Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кисіль Тетяна Миколаївна

УДК 512.552.12

РЕДУКЦІЯ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЯМИ БЕЗУ СКІНЧЕННОГО СТАБІЛЬНОГО РАНГУ

01.01.06 – алгебра і теорія чисел

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів – 2007

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі алгебри і логіки Львівського національного університету імені Івана Франка

Науковий керівник доктор фізико-математичних наук, доцент
Забавський Богдан Володимирович
Львівський національний університет імені Івана Франка,
професор кафедри алгебри і логіки.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Дубровін Микола Іванович
Володимирський державний університет (Росія),
завідувач кафедри вищої математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Кириченко Володимир Васильович
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
професор кафедри геометрії

Захист відбудеться “ 20 ” вересня 2007 року о 15^{30} год. на засіданні спеціалізованої вченої ради К 35.051.07 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м.Львів, вул. Університетська,1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою м.Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розіслано “ 14 ” серпня 2007 року

Вчений секретар
Спеціалізованої вченої ради Остудін Б.А.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми.

Вивчення кілець елементарних дільників розпочато в 1861р. Г.Смітом[1]. Він довів, що кожна матриця з цілочисельними елементами шляхом елементарних перетворень рядків і стовпчиків зводиться до діагонального вигляду, причому кожний елемент головної діагоналі є дільником наступного (у зв'язку з цим діагональну форму матриці з умовою подільності діагональних елементів часто називають формою Сміта). Природним чином виникло запитання: над якими кільцями довільна матриця домноженням на оборотні матриці приводиться до вказаного діагонального вигляду (тобто коли матриця володіє канонічною діагональною редукцією).

Можливість такої канонічної діагональної редукції над комутативними і некомутативними областями Евкліда і комутативними областями головних ідеалів встановили Л.Діксон[2] (1923р.), Д.Веддерберн[3] (1932), Н.Джекобсон[4] (1937). Пізніше в 1937р. О.Тейхмюллер[5] узагальнив теорему про діагональну редукцію матриць на випадок довільної некомутативної області головних ідеалів (в іншому формулюванні К.Асано[6]).

Всі ці результати спонукали І.Капланського[7] у 1949р. до введення поняття кільця елементарних дільників. В цій же роботі І.Капланський дослідив зв'язок можливості діагональної редукції матриць з розкладністю скінченно-зображуваних модулів. А саме, він показав, що над кільцем елементарних дільників довільний скінченно-зображуваний модуль розкладається в пряму суму циклічних. Як показали М.Ларсен, В.Левіс, Т.Шорес[8] у випадку комутативних кілець вірне і обернене твердження: якщо довільний скінченно-зображуваний модуль розкладається в пряму суму циклічних модулів, то кільце є кільцем елементарних дільників. Цей результат є частковим роз-

---

[1] *Smith H.J.S.* On systems of linear indeterminate equations and congruences // Philos. Trans. Roy. Soc., London,-1861,-151,№2,293-326.

[2] *Dickson L.E.* Algebras and Their Arithmetics // University of Chicago Press, 1923.

[3] *Wedderburn J.H.M.* Non-commutative domains of integrity // J. Reine Andrew Math.-1932.-167,№1.-129-141.

[4] *Jacobson N.* Pseudo-linear transformationd // Ann. of Math.-1937.-38.-484-507.

[5] *Teichmuller O.* Der Elementarteilsatz fыr nichtcommutative Ringe // Abh. Preuss. Acad. Wiss. Phis.-Math. K1.-1937.-169-177.

[6] *Asano K.* Neichtkommutative Hauptidealringe. // Act. Sci. Ind. 696, Hermann, Paris,-1938.

[7] *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Maht. Soc.-1949.-66.-P.464-491.

[8] *Larsen M., Lewis W., Shores T.* Elementary divisor rings and finitely presented modules // Trans. Amer. Math. Soc.-1974.-187.-P.231-248.

в'язком проблеми Р.Уорфілда[9]: над якими кільцями кожний скінченно-зображуваний модуль розкладається в пряму суму циклічних модулів. Таким чином, для випадку комутативних кілець проблема Р.Уорфілда еквівалентна проблемі описання кілець елементарних дільників. У некомутативному випадку вона не розв'язана. Повне розв'язання цієї проблеми для класу узагальнено однорядних кілець отримано Ю.А.Дроздом[10]. Близькими поняттями займався також В.В.Кириченко[11].

