

Ярецкая Наталия, к. ф.-м. н.
Хмельницкий национальный университет,
г. Хмельницкий, Украина

**Влияние начальных напряжений на контактное взаимодействие
упругого кольцевого штампа и полупространства**

Аннотация. Статья посвящена исследованию контактного взаимодействия предварительно напряженного кольцевого штампа и полупространства (основы) с начальными (остаточными) напряжениями без учета сил трения. Задача решена для случая равных корней разрешающего уравнения. Исследование представлено в общем виде для теории больших начальных (конечных) деформаций и двух вариантов теории малых начальных деформаций в рамках линеаризованной теории упругости при произвольной структуре упругого потенциала.

Ключевые слова: линеаризованная теория упругости, начальные (остаточные) напряжения, контактная задача, кольцевой штамп, полупространство.

Abstract. *The article is devoted to the study of the contact interaction of a pre-stressed annular stamp and a half-space with initial stresses without taking friction forces into account. The problem is solved for the case of equal roots of the resolving equation. The study is presented in a general form for the theory of large initial (finite) deformations and two versions of the theory of small initial deformations in the framework of the linearized theory of elasticity for an arbitrary structure of the elastic potential.*

Key words: *the linearized elasticity theory, initial (residual) stresses, contact problem, annular punch, half-space.*

Введение. Прикладные потребности естествознания, современной техники и новейших технологий, связанные с необходимостью прогнозирования контактного поведения различных конструкций, стимулировали в последние десятилетия развитие различных математических моделей и методов контактной механики тел с различными свойствами.

Сегодня по проблемам, имеющим отношение к контактным задачам для упругих тел, получены результаты по широкому кругу вопросов. Они представлены работами [1-5]. Не смотря на существенные достижения, количество исследований по контактному взаимодействию предварительно напряженных тел является относительно невелико.

Контактное взаимодействие жестких и упругих штампов с предварительно напряженными телами представлено в [1,3,5]. В работе [5] изучен вопрос влияния начальных напряжений на контактное взаимодействие жесткого кольцевого штампа на упругое полупространство с начальными напряжениями.

В данной статье в рамках линеаризованной теории упругости для тел с начальными напряжениями [1,4] рассмотрена задача о давлении предварительно напряженного упругого кольцевого штампа на полупространство с начальными напряжениями без учета сил трения. Исследование выполнено в общем виде для сжимаемых и несжимаемых тел для теории больших начальных деформаций и двух вариантов теории малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала.

Постановка задачи и граничные условия. Исследования проведены в координатах начального деформированного состояния Oy_i , которые связаны с лагранжевыми координатами соотношениями $y_i = \lambda_i x_i$ ($i = \overline{1,3}$), где λ_i – коэффициенты удлинения, что определяют перемещения начального состояния. Принято, что начальные состояния в полупространстве и штампе – однородны и равны, а упругие потенциалы – дважды непрерывно-дифференцируемые функции алгебраических инвариантов тензора деформации Грина [1]. Кроме того, действие штампа вызывает в полупространстве малое возмущение основного напряженно-деформированного состояния, для которого выполняются условия $S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0$; $S_0^{33} = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$.

Пусть конечный предварительно напряженный кольцевой штамп с плоским основанием, геометрическая ось симметрии которого совпадает с осью u_3 цилиндрической системы координат (r, θ, u_3) , направлена внутрь полупространства (рис.1) и давит на полупространство с силой P , после

возникновения там начального деформированного состояния. R_1, R_2 – соответственно внутренний и внешний радиусы штампа. Будем считать, что внешняя нагрузка приложена только к свободному торцу упругого штампа. Под действием нагрузки все точки торца штампа перемещаются в направлении оси симметрии y_3 на одну и ту же величину ε . Будем считать, что поверхности вне области контакта остаются свободными от влияния внешних сил, а в зоне контакта перемещения и напряжения – непрерывные.

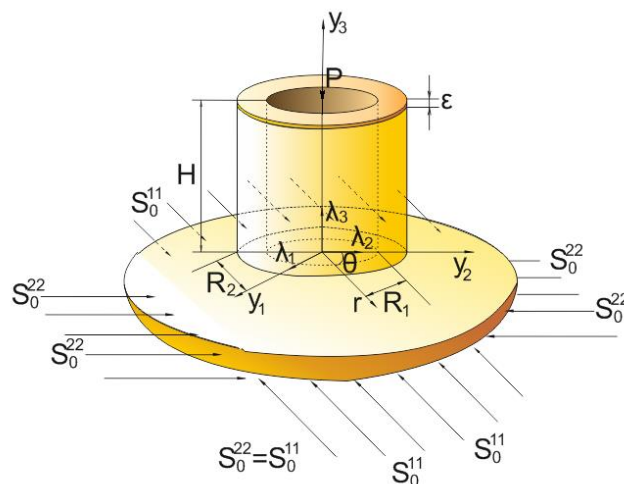


Рис. 1. Давление предварительно напряженного кольцевого штампа на полупространство с начальными напряжениями.

