$ й $m > 0$, $n > 0$ на паралелепіпеді

$$\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} = \left\{ \mathop{\times}_{j=1}^{N-1} X_j \right\} \times \left\{ \mathop{\times}_{k=1}^{N-1} Y_k \right\} = \left\{ \mathop{\times}_{j=1}^{N-1} \left[a_j; b_j\right] \right\} \times \left\{ \mathop{\times}_{k=1}^{N-1} \left[a_k; b_k\right] \right\} \subset$$

$$\subset \left\{ \prod_{n=1}^{N-1} (0; 1) \right\} \times \left\{ \prod_{m=1}^{N-1} (0; 1) \right\} \subset \left\{ \prod_{n=1}^{N-1} [0; 1] \right\} \times \left\{ \prod_{m=1}^{N-1} [0; 1] \right\} \subset \mathbb{R}^{2N-2}, \tag{2}$$

де точка $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{N-2} & x_{N-1} \end{bmatrix} \in \left\{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N-1} \mid x_j \in \left[a_j; b_j\right] \subset (0; 1) \ \forall\ j = \overline{1, N-1} \right\}$ (3)

є чистою стратегією першого гравця (стискаюче зусилля в МДНОН), точка

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{N-2} & y_{N-1} \end{bmatrix} \in \left\{ \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N-1} \mid y_j \in \left[a_j; b_j\right] \subset (0; 1) \ \forall\ j = \overline{1, N-1} \right\} \tag{4}$$

є чистою стратегією другого гравця (площа поперечного перерізу в МДНОН), причому виконані умови

$$X_j = \left[a_j; b_j\right] \subset (0; 1) \quad \forall\ j = \overline{1, N-1}, \ Y_k = \left[a_k; b_k\right] \subset (0; 1) \quad \forall\ k = \overline{1, N-1}, \tag{5}$$

$$x_N = 1 - \sum_{k=1}^{N-1} x_k, \ y_N = 1 - \sum_{k=1}^{N-1} y_k, \tag{6}$$

$$\mu_{\mathbb{R}}\left(\left[a_k; b_k\right]\right) \neq 0 \quad \forall\ k = \overline{1, N-1}, \tag{7}$$

$$a_k < b_k, \ a_k > 0, \ b_k < 1 \quad \forall\ k = \overline{1, N-1}, \ \sum_{k=1}^{N-1} b_k < 1. \tag{8}$$

Звісно, умови (7) і (8) є взаємопов’язаними, серед яких легко визначити зайву [4].

Формулювання мети дослідження узагальненої проблеми усунення невизначеностей

Необхідно знайти оптимальну поведінку проектувальника в МДНОН на N-колонну конструкцію-опору як оптимальну стратегію другого гравця у грі з ядром (1) на паралелепіпеді (2) за умов (5) – (8). Така оптимальна поведінка стане методом усунення N часткових невизначеностей за допомогою узагальненого принципу мінімізації максимального дисбалансу.

Теорема про обґрунтування опуклості гри з ядром (1) на паралелепіпеді (2)

Теорема 1. Антагоністична гра з ядром (1) з параметром $\alpha > 0$ й $m > 0$, $n > 0$ на паралелепіпеді (2) за умов (5) - (8) є опуклою.

Доведення. Умовою опуклості цієї гри є виконання нерівностей

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} T\left(\mathbf{X}, \mathbf{Y}\right) \geqslant 0 \quad \forall\ y_j \in Y_j \text{ та } \forall\ x_l \in X_l \text{ при } j = \overline{1, N-1} \text{ та } l = \overline{1, N-1},\ i = \overline{1, N-1}. \quad (9)$$

Маємо можливі ненульові значення перших частинних похідних (майже скрізь):

$$\frac{\partial}{\partial y_i} T\left(\mathbf{X}, \mathbf{Y}\right) = -\alpha \frac{n x_i^m}{y_i^{n+1}} \text{ або } \frac{\partial}{\partial y_i} T\left(\mathbf{X}, \mathbf{Y}\right) = \alpha \frac{n\left(1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} x_k\right)^m}{\left(1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} y_k\right)^{n+1}} \quad \forall\ i = \overline{1, N-1}. \quad (10)$$

Зі співвідношень (10) слідують можливі ненульові значення для других частинних похідних (майже скрізь):

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} T\left(\mathbf{X}, \mathbf{Y}\right) = \alpha \frac{n\left(n+1\right) x_i^m}{y_i^{n+1}} \text{ або } \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} T\left(\mathbf{X}, \mathbf{Y}\right) = \alpha \frac{n\left(n+1\right)\left(1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} x_k\right)^m}{\left(1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} y_k\right)^{n+2}} \quad \forall\ i = \overline{1, N-1}. \quad (11)$$

Усі чисельники і знаменники дробів під знаком максимуму в (11) є додатними, звідки майже скрізь випливає (9). На нуль-вимірних множинах, де ядро (1) не є диференційовним, його перші частинні похідні (10) "стрибають" з меншого значення у більше, тому і там (9) виконано. Теорему доведено.