Оскільки кільце елементарних дільників є кільцем Безу, то природно виникає питання: чи кожне кільце Безу є кільцем елементарних дільників. Негативну відповідь на це питання отримали Л.Гільман і М.Хенріксен[12]. Вони побудували приклад комутативного кільця Безу (з дільниками нуля), яке не є кільцем елементарних дільників. З огляду на це виникає наступне питання: а чи кожна комутативна область Безу є кільцем елементарних дільників? Це питання явно і неявно неодноразово ставили М.Хенріксен, П.Кон, І.Капланський, Т.Шорес та інші математики, але остаточної відповіді на це питання на даний час немає.

Важливу роль у вивченні кілець елементарних дільників відіграють кільця Ерміта, а саме кільця, над якими діагоналізуються всі 1×2 та 2×1 матриці. Зауважимо, що кільце Ерміта є кільцем Безу. Основними прикладами кілець Безу є кільця неперервних дійсних функцій над цілком регулярним Гаусдорфовим простором, кільце многочленів (степеневих рядів) над полем раціональних чисел з цілим вільним членом, кільце всіх цілих алгебраїчних чисел, кільце аналітичних функцій в комплексній площині. Зауважимо, що в роботі Л.Гільмана і М.Хенріксена[12] побудовано приклад кільця Ерміта, яке не є кільцем Безу. Отже, класи кілець Безу, Ерміта і елементарних дільників не співпадають, тому природно виникає задача: при яких умовах кільце Безу є кільцем Ерміта? Зауважимо, що, як показали П.Менал, Дж.Монкасі[13], регулярне кільце є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли воно є кільцем Ерміта. Аналогічний результат для певних класів напівгрупових кілець отримав Л.Чоунард[14], а для комутативних

---

[9] *Warfield R.B.* Decomposibility of finitely presented modules // Proc. Amer. Math. Soc.,-1970,-25,№2, 167-172.

[10] *Дрозд Ю.А*. Об обобщенно однорядных кольцах // Мат. заметки.-1975.-18.-?5.-705-710.

[11] *Кириченко В.В*. Обобщенно однорядные кольца // Мат. сборник.-1976.-99.-№4.-559-581.

[12] *Gillman L., Henriksen M.* Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal // Trans. Amer. Math. Soc.,-1956,-82, 366-394.

[13] *Menal P., Moncasi J.* On regular rings with stable range 2 // J. Pure Appl. Algebra.-1982,- 24.- 25-40.

[14] *Chouinard L.C*. Hermite semigroup rings // Pacific. J. Math.,-1982,-101, 125-139.

адекватних кілець М.Ларсен, В.Левіс, Т.Шорес [8]. Зауважимо, що область Безу є завжди кільцем Ерміта. П.Менал і Дж.Монкасі[13] встановили, що стабільний ранг кільця Ерміта не перевищує 2. Продовживши ці дослідження, Б.В.Забавський [15] довів, що комутативне кільце Безу є кільцем Ерміта тоді і тільки тоді, коли його стабільний ранг не перевищує 2.

Поняття стабільного рангу прийшло в теорію кілець з K-теорії і, як бачимо, виявилось корисним для розв'язання ряду відкритих задач теорії діагональної редукції матриць. Воно вперше було введено Х.Басом[16]. І.Капланський вказав, що регулярне кільце є одинично-регулярним тоді і тільки тоді, коли його стабільний ранг дорівнює 1. М.Хенріксен встановив, що над одинично регулярним кільцем довільна матриця еквівалентна діагональній[12]. В сучасних алгебраїчних дослідженнях, пов'язаних з діагональною редукцією матриць над регулярними кільцями, поняття стабільного рангу кільця використовується явно або неявно.

Зауважимо, що некомутативні кільця елементарних дільників досліджені досить фрагментарно. Крім наведених результатів, що стосуються регулярних кілець і кілець головних ідеалів потрібно особливо відмітити результати П.Кона[17], який показав, що права головна область Безу є кільцем, над яким довільна матриця еквівалентна діагональній. Також побудовано приклад таких кілець.

М.Хенріксен [18] поставив ряд задач стосовно кільця Ерміта: 1) чи буде комутативне напівлокальне кільце Безу кільцем Ерміта? та 2) чи буде комутативне кільце Безу, фактор-кільце якого по радикалу Джекобсона є кільце Ерміта, саме кільцем Ерміта? Пізніше М.Хенріксен додає таку задачу: 3) чи буде комутативне кільце Безу, в якому простір мінімальних простих ідеалів є компактним, кільцем Ерміта. На перше питання у випадку комутативних кілець позитивна відповідь була отримана в роботі М.Ларсена, В.Левіса, Т.Шореса[8]. Використовуючи поняття стабільного рангу, Б.В.Забавський отримав позитивні відповіді на питання М.Хенріксена для більш загальних кілець, а саме, правих кілець Безу. Зауважимо, що позитивну відповідь на питання 3,

---

[15] *Zabavsky B.V.* Diagonalization of matrices over ring with finite stable rank // Вісник Львівського університету.-2003.-61.-206-211.