Материалы контактирующих тел, будем считать изотропными сжимаемыми или несжимаемыми с произвольной структурой упругого потенциала. В случае ортотропных материалов принимается, что упруго-эквивалентные направления совпадают с направлениями осей координат (y_1, y_2, y_3) .

Величины, которые относятся к упругому штампу, будем записывать с верхним индексом (1), а величины, которые относятся к предварительно напряженному полупространству с начальными напряжениями – с верхним индексом (2).

В системе круговых цилиндрических координат (r, θ, z_i) , где $z_i = v_i^{-1} y_3$, $v_i = \sqrt{n_i}$, $(i=1,2)$, $n_1 = \xi_2'^2$, $n_2 = \xi_3'^2$ такой постановке соответствуют граничные условия:

- 1) на торце упругого штампа $z_1 = H v_1^{-1}$

$$U_3^{(1)} = -\varepsilon, \quad Q_{3r}^{(1)} = 0 \quad (R_1 < r < R_2) \quad (1)$$

- 2) на границе упругого полупространства в области контакта $z_1 = 0$:

$$U_3^{(1)} = U_3^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{33}^{(1)} = \tilde{Q}_{33}^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (R_1 < r < R_2) \quad (2)$$

3) на границе упругого полупространства вне области контакта $z_1=0$:

$$\tilde{Q}_{33}^{(2)} = 0, \quad U_3^{(2)} = 0, \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 < r < R_1 \quad R_2 < r < \infty) \quad (3)$$

4) на внешней боковой поверхности упругого штампа $r=R_2$:

$$\tilde{Q}_{rr}^{(1)} = 0, \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq z_1 \leq H\nu_1^{-1}) \quad (4)$$

5) на внутренней боковой поверхности упругого штампа $r=R_1$:

$$\tilde{Q}_{rr}^{(1)} = 0, \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq z_1 \leq H\nu_1^{-1}) \quad (5)$$

Условие равновесия, которое устанавливает связь между осадкой торца и равнодействующей нагрузки P имеет вид:

$$P = -2\pi \int_{R_1}^{R_2} r Q_{33}^{(2)}(0, r) dr \quad (6)$$

Напряженно-деформированное состояние в предварительно напряженном кольцевом штампе для сжимаемых (несжимаемых) тел и равных корней, с учетом (1) – (5), представим в виде:

$$\begin{aligned} U_r^{(1)} = & - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 6\tilde{C}_0^{(k)} r (\nu_1^{-1} + 2z_1) + \gamma_k \nu_1 I_1(\nu_1 \gamma_k r) \left[(\tilde{A}_k + \nu_1 z_1 \tilde{B}_k) \gamma_k \cos(\gamma_k \nu_1 z_1) + \tilde{B}_k \sin(\gamma_k \nu_1 z_1) \right] - \right. \\ & \left. - \alpha_k J_1(\alpha_k r) \left[\alpha_k \nu_1^{-1} (\tilde{S}_4(\alpha_k z_1) + \nu_1 z_1 \tilde{S}_5(\alpha_k z_1)) - \tilde{S}_3(\alpha_k z_1) \right] \right\} N_k \\ U_3^{(1)} = & \frac{\varepsilon}{R_1 - R_2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 12m_1 \tilde{C}_0^{(k)} z_1 \nu_1^{-1} (\nu_1^{-1} + z_1) + (1 - m_2) \nu_1^{-1} \left[\tilde{A}_0^{(k)} + 3\tilde{C}_0^{(k)} (r^2 - 2z_1^2) \right] + \right. \\ & + \gamma_k I_0(\gamma_k \nu_1 r) \left[(\tilde{A}_k + \nu_1 z_1 \tilde{B}_k) m_1 \gamma_k \sin(\gamma_k \nu_1 z_1) + (1 - m_2) \tilde{B}_k \cos(\gamma_k \nu_1 z_1) \right] - \\ & \left. - \alpha_k \nu_1^{-1} J_0(\alpha_k r) \left[m_1 \alpha_k (\tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + z_1 \nu_1 \tilde{S}_3(\alpha_k z_1)) + (m_2 - 1) \nu_1 \tilde{S}_5(\alpha_k z_1) \right] \right\} N_k \\ Q_{33}^{(1)} = & C_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 12\tilde{C}_0^{(k)} \left[(1 + m_1) l_1 (\nu_1^{-1} + z_1) + (1 + m_2) l_2 z_1 \right] + \gamma_k^2 \nu_1^2 I_0(\gamma_k \nu_1 r) \left[(1 + m_1) l_1 \gamma_k (\tilde{A}_k + \right. \right. \\ & \left. \left. + \nu_1 z_1 \tilde{B}_k) \cos(\gamma_k \nu_1 z_1) + (1 + m_2) l_2 \tilde{B}_k \sin(\gamma_k \nu_1 z_1) \right] - \right. \\ & \left. - \alpha_k^2 J_0(\alpha_k r) \left[(1 + m_1) l_1 \alpha_k \nu_1^{-1} (\tilde{S}_4(\alpha_k z_1) + \nu_1 z_1 \tilde{S}_5(\alpha_k z_1)) + (1 + m_2) l_2 \tilde{S}_3(\alpha_k z_1) \right] \right\} N_k \\ Q_{3r}^{(1)} = & C_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -6\tilde{C}_0^{(k)} r (1 + m_2) \nu_1^{-1} + \gamma_k^2 \nu_1 I_1(\gamma_k \nu_1 r) \left[(1 + m_1) \gamma_k (\tilde{A}_k + \nu_1 z_1 \tilde{B}_k) \sin(\gamma_k \nu_1 z_1) - \right. \right. \\ & \left. \left. - (1 + m_2) \tilde{B}_k \cos(\gamma_k \nu_1 z_1) \right] + \right. \\ & \left. + \alpha_k^2 \nu_1^{-1} J_1(\alpha_k r) \left[\alpha_k (1 + m_1) (\tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + \nu_1 z_1 \tilde{S}_3(\alpha_k z_1)) + (1 + m_2) \tilde{S}_5(\alpha_k z_1) \right] \right\} N_k \end{aligned}$$

где $\tilde{S}_4 = \tilde{E}_k ch(\alpha_k z_1) + \tilde{F}_k ch(\alpha_k z_1)$, $\tilde{S}_5 = ch(\alpha_k z_1) + \tilde{M}_k sh(\alpha_k z_1)$,

$$\tilde{A}_0^{(k)} = \frac{\nu_1}{(R_1 - R_2)(1 - m_2)} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (1 + m_2) f_1(R_1, R_2) + \frac{\nu_1 \theta_1 (I_0(\gamma_k \nu_1 R_1) - I_0(\gamma_k \nu_1 R_2))}{R_1 + R_2} \right\} \gamma_k \tilde{B}_k,$$

$$\tilde{C}_0^{(k)} = \frac{\nu_1}{3(R_2^2 - R_1^2)} \sum_{k=1}^{\infty} \{ I_0(\gamma_k \nu_1 R_1) - I_0(\gamma_k \nu_1 R_2) \} \gamma_k \tilde{B}_k, \quad \theta_1 = \frac{4Hm_1(1+H)}{\nu_1^3} + \frac{R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2}{3} - \frac{2H^2}{n_1},$$

$$f_1(R_1, R_2) = -R_1 I_0(\gamma_k \nu_1 R_1) + 0.5\pi R_1 L_0(\gamma_k \nu_1 R_1) I_1(\gamma_k \nu_1 R_1) - 0.5\pi R_1 L_1(\gamma_k \nu_1 R_1) I_0(\gamma_k \nu_1 R_1) +$$

$$+ R_2 I_0(\gamma_k \nu_1 R_2) - 0.5\pi R_2 L_0(\gamma_k \nu_1 R_2) I_1(\gamma_k \nu_1 R_2) + 0.5\pi R_2 L_1(\gamma_k \nu_1 R_2) I_0(\gamma_k \nu_1 R_2),$$

$$\tilde{S}_2 = \tilde{E}_k sh(\alpha_k z_1) + \tilde{F}_k ch(\alpha_k z_1), \quad \tilde{S}_3 = sh(\alpha_k z_1) + \tilde{M}_k ch(\alpha_k z_1), \quad \tilde{M}_k = -cth(\alpha_k H\nu_1^{-1}), \quad \tilde{F}_k = -s_0 \alpha_k^{-1},$$