Теорема про єдину чисту оптимальну стратегію проектувальника в опуклій грі з ядром (1) на паралелепіпеді (2)

Теорема 2. В опуклій грі з ядром (1) з параметром $\alpha > 0$ й $m > 0$, $n > 0$ на паралелепіпеді (2) за умов (5) - (8) другий гравець (проектувальник) має єдину чисту оптимальну стратегію:

$$\mathbf{Y}_* = \begin{bmatrix} y_1^* & y_2^* & \cdots & y_{N-2}^* & y_{N-1}^* \end{bmatrix} \in \left\{ \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N-1} \mid y_j \in \left[a_j; b_j\right] \subset \left(0; 1\right) \ \forall\ j = \overline{1, N-1} \right\} \quad (12)$$

з компонентами

$$y_j^* = \frac{b_j^{m/n}}{\sum\limits_{k=1}^{N-1} b_k^{m/n} + \left(1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k\right)^{m/n}} \quad \forall\ j = \overline{1, N-1} \quad (13)$$

при виконаних умовах належностей

$$\frac{b_j^{m/n}}{\sum\limits_{k=1}^{N-1} b_k^{m/n} + \left(1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k\right)^{m/n}} \in \left[a_j; b_j\right] \quad \forall\ j = \overline{1, N-1}. \quad (14)$$

Доведення. Оскільки за Теоремою 1 досліджувана гра є опуклою, то у ній за відомою теоремою про оптимальні стратегії другого гравця в опуклій грі проектувальник має (можливо, єдину) чисту оптимальну стратегію (12), котра знаходиться за принципом мінімаксу [1, 2, 4]. Маємо

$$\max_{\mathbf{X}\in\prod\limits_{j=1}^{N-1} X_j} T\left(\mathbf{X},\mathbf{Y}\right) = \max_{\mathbf{X}\in\prod\limits_{j=1}^{N-1}\left[a_j;\,b_j\right]} T\left(\mathbf{X},\mathbf{Y}\right) = \max_{\mathbf{X}\in\prod\limits_{j=1}^{N-1}\left[a_j;\,b_j\right]} \left\{ \alpha \max\left\{ \left\{\frac{x_j^m}{y_j^n}\right\}_{j=1}^{N-1},\ \frac{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} x_k\right)^m}{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} y_k\right)^n} \right\} \right\} =$$

$$= \alpha \max\left\{ \left\{ \max_{x_j\in\left[a_j;\,b_j\right]} \left\{\frac{x_j^m}{y_j^n}\right\} \right\}_{j=1}^{N-1},\ \max_{\mathbf{X}\in\prod\limits_{j=1}^{N-1}\left[a_j;\,b_j\right]} \left\{ \frac{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} x_k\right)^m}{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} y_k\right)^n} \right\} \right\} =$$

$$= \alpha \max\left\{ \left\{\frac{b_j^m}{y_j^n}\right\}_{j=1}^{N-1},\ \frac{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k\right)^m}{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} y_k\right)^n} \right\} = \alpha \max\left\{ \frac{b_1^m}{y_1^n},\ \frac{b_2^m}{y_2^n},\ \ldots,\ \frac{b_{N-1}^m}{y_{N-1}^n},\ \frac{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k\right)^m}{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} y_k\right)^n} \right\}, \tag{15}$$

$$\min_{\mathbf{Y}\in\prod\limits_{k=1}^{N-1} Y_k} \left\{ \max_{\mathbf{X}\in\prod\limits_{j=1}^{N-1} X_j} T\left(\mathbf{X},\mathbf{Y}\right) \right\} = \min_{\mathbf{Y}\in\prod\limits_{k=1}^{N-1}\left[a_k;\,b_k\right]} \left\{ \max_{\mathbf{X}\in\prod\limits_{j=1}^{N-1}\left[a_j;\,b_j\right]} T\left(\mathbf{X},\mathbf{Y}\right) \right\} =$$

$$= \min_{\mathbf{Y}\in\prod\limits_{k=1}^{N-1}\left[a_k;\,b_k\right]} \left\{ \alpha \max\left\{ \left\{\frac{b_j^m}{y_j^n}\right\}_{j=1}^{N-1},\ \frac{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k\right)^m}{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} y_k\right)^n} \right\} \right\} = \alpha \max\left\{ \left\{\frac{b_j^m}{\left(y_j^*\right)^n}\right\}_{j=1}^{N-1},\ \frac{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k\right)^m}{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} y_k^*\right)^n} \right\} = v_*. \tag{16}$$