[16] *Bass H.* K-theory and stable algebra // Inst. Hautes Etudes. Sci. Publ. Math.,-1964,-22, 485-544.

[17] *Cohn P.M.* Right principal Bezout domains // J. London Math. Soc., 35, №2, (1987), 251-162.

[18] *Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings // Michigan Math.J.-1955/56.-3.-159-163.

незалежно від Б.В.Забавського, отримав Ф.Кошу[19]. Стало зрозуміло, що будь-який істотний прогрес в теорії кілець елементарних дільників, є неможливий без застосування серйозних результатів досліджень з К-теорії.

М.І.Дубровін показав, що напівлокальне і напівпервинне кільце Безу R є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли для довільного елемента $a \in R$ знайдеться елемент $b \in R$ такий, що $RaR=bR=Rb$. (Зауважимо, що такі кільця отримали назву кільця з умовою Дубровіна).

Більше того, при вивченні квазідуо-області елементарних дільників Б.В.Забавський, М.Я.Комарницький[20] показали, що умова Дубровіна є необхідною. Використовуючи ці результати О.Туганбаєв[21] показав, що дистрибутивні кільця елементарних дільників – це дуо-кільця.

Відомий приклад простої області Безу, яка не є областю головних ідеалів[22]. Б.В.Забавський[23] показав, що проста область Безу є областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є 2-простою. Крім того, він описав умови, коли просте одинично регулярне кільце є кільцем елементарних дільників. Слід відмітити, що у вказаних дослідженнях діагональної редукції матриць та інших, не згадуваних тут, велику роль відіграє поняття стабільного рангу.

Існує дещо інший підхід до вивчення кілець Безу. Кільця Безу відрізняються від кілець головних ідеалів наявністю неголовних ідеалів. При дослідженні кілець Безу, Б.В.Забавський ввів в розгляд максимально неголовні праві (ліві) ідеали[24]. Він встановив зв'язок структури максимально неголовних ідеалів з факторизацією елементів кільця[25], що дозволило побудувати факторіальний аналог дистрибутивних кілець[25], як клас кілець Безу, які нетривіально узагальнюють дистрибутивні

---

[19] *Couchom F.* The л-dimension of commutative arithmetic ring // Commun. in Algebra.-2004.-v.31.-7. -1-14.

[20] *Забавский Б.В., Комарницкий Н.Я.* Дистрибутивные области с элементарными делителями // Укр. мат. журнал.-1990.-42.-№7.-1000-1004.

[21] *Туганбаев А.А.* Кольца элементарных делителей и дистрибутивные кольца // Успехи математических наук.-1991.-46.-6.-219-220.

[22] *Cohn P.M., Schofield A.H.* Two examples of principal ideal domains // Bull. London Math. Soc.,-1985,-17, №1, 26-28.

[23] *Забавский Б.В.* Простые кольца элементарных делителей // Математичні студії,-2004.-т.22.-№2.-129-133.

[24] *Забавський Б.В*. Некомутативний аналог теорем Коена // Укр.мат.журн.-1996.-48.-№5.-707-710.

[25] *Забавський Б.В*. Факторіальний аналог дистрибутивних областей Безу // Укр. мат. журн.-2001.-53.-№11,-1564-1567.

кільця Безу з можливістю діагональної редукції матриць. В даній дисертаційній роботі поєднуються ці дослідження з новими досягненнями К-теорії. На даний час теорія кілець елементарних дільників є самостійною гілкою теорії кілець і модулів, в рамках якої, як бачимо, виділено ряд загальних проблем. Причому, попри всі відомі характеризації, сама проблематика в своєму загальному формулюванні далеко не вичерпана.

Все це підкреслює актуальність досліджень різних класів кілець Безу скінченного стабільного рангу через призму можливої діагональної редукції матриць. Висловлені вище міркування говорять про актуальність даної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Робота виконана на кафедрі алгебри і логіки механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка. Дослідження, які складають основу даної дисертаційної роботи, проводились у відповідності з тематикою дослідження кафедри алгебри і логіки Львівського національного університету імені Івана Франка "Арифметичні, геометричні та логічні проблеми теорії алгебраїчних структур" (номер державної реєстрації 0104U002129).

Мета і завдання дослідження.

Дослідити властивості кілець Безу скінченного стабільного рангу. Встановити можливість діагональної редукції матриць над різними класами кілець Безу скінченного стабільного рангу: майже простими кільцями, всюди адекватними, комутативними в нулі та ін. Вивчити вплив структури кільця на можливість діагональної редукції.