$$\tilde{E}_k = Hcth^2(\alpha_k H\nu_1^{-1}) - \tilde{F}_k cth(\alpha_k H\nu_1^{-1}) - H, \quad \tilde{A}_k = \left(\frac{Rs_0 H^2 (I_0(\gamma_k \nu_1 R_1) - I_0(\gamma_k \nu_1 R_2))}{2n_1 (R_2^2 - R_1^2) I_1(\gamma_k \nu_1 R)} - \frac{s_0}{\nu_1 \gamma_k^2} + \frac{H}{2} \right) \tilde{B}_k,$$

$$\tilde{B}_k = \frac{\alpha_k}{2} (R_2^2 - R_1^2) J_0(\alpha_k R) \{ H\alpha_k (\tilde{c}_0 sh(\alpha_k H\nu_1^{-1}) + \tilde{c}_1 (1 - ch(\alpha_k H\nu_1^{-1}))(1 - s_0 sh(\alpha_k H\nu_1^{-1}))) +$$

$$+ (1 - ch^2(\alpha_k H\nu_1^{-1}))(\nu_1 (\tilde{c}_0 + \tilde{c}_2 - \tilde{c}_1) - \tilde{c}_0 s_0) \} / \{ \gamma_k (ch^2(\alpha_k H\nu_1^{-1}) - 1) [H(1 - \tilde{c}_0 + H(3\tilde{c}_0 + 2\tilde{c}_2 -$$

$$- 4\tilde{c}_1)) (I_0(\gamma_k \nu_1 R_1) - I_0(\gamma_k \nu_1 R_2)) + \tilde{c}_2 n_1 (R_2^2 - R_1^2) I_0(\gamma_k \nu_1 R)] \},$$

$$R = (R_2 - R_1)H(r - R_1) - (R_2 - R_1)H(r - R_2) + \delta(R_1)(2R_1 - R_2) + \delta(R_1)R_2,$$

$H(x)$ – функция Хевисайда, $\delta(x)$ – функция Дирака, $L_\nu(x)$ – модифицированная функция Струвела, $J_\nu(x)$, $I_\nu(x)$ – функции Бесселя действительного и мнимого аргумента, соответственно, значение $D_{44}, C_{44}, l_1, l_2, m_1, m_2, s_0$ поданы в [1].

Напряженно-деформированное состояние в упругом полупространстве с начальными напряжениями для равных корней определим через гармонические функции в виде интегралов Ханкеля. Удовлетворив третьему условию (2), третьему – (3), после ряда преобразований имеем

$$U_3^{(2)} = -\frac{1}{\omega_3} \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta r) d\eta, \quad U_r^{(2)} = \omega_1 \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta r) d\eta, \quad Q_{33}^{(2)} = \frac{\omega_3}{R_2 - R_1} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r) d\eta, \quad Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (8)$$

где $\omega_3 = C_{44} l_1 (1 + m_1)(s - s_0)$, $\omega_1 = s_0 - 1$, $s = s_0 \frac{l_2}{l_1}$.

Материалы и методы. Используя решение для штампа (7) и удовлетворяя второму условию (1), второму условию (4) и второму условию (5), находим собственные значения задачи (1) – (6) для $n_1 = n_2$:

$$\gamma_k = \frac{\pi(2k+1)}{H}, \quad \alpha_k = \frac{\mu_k}{R} \quad (J_1(\mu_k) = 0). \quad (9)$$

Удовлетворив первые условия (2) и (3), определим неизвестную функцию $F(\eta)$ для (8) из парных интегральных уравнений:

$$\int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta r) d\eta = f(r) \quad (R_1 < r < R_2), \quad \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta r) d\eta = 0 \quad (0 < r < R_1, R_2 < r < \infty), \quad (10)$$

Где $f(r) = \frac{\omega_3 \varepsilon}{R_2 - R_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle (\tilde{A}_0^{(k)} + 3r^2 \tilde{C}_0^{(k)}) \frac{1-m_2}{v_1} + \gamma_k I_0(\gamma_k v_1 r) (1-m_2) \tilde{B}_k - \frac{\alpha_k}{n_1} J_0(\alpha_k r) (m_1 \alpha_k \tilde{F}_k + v_1 (m_2 - 1)) \right\rangle N_k$.

Применение формулы обращения к (10) приводит ее к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода относительно функции $F(\eta)$, т.е.