Оптимальне значення гри v_* у (16) досягається на таких $\left\{y_j^*\right\}_{j=1}^{N-1}$, що

$$v_* = \alpha \frac{b_j^m}{\left(y_j^*\right)^n} = \alpha \frac{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k\right)^m}{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} y_k^*\right)^n} \quad \forall\ j=\overline{1,\,N-1}. \tag{17}$$

Із (17) отримуємо

$$y_j^* = \left(\alpha \frac{b_j^m}{v_*}\right)^{1/n} \quad \forall\ j=\overline{1,\,N-1}, \qquad 1-\sum_{k=1}^{N-1} y_k^* = \left(\alpha \frac{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k\right)^m}{v_*}\right)^{1/n}, \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} y_j^* + 1 - \sum_{k=1}^{N-1} y_k^* = 1 = \sum_{j=1}^{N-1}\left(\alpha \frac{b_j^m}{v_*}\right)^{1/n} + \left(\alpha \frac{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k\right)^m}{v_*}\right)^{1/n} =$$

$$= \alpha^{1/n} \frac{\sum_{j=1}^{N-1} b_j^{m/n} + \left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k\right)^{m/n}}{\left(v_*\right)^{1/n}} = \alpha^{1/n} \frac{\sum_{k=1}^{N-1} b_k^{m/n} + \left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k\right)^{m/n}}{\left(v_*\right)^{1/n}}, \tag{19}$$

$$\left(v_*\right)^{1/n} = \alpha^{1/n} \left[\sum_{k=1}^{N-1} b_k^{m/n} + \left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k\right)^{m/n}\right], \tag{20}$$

$$v_* = \alpha \left[\sum_{k=1}^{N-1} b_k^{m/n} + \left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k\right)^{m/n}\right]^n, \tag{21}$$

$$y_j^* = \left(\alpha \frac{b_j^m}{v_*}\right)^{1/n} =$$

$$= \left(\alpha \frac{b_j^m}{\alpha \left[\sum_{k=1}^{N-1} b_k^{m/n} + \left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k\right)^{m/n}\right]^n}\right)^{1/n} = \frac{b_j^{m/n}}{\sum_{k=1}^{N-1} b_k^{m/n} + \left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k\right)^{m/n}} \quad \forall\ j = \overline{1, N-1}. \tag{22}$$

Звичайно, виведене (13) через (17) — (22) має місце тільки при (14), адже має бути виконано (12), тобто $\mathbf{Y}_* \in \mathop{\times}\limits_{k=1}^{N-1} \left[a_k; b_k\right]$ обов'язково. Теорему доведено.

Висновок і перспективи подальших досліджень дії нормованого одиничного навантаження

За (13) відбуватиметься не тільки відповідний розподіл будівельних ресурсів виготовлення N призматичних колон конструкції-опори [1, 2], а й усунення N часткових невизначеностей [4] за допомогою узагальненого принципу мінімізації максимального дисбалансу у формі гіперповерхні (1) з параметром $\alpha > 0$ й $m > 0$, $n > 0$ на паралелепіпеді (2) за умов (5) - (8). У подальших дослідженнях щодо дії нормованого одиничного навантаження слід узагальнювати метод визначення компонент у (12), які за (13) можуть називатися регулярними, як і сама оптимальна стратегія. Таке узагальнення стосуватиметься випадків виходу частини компонент вектора (12) за границі відповідних областей $\left\{\left[a_j; b_j\right]\right\}_{j=1}^{N-1}$.

Література

1. Романюк В. В. Модель визначення оптимального рішення проектувальника у задачі про розрахунок повздовжньої стійкості двох елементів будівельної конструкції при дії на них нормованого стискаючого зусилля / В. В. Романюк // Проблеми трибології. – 2010. – № 1. – С. 42-56.

2. Романюк В. В. Моделювання дії нормованого одиничного навантаження на три колони однакової висоти у будівельній конструкції і знаходження оптимальної площі кожної опори / В. В. Романюк // Проблеми трибології. – 2010. – № 3. – С. 18-25.

3. Романюк В. В. Доведення тверджень для моделі дії нормованого одиничного навантаження на три колони однакової висоти у будівельній конструкції / В. В. Романюк // Проблеми трибології. – 2010. – № 4. – С. 72-81.

4. Романюк В. В. Модель усунення часткових невизначеностей імовірнісного типу як мінімізація максимального дисбалансу // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наукових праць. Комп'ютерні системи та компоненти. – Чернівці: ЧНУ, 2011.

Надійшла 14.04.2011