Наукова новизна одержаних результатів. Всі результати, отримані в дисертації є новими. У дисертаційній роботі одержано такі результати:

- описано праві кільця Безу скінченного стабільного;
- встановлено умови, при яких майже просте кільце є кільцем елементарних дільників;
- встановлено, що кільце елементарних дільників з умовою Лама-Дугаса є дуо-кільцем;
- доведено, що над всюди адекватним кільцем кожна квадратна матриця зводиться до канонічного діагонального вигляду тоді і тільки тоді, коли його стабільний ранг не перевищує 2;
- вивчено вплив структури максимально неголовних ідеалів областей Безу на редукцію матриць над цими кільцями;
- розвинуто теорію коадекватних елементів комутативної області Безу через вивчення структури, так званих, максимально некоадекватних ідеалів.

Практичне значення одержаних результатів.

Результати, одержані в дисертаційній роботі, мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані в теорії кілець і модулів, в теорії диференціальних рівнянь і рівнянь математичної фізики, в теорії операційних систем, а також в алгебраїчній К-теорії.

Особистий внесок здобувача.

Всі наукові результати, включені в дисертаційну роботу, отримані здобувачем особисто. У роботі [4] (із списку публікацій автора за темою дисертації) Б.В.Забавському належить постановка задачі, ідеї і керівництво роботою, доведення отримані автором самостійно. З роботи [2] на захист виносяться лише результати, отримані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації.

Основні результати дисертаційної роботи доповідались на таких конференціях:

- IV Міжнародній алгебраїчній конференції (Львів, 2004);
- II конференції математичного товариства (Молдова, 2004);
- V Міжнародній алгебраїчній конференції (Одеса, 2005);
- Міжнародна конференція по радикалах (Київ, 2006);
- VI Міжнародній алгебраїчній конференції (Кам'янець-Подільський, 2007);

Крім того, результати дисертаційної роботи неодноразово доповідались на алгебраїчних семінарах Львівського національного університету імені Івана Франка.

Публікації. Основні результати дисертації, опубліковано в 9 наукових роботах. З них 3 наукові роботи надруковані у виданнях з переліку, затвердженого ВАК України, у тому числі 2 статті у співавторстві.

Структура і об'єм дисертації.

Дисертація складається зі вступу; розділу "попередні відомості"; основної частини, яка складається з трьох розділів, розбитих на підрозділи; висновків; списку використаних джерел, який займає 30 сторінок і включає 245 найменувань. Загальний обсяг праці 123 сторінки.

Автор виносить щиру подяку науковому керівнику Б.В.Забавському за ідейне наповнення та постійну увагу до роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовується актуальність вибраної теми, визначаються мета та задачі дослідження, вказується зв'язок дисертації з науковими програмами Львівського національного університету імені Івана Франка, наводяться основні результати і відзначається їх новизна, дається інформація про апробацію основних результатів дисертаційної роботи і практичне значення одержаних результатів, вказано кількість публікацій та структуру дисертації.

У розділі **попередні відомості** наведено визначення основних понять та формулювання відомих результатів, які використовуються в дисертаційній роботі. Нагадаємо найбільш вживані поняття і позначення.

Під кільцем R будемо розуміти асоціативне кільце з відмінною від нуля одиницею.

$U(R)$ – група оборотніх елементів кільця R;

$GL_n(R)$ – повна лінійна група кільця R;

$GE_n(R)$ – група елементарних матриць кільця R;

$J(R)$ – радикал Джекобсона кільця R

Правим (лівим) кільцем Безу називається кільце, в якому довільний скінченнопороджений правий (лівий) ідеал є головним. Кільце Безу -- це кільце, яке є правим і лівим кільцем Безу одночасно.

Правим (лівим) дуо-кільцем називається кільце, в якому кожний правий (лівий) ідеал R є двобічний. Кільце називається дуо-кільцем, якщо воно є лівим і правим дуо-кільцем одночасно.

Кільце R називається регулярним (в сенсі Неймана), якщо для довільного елемента $a \in R$ існує такий елемент $x \in R$, що $axa=a$.

Одинично регулярним називається кільце R, в якому для довільного елемента $a \in R$ існує такий елемент $u \in U(R)$, такий що $aua=a$.

Матриці A та B називають еквівалентними, якщо існують такі оборотні матриці P і Q над кільцем R відповідних розмірів, що $A=PBQ$.

В дисертації використовуються різні типи діагональної редукції матриць.

Матриця A над кільцем R володіє діагональною редукцією, якщо вона еквівалентна до діагональної матриці.