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = \frac{2\omega_3}{\pi(R_2 - R_1)} \left\langle \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(1+m_2) f_1(R_1, R_2) + \frac{I_0(\gamma_k v_1 R_1) - I_0(\gamma_k v_1 R_2)}{R_2 + R_1} (v_1 \theta_1 - (1-m_2)(R_2^2 - R_1^2)) \gamma_k \tilde{B}_k \psi_0(\eta, 0) + \right. \right. \\ \left. \left. + (R_1 - R_2) \left\{ \gamma_k \psi_0(\eta, i\gamma_k v_1 (R_2 - R_1)) (1-m_2) \tilde{B}_k + \frac{\alpha_k}{n_1} \psi_0(\eta, \mu_k) ((1-m_2)v_1 - s_0 m_1) \right\} \right] N_k \right\rangle \quad (11)$$

Где $\psi_n(x, y) = \int_0^1 t^n \cos xt \cos ytdt$

Удовлетворив второе граничное условие (2), имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} (J_1(\eta R_2) - J_1(\eta R_1)) d\eta = C_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle 2l_1(1+m_1) \gamma_k (I_0(\gamma_k v_1 R_1) - I_0(\gamma_k v_1 R_2)) \tilde{B}_k + \gamma_k^2 v_1 l_1 (1+m_1) (R_2 I_1(\gamma_k v_1 R_2) - \right. \\ \left. - R_1 I_1(\gamma_k v_1 R_1)) \tilde{A}_k - \alpha_k (R_2 J_1(\alpha_k R_2) - R_1 J_1(\alpha_k R_1)) \left(\frac{l_1}{v_1} (1+m_1) \alpha_k \tilde{E}_k + (1+m_2) l_2 \tilde{M}_k \right) \right\rangle N_k$$

Удовлетворив первым двум граничным условиям (2), с учетом ортогональности бесселевых функций $J_0(\mu_{kr})$ для определения постоянных N_i ($i=0,1,2,\dots$), которые входят в (7) – (8) и (10), получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau_{kn} \chi_n = \beta_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (12)$$

Коэффициенты системы представим в виде

$$\tau_{kn} = \left\{ (1+m_2) f_1(R_1, R_2) + \frac{I_0(\gamma_n v_1 R_1) - I_0(\gamma_n v_1 R_2)}{R_1 + R_2} (v_1 \theta_1 - (R_2^2 - R_1^2)(1-m_2)) \right\} \gamma_n \tilde{B}_k + \\ + (R_1 - R_2) \left\{ \gamma_n \tilde{B}_k (1-m_2) \psi_0(0, i\gamma_n v_1 R) + \frac{\alpha_n}{n_1} \psi_0(0, \mu_n) ((1-m_2)v_1 + m_1 s_0) \right\} - \\ - C_{44} \left\{ 2(1+m_1) l_1 \gamma_n \tilde{B}_k (I_0(\gamma_n v_1 R_1) - I_0(\gamma_n v_1 R_2)) + \gamma_n^2 (1+m_1) l_1 v_1 (R_2 I_1(\gamma_n v_1 R_2) - \right. \\ \left. - R_1 I_1(\gamma_n v_1 R_1)) \tilde{A}_k - \alpha_n (R_2 J_1(\alpha_n R_2) - R_1 J_1(\alpha_n R_1)) ((1+m_1) l_1 v_1^{-1} \alpha_n \tilde{E}_k + (1+m_2) l_2 \tilde{M}_k) \right\}, \quad \beta_k = \frac{2\omega_3 \varepsilon}{\pi R_1 R_2}$$

Определив неизвестные постоянные N_i ($i=0,1,2,..$) из системы (12), вычислим перемещения и напряжения как в упругом штампе, так и в упругом полупространстве по формулам (7)–(8). В результате этого, решение представим в виде рядов через бесконечную систему констант, что определяются из системы (12). Причем в (12) коэффициенты β_k τ_{kn} зависят от величин, которые определяют структуру упругого потенциала, высоту упругого штампа H , а свободные члены зависят только от n_1, n_2 .

Числовой анализ. В работе проведено численное решение системы (12) методом редукции для потенциала гармонического типа при таких значениях параметров: $R_1=1.0$, $R_2=2.0$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $E=3.92$, $\sigma=0.47$, $\lambda_1= 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3$, где $R_1 \leq r \leq R_2$. Алгоритм решения поставленной задачи реализован в виде компьютерной программы в пакете Maple 15.

