НЕЧІТКА ОПТИМІЗАЦІЇ В ПРОЦЕСАХ ПРИЙНЯТТЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ

П.М. Григорук
м. Хмельницький, Хмельницький національний університет

Як зазначено в роботі [1, с. 7], елементами мислення людини є не числа, а елементи деяких нечітких множин або класів об’єктів, для яких перехід від «приналежності до класу» до «неприналежності» є не стрибкоподібним, а неперервним. Тому для моделей процесів управління більш придатними є нечіткі математичні моделі, ніж класичні.

В самій загальній постановці завдання прийняття рішень полягає у виборі кращої альтернативи з деякої їх множини. Вибір ґрунтується на основі відношень переваги ОПР, заданих на множині альтернатив.

Позначимо через $A^{(0)}$ множину альтернатив. Нечіткою ціллю в $A^{(0)}$ є нечітка підмножина *G*, з функцією належності $\mu_G(A^{(0)}) \to [0,1]$. Чим вищим є значення функції належності $\mu_G(X)$, тим більш ефективним є вибір альтернативи *X* в якості рішення в сенсі досягнення поставленої цілі.

Нехай *A* – нечітка множина допустимих альтернатив з функцією належності $\mu_A(X)$. Вона відображає систему обмежень, яким повинні задовольняти альтернативи. Нечітку підмножину множини *Y*, з функцією належності μ_Y будемо називати нечіткою ціллю завдання. Вона показує ступінь досягнення бажаного значення цільової функції на множині альтернатив. Тоді нечітким розв’язком задачі досягнення нечіткої цілі на множині альтернатив є перетин *Z* нечітких множин обмежень та цілі:

$$Z = A \cap G, \tag{1}$$

з функцією належності, яка визначається за правилом:

$$\mu_Z = \min\{\mu_A, \mu_Y\}. \tag{2}$$

Як зазначено в [2, с.72], множина *Z* повинна бути максимальною за вкладеністю нечіткою множиною з наступними властивостями:

$$\begin{cases} Z \subseteq A, \\ f(Z) \subseteq Y. \end{cases} \tag{3}$$

де *f(Z)* – образ *Z* при відображенні *f*. Відповідно до [3], він являє собою нечітку підмножину *B* множини *Y* з функцією належності:

$$\mu_B(y) = \max_{X \in f^{-1}(y)} \mu_A(X) \ . \tag{4}$$

Розв'язком є альтернатива X^*, для якої досягається максимум функції належності:

$$\mu_Z(X^*) = \max_{X \in A} \mu_Z(X) \, . \tag{5}$$

Нехай f_0 – деякий заданий рівень функції корисності, якого необхідно досягнути. Запишемо завдання математичного програмування, яке в даному випадку (в звичайній, чіткій постановці) має наступний вигляд:

$$f(X) \geq f_0,$$

$$\begin{cases} g_1(X) \leq b_1; \\ g_2(X) \leq b_2; \\ \ldots \\ g_n(X) \leq b_n; \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_t \geq 0. \end{cases} \quad , \tag{6}$$

причому деякі з обмежень мають форму рівності.

Позначимо через δ заданий рівень відхилення, який допускається при визначенні значення цільової функції. Відповідно до [2, с. 83] функція належності нечіткої множини цілей задається у вигляді:

$$\mu_G(X) = \begin{cases} 0, \quad \text{при } f \leq f_0 - \delta; \\ \mu(X, \delta), \quad \text{при } f_0 - \delta < f \leq f_0; \\ 1, \quad \text{при } f > f_0. \end{cases} \, . \tag{7}$$

Для обмежень, які мають вигляд нерівностей типу функція належності матиме вигляд:

$$\mu_A^{(i)}(X) = \begin{cases} 0, \quad \text{при } g_i(X) > b_i + \delta_i; \\ \nu_i(X, \delta_i), \quad \text{при } b_i < g_i(X) \leq b_i + \delta_i; \\ 1, \quad \text{при } g_i(X) \leq b_i. \end{cases} \tag{8}$$

Припустимо, що допускається відхилення в рівностях обмежень, тобто, для кожного з них задані значення $\delta_i^{(1)}$ та $\delta_i^{(2)}$, для яких нерівності $g_i(X) < b_i - \delta_i^{(1)}$, $g_i(X) > b_i + \delta_i^{(2)}$ означають сильне порушення відповідних обмежень. Тоді нечіткі функції будуть мати такий вигляд:

$$\mu_A^i(X) = \begin{cases} 0 \quad , & g_i(X) < b_i - \delta_1^i \vee g_i(X) > b_i + \delta_2^i; \\ \nu_i^{(1)}(X, \delta_i^{(1)}), & b_i - \delta_i^{(1)} \le g_i(X) < b_i; \\ \nu_i^{(2)}(X, \delta_i^{(2)}), & b < g_i(X) \le b_i + \delta_i^{(2)}; \\ 1 \quad , & g_i(X) = b_i \end{cases}, \quad (9)$$