Матриця *A* над кільцем *R* володіє канонічною діагональною редукцією, якщо вона еквівалентна до діагональної матриці $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, де $R\varepsilon_{i+1}R \subseteq R\varepsilon_i \cap \varepsilon_i R$ для довільного $i \in (1,\dots,r-1)$. Елементи $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r$ називають елементарними дільниками матриці *A*.

Якщо над кільцем *R* довільна матриця володіє діагональною редукцією, то говорять, що кільце *R* може бути діагоналізованим або є кільцем елементарних дільників за Хенріксеним

Якщо над кільцем *R* довільна матриця володіє канонічною діагональною редукцією, то таке кільце *R* називається кільцем елементарних дільників або класичним кільцем елементарних дільників.

Якщо довільна 1×2 (2Ч1) матриця над кільцем *R* володіє діагональною редукцією, то кільце R називається правим (лівим) кільцем Ерміта. Кільце, яке є правим і лівим кільцем Ерміта одночасно, називається кільцем Ерміта.

Кільце *R* називається *n*-простим, якщо існує таке натуральне число *n* (найменше зі всіх можливих), що для кожного ненульового елемента $a \in R$ виконується $u_1av_1+u_2av_2+\dots+u_nav_n=1$.

Ненульовий елемент $a \in R$ називається адекватним, якщо для кожного елемента $b \in R$ знайдуться елементи $r,s \in R$ такі, що

1. $a=rs$,
2. $rR+bR=R$,
3. для довільного $s' \in R$ такого, що $sR \subset s'R \neq R$ випливає, що ідеал $s'R+bR$ – властивий.

Кільце, в якому кожний ненульовий елемент є адекватним називається адекватним.

Комутативне кільце Безу *R* назвемо всюди адекватним, якщо для довільних елементів $a,b \in R$ існують такі $r,s \in R$, що $a=rs$, де $rR+bR=R$ і для довільного необоротного дільника s' елемента s ідеал $s'R+bR$ – властивий. Зауважимо, що елемент *a* може бути зокрема і нулем

Умова: для довільного елемента $a \in R$ існує елемент $b \in R$ такий, що $RaR=bR=Rb$, називається умовою Дубровіна (умова D).

Скажемо, що в кільці *R* виконується умова Лама-Дугаса (умова L), якщо для елемента *a* з умови $RaR=R$ слідує, що *a* - оборотній елемент кільця *R*.

Рядок $(a_1,\dots,a_n) \in R^n$ назвемо правим унімодулярним рядком, якщо $a_1R+a_2R+\dots+a_nR=R$. Аналогічно, рядок $(a_1,\dots,a_n) \in R^n$ назвемо лівим унімодулярним рядком, якщо $Ra_1+Ra_2+\dots+Ra_n=R$.

Скажемо, що натуральне число *n* є стабільним рангом кільця *R*, або що *R* має стабільний ранг *n*, або стабільний ранг *R* не перевищує *n*, якщо для довільного правого унімодулярного рядка

$(a_1,...,a_{n+1}) \in R^{n+1}$ існують такі елементи $x_1, ..., x_n \in R$, що рядок $(a_1+a_{n+1}x_1, a_2+a_{n+1}x_2, ..., a_n+a_{n+1}x_n) \in R^n$ є правим унімодулярним, причому число n є найменшим з такою властивістю.

Згідно означення ми повинні говорити про "правий" стабільний ранг, по аналогії можна говорити про "лівий" стабільний ранг. Але згідно результатів Васерштейна[26] і Уорфілда[27] вони є рівні.

Правий (лівий) ідеал I кільця R, який є максимальним в множині неголовних правих (лівих) ідеалів, називається максимально неголовним правим (лівим) ідеалом.

Кільце R називається комутативне в нулі, якщо з $ab=0$ випливає $ba=0$.

Перший розділ “Некомутативні кільця Безу” складається з шести підрозділів і присвячений опису деяких класів некомутативних кілець елементарних дільників. В роботі Б.В.Забавського[15] описано регулярні кільця ситабільного рангу $n < \infty$. На початку першого розділу роботи отримано узагальнення даного описання на випадок правого кільця Безу скінченного стабільного рангу, а саме доведено:

Теорема 1.1.1. *Нехай R - праве кільце Безу стабільного рангу n. Тоді для довільного рядка* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *існує елемент* $d \in R$ *і унімодулярний рядок* $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in R$, *що* $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = d(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Зауважимо, що регулярне кільце є кільцем Безу. Вивчаючи редукцію матриць над регулярними кільцями, отримано висновок, що якщо R – регулярне кільце стабільного рангу n, тоді для довільної kЧm - матриці A над кільцем R, де $|k-m|\geq n$, існують такі оборотні матриці $P \in GE_k(R)$ *та* $Q \in GE_m(R)$, що матриця PAQ є діагональною. Зауважимо, що дані результати узагальнюють результати Б.В.Забавського[15].