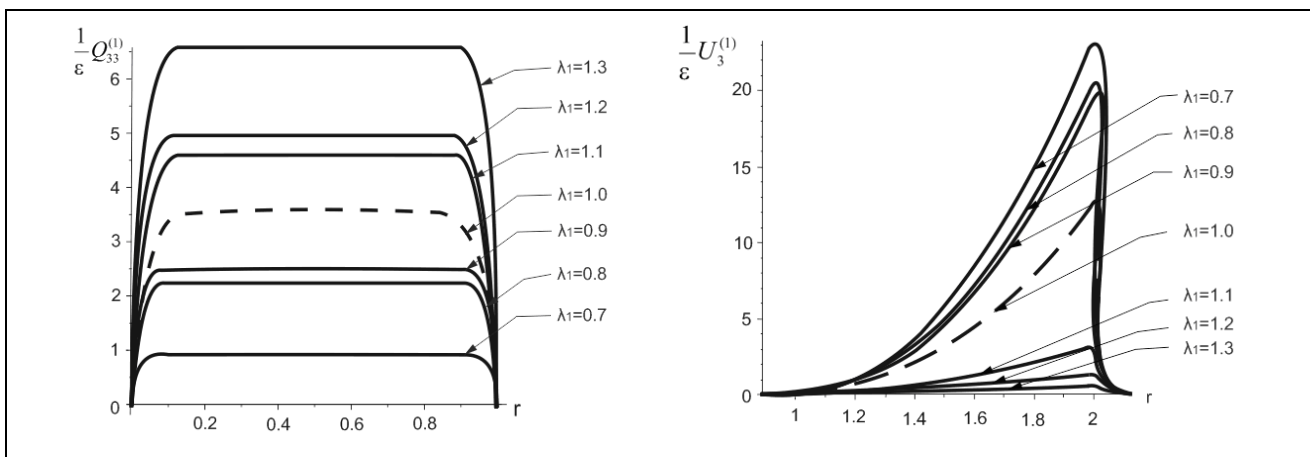


Рис. 2. Нормальные контактные напряжения и перемещения.

На рис. 2 представлены, распределения нормального контактного напряжения $\frac{1}{\varepsilon} Q_{33}$ и перемещения $\frac{1}{\varepsilon} U_3$ под кольцевым штампом в зоне контакта в безразмерных координатах. Причем, начало координат по оси r соответствует значению $r=R_1$. Пунктирные кривые соответствуют полупространству без начальных напряжений ($\lambda_1=1$), а сплошные – с начальными напряжениями.

Количественные характеристики влияния начальных напряжений (в процентах) по отношению к полупространству и кольцевому штампу без начальных напряжений для потенциала гармонического типа представлены в Табл. 1.

Таблица 1. Влияние начальных напряжений на контактное взаимодействие.

σ_{33} / σ_0	Уменьшение, %				Увеличение, %		
λ_1 r	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
0.2	74.3	30.1	37.4	0	28.6	38.7	84.1
0.4	74.4	30.4	37.7	0	28.0	38.1	83.3
0.6	74.4	30.4	37.7	0	28.0	38.1	83.3
0.8	74.3	30.1	37.4	0	28.6	38.7	84.1

С Табл. 1 можна увидеть, что начальные напряжения при сжатии приводят к уменьшению силы напряжений в упругом кольцевом штампе и полупространстве, а при растяжении – к их увеличению. В случае перемещений все происходит наоборот (рис. 2).

Заключение. Анализ результатов исследований показывает, что присутствие предварительно напряженного состояния при контактном взаимодействии упругого кольцевого штампа и упругого полупространства даёт возможность регулировать контактные напряжения и перемещения при расчетах конструкций и деталей механизмов на прочность.

Литература.

1. Гузь А.Н., Рудницкий В.Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями : монография. Хмельницкий: вид. ПП Мельник, 2006. 710 с.
2. Діхтярук М.М., Ярецька Н.О. Контактна взаємодія нескінченного стрингера з однією та двома попередньо напруженими смугами. Актуальные научные исследования в современном мире: сб. научных трудов. 2018. №2(34), ч.1. С. 75-83.
3. Yaretskaya N.A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. International Applied Mechanics. 2014. Vol. 50, №4. P. 378-388.
4. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Рудницкий В.Б. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. Развитие идей Л.А. Галина в механике. 2013. 480с.
5. Yaretskaya N. F. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. International Applied Mechanics. 2018. Vol. 54, №5. P. 539-543.