Множину, яка є об'єднанням побудованих нечітких множин позначимо через $\widetilde{A}$. В [4] доведено, що якщо функції $\mu_A^i(X)$ та $\mu_Y(X)$ є унімодальними на множині $\widetilde{A}$, то задача (6) буде мати єдиний розв'язок.

Розглянемо задачу, коли нечіткі цілі і обмеження належать різним універсальним множинам. Нехай $\mathrm{A}^{(0)}$ – універсальна множина альтернатив, а відображення $f : A^{(0)} \to Y$ задає ефективність вибору альтернативи $X \in A^{(0)}$ в якості рішення. Нечітка ціль в такій постановці задається у вигляді нечіткої підмножини універсальної множини оцінок ефективності Y:

$$\mu_G : Y \to [0,1]. \quad (10)$$

Нехай P – нечітке відношення переваги, задане на множині Y з функцією належності:

$$\mu_P : Y \times Y \to [0,1]. \quad (11)$$

Вибір альтернатив оцінюється значеннями нечіткої функції корисності, яка відображає ціль:

$$f : A^{(0)} \times Y \to [0,1]. \quad (12)$$

Для будь-якої альтернативи $X \in A^{(0)}$ функція f ставить у відповідність нечітку оцінку ефективності цієї альтернативи, задану у вигляді нечіткої підмножини $f(X,Y)$. Розглянемо нечітке відношення переваги ν, визначене на всіх нечітких підмножинах множини Y. Перевагу альтернативи A_1 над альтернативою A_2 будемо ототожнювати з перевагою нечіткої оцінки $f(A_1,Y)$ над $f(A_2,Y)$; $A_1, A_2 \in A^{(0)}$:

$$\nu(A_1, A_2) = \max_{y_1, y_2 \in Y} \min\{f(A_1, y_1), f(A_2, y_2), \mu_P(y_1, y_2)\}. \quad (13)$$

Виділимо в множині ($A^{(0)}$, ν) нечітку підмножину недомінованих альтернатив:

$$\nu^{ND}(X) = 1 - \max_{Z \in A^{(0)}} \{\nu(Z, X) - \nu(X, Z)\}. \quad (14)$$

Тоді, враховуючи залежність (13), отримаємо:

$$\nu^{ND}(X) = 1 - \nu_1 - \nu_2, \quad (15)$$

де $X \in A^{(0)}$.

Складові виразу (15) обчислюються за формулами:

$$\nu_1 = \max_{Z \in A^{(0)}} [\max_{y_1, y_2 \in Y} \min\{f(Z, y_1), f(X, y_2), \mu_P(y_2, y_1)\}, \quad (16)$$

$$\nu_2 = \max_{y_1, y_2 \in Y} \min\{f(Z, y_1), f(X, y_2), \mu_P(y_1, y_2)\}], \quad (17)$$

Тоді для нечіткої підмножини строго недомінованих альтернатив має місце умова:

$$\nu^{ND}(X) = 1. \quad (18)$$

Оскільки на практиці умова (18) може виконуватись не завжди, то в ролі рішення доцільно обрати альтернативу, недоміновану з деяким рівнем $0 < r < 1$.

Література:

1. Алтунин, А. Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях: монография / А. Е. Алтунин, М. В. Семухин. – Тюмень : ТГУ, 2000. – 352 с.
2. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С. А. Орловский. – М. : Наука, 1981. – 208 с.
3. Беллман Р. Принятие решений в расплывчатых условиях / Р. Беллман, Л. А. Заде // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. – М. : Мир, 1976. – С. 172–215.
4. Григорук П. М. Прийняття рішень в умовах невизначеності як задача нечіткого лінійного програмування / П. М. Григорук // Матеріали V міжнародної науково-практичної конференції «Методи, моделі та інформаційні технології в управлінні соціально-економічними, екологічними та технічними системами» / голови ред. колегії О. Л. Голубенко, Ю. Г. Лисенко, 17–19 жовтня 2012 р. – Луганськ – Євпаторія, 2012. – С. 29–32.