В наступному підрозділі показані умови, при яких просте комутативне в нулі кільце Ерміта є кільцем елементарних дільників, а саме показано:

Теорема 1.3.1. *Нехай R - просте комутативне в нулі кільце Ерміта. Тоді R є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли воно є 2-простим.*

---

[26] *Vaserstein L.N.* Bass’s first stable range condition // J. of Pure and Appl. Alg., 1984,-34,319-330

[27] *Warfield R.B.* Stable equivalence of matrices and resolutions // Zcomm. Algebra, - 1979, -7,№5, -535-545.

Брунгс і М.І. Дубровін[28] ввели в розгляд і досліджували майже прості області Безу. У третьому підрозділі першого розділу отримано критерій, коли майже проста область Безу є областю елементарних дільників, що є узагальненням аналогічного результату Б.В.Забавського[23].

Теорема 1.3.3. *Нехай R - майже проста область Безу. Тоді R є областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є 2-простою.*

Далі показано, що праве кільце Безу, в якому радикал Джекобсона є цілком простий, є правим кільцем Ерміта. З даного результату випливає відомий результат роботи М.Ларсена, В.Левіса, Т.Шореса для випадку комутативних кілець. В наступному підрозділі наводяться деякі достатні умови для того, щоб кільце було дуо-кільцем:

Теорема 1.5.1. *Кільце елементарних дільників з умовою L, всі дільники якого лежать в радикалі Джекобсона, є дуо-кільцем.*

В останньому підрозділі першого розділу показано, що умова Дубровіна є достатньою для того, щоб область Безу стабільного рангу 1 була кільцем елементарних дільників.

Теорема 1.6.1. *Нехай R - кільце Безу, в якому виконується умова Дубровіна. Тоді R є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли таким є кільце R/J(R).*

Теорема 1.6.2. *Нехай R - область Безу стабільного рангу 1, в якій виконується умова D і L. Тоді R є кільцем елементарних дільників.*

Важливими результатами **другого** розділу є дослідження редукції матриць над всюди адекватними кільцями, крім того, встановлено, що редукція досягається шляхом односторонніх елементарних перетворень. Демонструють це наступні результати:

Теорема 2.1.1. *Всюди адекватне кільце є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли його стабільний ранг не перевищує 2.*

Теорема 2.1.2. *Нехай R – всюди адекватне кільце стабільного рангу 2. Тоді для довільної квадратної матриці A порядку n можна знайти такі матриці* $P \in GE_n(R)$, $Q \in GL_n(R)$, *що*

$$PAQ = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_k & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ де } \varepsilon_{i+1}R \subseteq \varepsilon_i R,\ i=1,\dots k-1.$$

[28] Brungs H.H., Dubrovin N.I. A classification and examples of rank one chain domains // Trans. Amer. Math. Soc. – 2003.-355,№7.-2733-2753.

Наступний підрозділ присвячено теорії коадекватних елементів комутативної області Безу.

Теорема 2.2.1. *Нехай R – комутативна область Безу, в якій довільний максимально некоадекватний ідеал не є максимальним. Тоді довільний ненульовий простий ідеал R міститься щонайбільше в одному максимально некоадекватному ідеалі.*

Теорема 2.2.2. *Нехай R – комутативна область Безу і нехай P -- простий ідеал R, який містить хоча б один коадекватний елемент. Тоді P міститься в єдиному максимальному ідеалі.*

Третій розділ присвячено дослідженню областей Безу, в яких максимально неголовні праві ідеали є двобічні, вивчається вплив структури максимально неголовних ідеалів областей Безу на редукцію матриць над цими кільцями. Основним результатом першого підрозділу є така теорема:

Теорема 3.1.1. *Нехай R - область Безу стабільного рангу 1, в якій виконується умова Дубровіна і довільний максимально неголовний правий ідеал є ідеалом. Тоді R є кільцем елементарних дільників за Хенріксеном.*

У другому підрозділі третього розділу вивчаються максимально неголовні ідеали дуо-кілець. Вводиться поняття строго факторіального елемента і встановлюється зв'язок таких елементів із структурою максимально неголовних ідеалів.

Твердження 3.2.5. *Довільний строго факторіальний елемент R не міститься в жодному максимально неголовному ідеалі.*

Теорема 3.2.1. *Нехай R – дуо область з єдиним максимально неголовним ідеалом N. Тоді*

1) *всі елементи області R, які не є строго факторіальними утворюють ідеал, який співпадає з N;*
2) *довільний дільник строго факторіального елемента є строго факторіальним елементом;*
3) *для довільного елемента $a \in N$, який не є строго факторіальним елементом, і довільного $f \in R$ елемент f+a є строго факторіальним елементом.*

Нехай *N(R)* – перетин всіх максимально неголовних ідеалів області *R*.

Теорема 3.2.2. *Нехай $f \in R$ – довільний строго факторіальний елемент, а n -- довільний елемент з N(R). Тоді для будь-яких $x, y \in R$ елемент f+xny є строго факторіальний.*

ВИСНОВКИ

Результати дисертації одержано застосуванням методів теорії кілець елементарних дільників, К-теорії та загальної теорії кілець і модулів. Доведення опираються на результати І.Капланського, М.Хенріксена, П.Кона, М.Ларсена, В.Левіса, Т.Шореса, П.Менала, Й.Монкасі, М.Комарницького, Б.Забавського,

Дисертаційна робота присвячена дослідженню комутативних і некомутативних класів кілець Безу і можливості редукції матриць над ними. У дисертації автором отримані такі нові результати:

- описано праві кільця Безу скінченого стабільного рангу;
- показано, що праве кільце Безу, в якому радикал Джекобсона є цілком простим, є правим кільцем Ерміта;
- досліджено редукцію матриць над регулярним кільцем;
- встановлена можливість редукції матриць над майже простою областю Безу;

Вдалося розширити клас кілець, над якими діагональна редукція матриць досягається елементарними перетвореннями. Доведено, що редукція матриць над всюди адекватними кільцями досягається шляхом односторонніх елементарних перетворень.

В дисертації розвинуто теорію коадекватних елементів комутативної області Безу через вивчення структури максимально некоадекватних ідеалів, що є продовженням робіт Б.В.Забавського.

Максимально неголовні ідеали є важливим структурним елементом в процесі опису кілець Безу, що не є кільцями головних ідеалів. В роботі досліджено вплив структури максимально неголовних ідеалів областей Безу на редукцію матриць над цими кільцями. Показано, що область Безу стабільного рангу 1 з умовою Дубровіна, в якій довільний максимально неголовний правий ідеал є двобічним ідеалом, є кільцем, над яким довільна матриця еквівалентна до діагональної. Встановлено зв'язок максимально неголовних ідеалів дуо-кільця із строго факторіальними елементами.

Всі основні результати дисертації супроводжуються повними доведеннями і носять завершений характер. Вони можуть отримати широке застосування в теорії кілець і модулів.

ПУБЛІКАЦІЇ АВТОРА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Kysil' T.* Coadequate elements of a commutative Bezout domain // Matematychni Studii,-2004.-22.-94-96.
2. *Кисіль Т., Забавський Б.* Редукція матриць над всюди адекватними кільцями // Вісник Львівського університету.–2005. –64. –121-125.
3. *Кисіль Т.М.* Строго факторіальні елементи дуо-області // Математичні методи та фізико-механічні поля. –2005. –48, №4. –59-65.
4. *Zabavsky B.V., Kysil' T.N.* Nearly simple elementary divisor domains // Buletinul academiei de єtiinюe a republicii Moldova. Matematica.-2006.-3(52).-121-123.
5. *Kysil T.* On almost invariant elementary divisor rings // IV International Algebraic Conference in Ukraine. Lviv (August, 2003).-133-134.
6. *Zabavsky B., Kysil' T.* A ring with special elementary reduction of matrices // Second Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova. Chiєinru (August, 2004).-327.

7. *Kysil T.* Strong factorial elements of duo integral domain // V International Algebraic Conference in Ukraine. Odessa (July, 2005).-121-122.
8. *Zabavsky B.V., Kysil' T.M.* Almost simple elementary divisor domains // International Conference on Radicals. Kyiv (July-August 2006).-76-77.
9. *Kysil T.* Diagonal reduction of matrices over regular rings // VI International Algebraic Conference in Ukraine. Kamyanets-Podilsky (July, 2007).- 121-122.

АНОТАЦІЯ

Кисіль Т.М. *Редукція матриць над кільцями Безу скінченного стабільного рангу.* – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра і теорія чисел. – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2007.

Дисертація присвячена дослідженню різних класів кілець Безу скінченного стабільного рангу в аспекті можливості діагональної редукції матриць над даними класами кілець. Знайдено нові класи як комутативних так і некомутативних кілець елементарних дільників. Дано новий опис правого кільця Безу скінченого стабільного рангу. Показано, що майже проста область Безу є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є 2-простою. Даний критерій є частковою відповіддю на відкриту проблему про описання кілець елементарних дільників. Показано, що всюди адекватне кільце Ерміта є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли воно є кільцем стабільного рангу 2.

Досліджено вплив структури максимально неголовних ідеалів областей Безу на редукцію матриць над цими кільцями: показано, що область Безу стабільного рангу 1 з умовою Дубровіна, в якій довільний максимально неголовний ідеал є ідеалом, є кільцем елементарних дільників за Хенріксеном. Встановлено зв’язок максимально неголовних ідеалів дуо-кілець з факторіальними елементами.

Ключові слова: кільце елементарних дільників, кільце Ерміта, кільце стабільного рангу *n*, кільце Безу, дуо-кільце, всюди адекватне кільце, максимально неголовний правий ідеал.

АННОТАЦИЯ

Кысиль Т.Н. *Редукция матриц над кольцами Безу конечного стабильного ранга.* – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел. – Львовский национальный университет имени Ивана Франка, Львов, 2007.

Диссертация посвящена исследованию различных классов колец Безу конечного стабильного ранга и возможности диагонализации матриц над данными классами колец. Найдены новые классы как коммутативных, так и некоммутативных колец с элементарными делителями.

В работе дано новое описание правого кольца Безу конечного стабильного ранга. Показано, что правое кольцо Безу, радикал Джекобсона которого есть вполне простым, является правым кольцом Эрмита. Установлено, что почти простая область Безу является кольцом с элементарными делителями тогда и только тогда, когда она является 2-простой. Данный критерий дает частичный ответ на открытую проблему описания колец с элементарными делителями.

Показано, что везде адекватное кольцо Эрмита является кольцом с элементарными делителями тогда и только тогда, когда его стабильный ранг равен 2. Более того, показано, что редукцию матриц над везде адекватным кольцом можно осуществить с помощью односторонних элементарных преобразований.

Немаловажным является результат, посвященный исследованию редукции матриц над регулярным кольцом конечного стабильного ранга, поскольку диагонализация матриц над регулярными кольцами в общем случае все еще открытая проблема. Показано, что над регулярным кольцом матрицы определенного вида владеют диагональной редукцией, причем редукция матриц осуществляется с помощью элементарных преобразований с обеих сторон.

Максимально неглавные идеалы являются важным структурным элементом в процессе описания колец Безу, не являющихся кольцами главных идеалов. Описано влияние структуры максимально неглавных идеалов областей Безу на редукцию матриц над этими кольцами. Показано, что область Безу стабильного ранга 1 с условием Дубровина, в которой любой максимально неглавный идеал является идеалом, есть кольцо, над которым любая матрица эквивалентна некоторой диагональной матрицей (т.е. является кольцом с элементарными делителями по Хенриксену). Найдена связь максимально неглавных идеалов дуо-колец с факториальными элементами.

Ключевые слова: кольцо с элементарными делителями, кольцо Эрмита, кольцо стабильного ранга *n*, кольцо Безу, дуо-кольцо, везде адекватное кольцо, максимально неглавный правый идеал.

ABSTRACT

Kysil' T.M. *Reduction of matrices over Bezout rings with finite stable range.* – Manuscript.

Thesis of dissertation for obtaining the Candidate of Physics and Mathematics Sciences degree (Ph.D.) on specialty 01.01.06 – algebra and number theory. – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2007.

The thesis is devoted to the investigation of different classes of Bezout rings with finite stable range and possibility of the reduction of matrices over such rings. New classes of commutative and noncommutative elementary divisor rings were found. New description of a right Bezout ring with finite stable range was obtained. It is shown that nearly simple Bezout domain is elementary divisor ring if and only if it is 2-simple. This criterion gives the answer to the open problem of characterization of elementary divisor rings. It is proved that an everywhere adequate Hermit ring is elementary divisor ring if and only if it is a ring with stable range 2.

The relation of the structure of maximal nonprincipal ideals of Bezout domains and the reduction of matrices over such rings is investigated: it is shown that a Bezout domain with finite stable range satisfying Dubrovin's condition in which every maximal nonprincipal ideal is two-sided ideal is an elementary divisor ring after Henriksen. The connection of maximal nonprincipal ideals of duo-rings with factorial elements is obtained.

Key words: an elementary divisor ring, a Hermit ring, a ring with stable range n, Bezout ring, duo-ring, maximal nonprincipal right ideal.

Друк ПП Ковальський В.В.
29000, м. Хмельницький, вул.. Свободи, 53
Підписано до друку 8.07.2007 р.
Друк та папір – офсетний.
Формат – 60x90/16. Ум.друк.арк.. – 1,0
Наклад – 100 прим. Зам.782